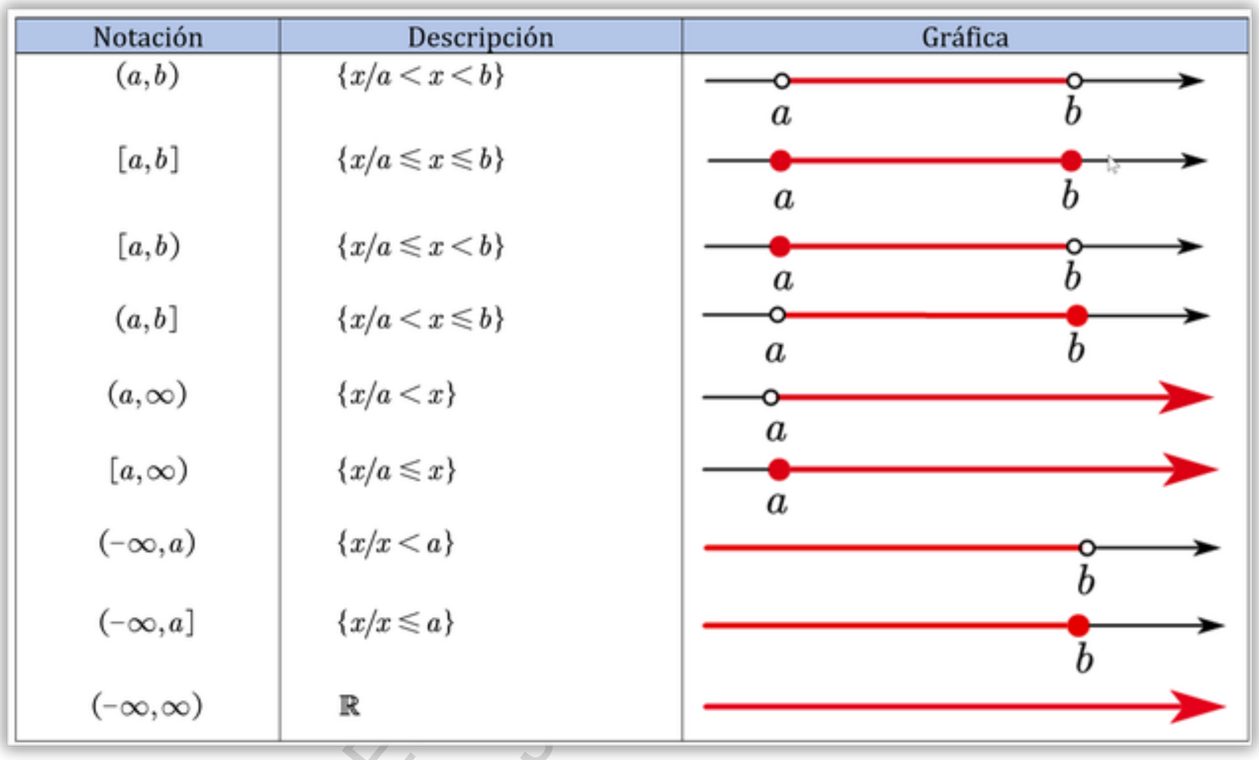
1a. Intervalos

- **Intervalo Cerrado** $[a, b]$: Incluye los extremos, es decir, $a \leq x \leq b$.
- **Intervalo Abierto** (a, b): No incluye los extremos, es decir, $a < x < b$.
- **Intervalo Semiabierto** $[a, b)$ o $(a, b]$: Incluye solo uno de los extremos.
- **Intervalos Infinito**: $(a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$, el infinito nunca se incluye porque no es un número.

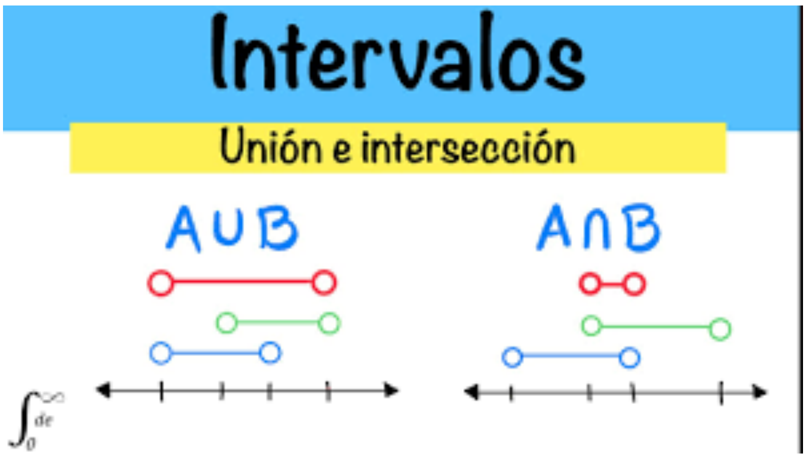


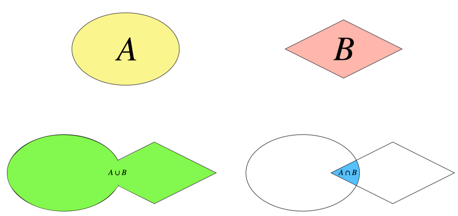
Notación	Descripción	Gráfica
(a,b)	$\{x/a < x < b\}$	a b
$[a,b]$	$\{x/a \leq x \leq b\}$	a b
$[a,b)$	$\{x/a \leq x < b\}$	a b
$(a,b]$	$\{x/a < x \leq b\}$	a b
(a,∞)	$\{x/a < x\}$	a
$[a,\infty)$	$\{x/a \leq x\}$	a
$(-\infty,a)$	$\{x/x < a\}$	b
$(-\infty,a]$	$\{x/x \leq a\}$	b
$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$	

https://jcastrom.jimdofree.com/matematica/matem%C3%A1tica-general/intervalos/

Operaciones con intervalos:

- **Unión de intervalos** (∪): Reúne todos los elementos de ambos intervalos.
- **Intersección de intervalos** (∩): Solo toma los elementos que pertenecen a ambos intervalos a la vez. (Parte en común de los intervalos)





UNIÓN INTERSECCIÓN

Ejemplos:

$\cdot\ [-3,2) \cup (0,+\infty) = [-3,+\infty)$ ———|================∞
-3 0 2

$\cdot\ \mathbb{Z} \cap (-2,\ 4]$=$\{-1,0,1,2,3,4\}$. ● ● ● ● ● ●
-1 0 1 2 3 4

$\cdot\ [-1,5) \cap (3,+\infty) = (3,5)$ ——-(=====)———
3 5

$\cdot\ \mathbb{Z} \cap [(-2,\ 4] \cup [-3,\ 0)] = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

$\cdot\ \mathbb{Z} \cap [[-2,\ 4) \cap (-3,\ 0]] = \{-2,-1,0\}$.

1b. Desigualdades y valor absoluto en conjuntos numéricos del tipo $\left\{x \in \mathbb{R}/|x-c| \le r\right\}$

La expresión $|x-c| \le r$ indica la distancia de x a c (centro) es menor o igual que r (radio), lo que se traduce en dos desigualdades:

$$|x-c| \le r \Rightarrow (casos) \Rightarrow \begin{cases} x-c \le r \\ -x+c \le r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le c+r \\ x \ge c-r \end{cases} \Rightarrow x \in [c-r, c+r].$$

Con el mayor o igual:

$$|x-c| \ge r \Rightarrow \begin{cases} x-c \ge r \\ -x+c \ge r \end{cases}$$

Ejemplo: $A = \left\{x \in \mathbb{R}/|x-1| \ge 2\right\}$

$$|x-1| \ge 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 2 \\ -x+1 \ge 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le -1 \end{cases} \Longrightarrow A = (-\infty,-1] \cup [3,\infty)$$

2. Potencias (propiedades)

1. Producto de potencias con la misma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (suma exponentes)
2. Cociente de potencias con la misma base: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (resta exponentes)
3. Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ (multiplica exp.)
4. Potencia de un producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (producto de potencia)
5. Potencia de un cociente: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (cociente de potencia)
6. Potencias de exponente cero: $a^0 = 1$ (siempre que a $\neq 0$)
7. Exponente negativo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (numerador <-> denominador || cambio de signo)

3. Radicales (propiedades)

1. Producto: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ 2. Cociente de radicales: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3. Radical de una potencia: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (forma fraccionaria de los radicales)

Extracción de radicales: $\cdot\ 3\sqrt{24} = 3\sqrt{2^3 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$ $\cdot\ \sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3}$

Suma/resta de radicales equivalentes: $6\sqrt{6} - \sqrt{6} + 5\sqrt{6} = (6 - 1 + 5)\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$

4. Racionalizar radicales

Consiste en eliminar radicales del denominador multiplicando y dividiendo por la misma expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{5}$$

Cuando en el denominador hay suma o resta con radicales, se multiplica y divide por el conjugado (resta si era suma, suma si era resta):

$$\frac{1+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \frac{4-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4}{16-8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

6.7. Logaritmos (inversa de la exponenciación)

Definición: $\log_b a = c \ \Leftrightarrow\ b^c = a$ *Ej:* $\log_2 8 = 3 \ \Leftrightarrow\ 2^3 = 8$

a es el resultado de la potencia; b es la base; c es el exponente.

Propiedades de los logaritmos: (utilidad de la herramienta)

1. Logaritmo de un producto: $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ (producto en suma)
2. Logaritmo de un cociente: $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$ (cociente en resta)
3. Logaritmo de una potencia: $\log_b(x^n) = n \cdot \log_b x$ (baja exponentes)
4. Cambio de base: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

8. Igualdades notables y Binomio de Newton

Fundamentales tanto para **desarrollar** expresiones como para **factorizar**.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (1)}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ (2)}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ (3)}$$

(ambas direcciones)

Ejemplos:

· **Desarrollar**: $\left(\frac{3}{2}x - 1\right)^2$, usando (2) $\left(\frac{3}{2}x - 1\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 - \frac{6}{2}x + 1$

· **Factorizar** $9x^2 + 6x + 1$, usando (1), identificamos $a = \sqrt{9x^2} = 3x$
$b = \sqrt{1} = 1$, comprobamos el término central: $2ab = 2 \cdot 3x \cdot 1 = 6x$, correcto:

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$$

BINOMIO DE NEWTON: Para exponentes superiores: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Ejemplo: $(2x - 3y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4(-3y)^0 + \binom{4}{1}(2x)^3(-3y)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 +$
$+ \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)^1(-3y)^3 + \binom{4}{4}(2x)^0(-3y)^4 =$
$= 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$

Número combinatorio: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

En la práctica multiplicamos hacia atrás k veces: $\binom{7}{3} = \frac{\overbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}^{3veces}}{\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3veces}} = 35$

Se asocia al triángulo de Pascal, útil para casos bajos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
&&&&\binom{0}{0}&&&& \\
&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&& \\
&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&& \\
&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}& \\
\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccc}
&&&&1&&&& \\
&&&1&&1&&& \\
&&1&&2&&1&& \\
&1&&3&&3&&1& \\
1&&4&&6&&4&&1
\end{array}$$

Vemos que es simétrico, útil para, por ejemplo hacer cálculos menos costosos:

$$\binom{1000}{998} = (cuenta\ desproporcionada) = \binom{1000}{2} = \frac{1000 \cdot 999}{2 \cdot 1}$$

9. Factorización y regla de Ruffini

RECUERDA LOS PASOS:

1º - Sacar **factor común** si es posible: *Ejemplo:* $3x^3+6x^2+9x = 3x(x^2+2x+3)$

2º - Mientras el **grado** del polinomio se **mayor o igual que 3** =>

=> regla de **Ruffini con los divisores** del término inde**p**endiente, hasta que alguno de resto 0.

3º - **Si** el polinomio que queda es de **grado 2**, resolver ecuación de segundo grado:

(**soluciones** x_1 **y** x_2) => **Factorización:** $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Ejemplo:
Factoriza $P(x) = 2x^5 - 12x^4 + 22x^3 - 12x^2$

1º Factor común: $P(x) = 2x^5 - 12x^4 + 22x^3 - 12x^2 = 2x^2\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)$

2º Ruffini con $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ probando con los divisores de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
(Lo intentamos hasta encontrar uno que de resto cero:)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & |\mathbf{0} \end{array}$$

Con 1 ya hemos llegado a resto 0, luego:

$P(x) = 2x^2\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) = 2x^2(x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$

3º Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$, obtenemos como raíces 2 y 3, luego:

$$P(x) = 2x^2(x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right) = \mathbf{2x^2(x-1)(x-2)(x-3)}$$

NOTA: Para factorizar polinomios de grado 2 con el coeficiente a distinto de 1

Cuando resolvemos la ecuaciones de segundo grado asociada, al escribir la forma factorizada, debemos añadir ese coeficiente multiplicando. Ejemplo:

$$2x^2 + 9x + 9 = 0 \implies x_1 = \frac{-3}{2} \quad x_2 = -3 \implies P(x) = \mathbf{2} \cdot (x + \frac{3}{2})(x+3)$$

Podémoslos introducirlo dentro de uno de los factores si conviene, para quitar denominadores: $P(x) = \mathbf{2} \cdot (x + \frac{3}{2})(x+3) \implies P(x) = (2x+3)(x+3)$