

Ejercicio 1. INTERVALOS Y CONJUNTOS NUMÉRICOS:

a) Representa en la recta real:

$$A = [-3, 2) \cup (0, +\infty)$$

$$B = \mathbb{Z} \cap (-2, 4]$$

$$C = [-1, 5) \cap (3, +\infty)$$

$$D = \mathbb{Z} \cap (0, 2]$$

$$E = \mathbb{N} \cap [(-5, 4] \cup [-3, 3])$$

$$F = [-3, 2) \cup (0, +\infty)$$

$$G = \mathbb{N} \cap (-2, 4]$$

$$H = \mathbb{Z} \cap [(-2, 4] \cup [-3, 0])$$

$$I = \mathbb{Z} \cap [(-2, 4) \cap (-3, 0)]$$

b) Describe como intervalo o unión de intervalos los conjuntos numéricos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| \geq 2\}$$

Ejemplo de solución:

$$|x - 1| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 2 \\ -x + 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow A = (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 3| \leq 3\}$$

$$\text{sol: } B = [0, 3]$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 1| > 5\}$$

$$\text{sol: } C = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 1| < 5\}$$

$$\text{sol: } D = (-2, 3)$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / |2x + 1| \leq 11\}$$

$$\text{sol: } E = [-6, 5]$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 5| \leq 3\}$$

$$\text{sol: } F = [1, 4]$$

Ejercicio 2. POTENCIAS.

Simplifica factorizando y con propiedades de las potencias:

$$\text{a) } \frac{12 \cdot 6^2 \cdot (2^{-2})^2}{9 \cdot 3^{-1} \cdot 4^2}$$

Ejemplo de solución:

$$= \frac{(2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)^2 \cdot (2^{-4})}{3^2 \cdot 3^{-1} \cdot 2^4} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot (2^2 \cdot 3^2) \cdot 2^{-4}}{3 \cdot 2^4} = \frac{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{-4} \cdot 3^3}{3 \cdot 2^4} = \frac{2^0 \cdot 3^3}{3 \cdot 2^4} = \frac{3^2}{2^4} = \frac{9}{16}$$

$$\text{b) } \frac{4^4 \cdot 8^{-1} \cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8^6} \quad \text{sol: } \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } \frac{2^{-4} \cdot (-5)^2 \cdot 3^4 \cdot 32}{125 \cdot 27^2 \cdot 9^{-1}} \quad \text{sol: } \frac{2}{5}$$

$$\text{d) } \frac{2^5 \cdot 2^{-2} \cdot 9 \cdot 3^{-4}}{2^{-2} \cdot (2^2)^2 \cdot 3 \cdot 3^{-3}} \quad \text{sol: } 2$$

$$\text{e) } \left(\frac{8}{9}\right)^{-2} \cdot \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot 9 \quad \text{sol: } \frac{2}{3}$$

Ejercicio 3. RADICALES. Simplifica las siguientes expresiones radicales:

a) $3\sqrt{24} - \frac{1}{3}\sqrt{54} + \sqrt{150}$ Ejemplo de solución:

$$= 3\sqrt{2^3 \cdot 3} - \frac{1}{3}\sqrt{2 \cdot 3^3} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 3(2\sqrt{6}) - \frac{1}{3}(3\sqrt{6}) + 5\sqrt{6} = 6\sqrt{6} - \sqrt{6} + 5\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$$

b) $(\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt[4]{3}) : \sqrt[4]{5}$ Ejemplo de solución: $= (\sqrt[4]{15 \cdot 3}) : \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{15 \cdot 3 : 5} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{2}$

c) $\frac{5}{2}\sqrt{45} - \frac{\sqrt{20}}{4} + 3\sqrt{125} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sol: $\frac{43\sqrt{5}}{2}$

d) $\sqrt[5]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ sol: 1

e) $27\sqrt{3} - 5\sqrt{27} - 9\sqrt{12}$ sol: $-6\sqrt{3}$

f) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{2}$ sol: 2

g) $8\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{32} - 12\sqrt{18}$ sol: $-9\sqrt{2}$

h) $5\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{81}}$ sol: $\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}$

i) $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$ sol: $8\sqrt{2}$

j) $(\sqrt[3]{2})^2 \sqrt[3]{2}$ sol: 2

Ejercicio 4. RACIONALIZA Y SIMPLIFICA: 1 punto

a) $\frac{1 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$ Ejemplo de solución:

$$= \frac{1 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} = \frac{4 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4}{16 - 8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$ sol: $\sqrt{2}$

c) $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}$ sol: $\frac{4\sqrt{2} + 5}{7}$

d) $\frac{6 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$ sol: $\frac{7 + 3\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{6 + 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$ sol: $1 + \sqrt{5}$

Ejercicio 5. Realiza simplificaciones utilizando las propiedades de las potencias y los radicales:

a) $\frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{16\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{12}}}}$ c) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$ d) $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{125} - \sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{a^3\sqrt{a^4\sqrt{b}}}{\sqrt{3\sqrt{a^2b}}}}$ f) $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}$

g) $\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt[5]{81\sqrt{27}}} + \sqrt{\left(\sqrt{3} + \frac{2}{1-\sqrt{3}}\right)^2}$ h) $\sqrt{3 - \left(1 + \frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{16 \cdot \sqrt{8}}}$ i) $\sqrt{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{\sqrt{4\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{2}}$

j) $\sqrt{3 \cdot \frac{\sqrt{12-\sqrt{3}}}{\sqrt{243}}}$ k) $\sqrt[9]{\frac{\sqrt{18\sqrt{45}}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}}$ soluciones: a) 8, b) 8, c) $\sqrt{2}$, d) 4, e) a^2 , f) $\frac{4\sqrt{2}+5}{7}$, g) $\frac{4}{3}$, h) $\frac{1}{2}$, i) 0, j) 1, k) $3\sqrt{3}$

Ejercicio 6. Completa las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_2 8 = _ \Leftrightarrow 2^{_} = 8$ *Ejemplo de solución:* $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
 b) $\log_{_} 27 = 3 \Leftrightarrow _{}^3 = 27$ sol: 3. c) $\log_{10} _ = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$ sol: 1000
 d) $\log_4 1/16 = _ \Leftrightarrow 4^{_} = \frac{1}{16}$ sol: -2. e) $\log_{_} 64 = 2 \Leftrightarrow _{}^2 = 64$ sol: 8
 f) $\log_{10} _ = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = _$ sol: 0.1 = 1/10

Ejercicio 7. Resuelve utilizando propiedades de los logaritmos:

a) Sabiendo que $\log_2 A = 3,5$ y $\log_2 B = -1,4$ calcular $\log_2 \left(\frac{4\sqrt{A}}{B^3}\right)$ (sol: 7.95)

b) Sabiendo que $\log_2 A = 3,5$ y $\log_2 B = -1,4$ calcular $\log_2 \left(\frac{4A^2}{\sqrt[3]{B^2}}\right)$ (sol: 9.93)

c) Sabiendo que $\log_5 A = 2,1$ y $\log_5 B = -0,4$ calcular $\log_5 \left(\frac{A^3}{125\sqrt{B}}\right)$ (sol: 3.5)

d) Calcula el valor de x en: $\log 2^{x-1} = 7$ (sol: $\frac{7}{\log 2} + 1$)

e) Calcula el valor de x en: $\log 3^{x+1} = 10$ (sol: $\frac{10}{\log 3} - 1$)

f) Calcula el valor de x en: $\ln x + \ln 4 - 2 \ln 5 = \ln 2$ (sol: $\frac{25}{2}$)

g) Calcula el valor de x en: $\ln x + \ln(x + 3) = 2 \ln(x + 1)$ (sol: 1)

h) Calcula el valor de x en: $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$ (sols: $\frac{1}{3}$ y 3)

i) Desarrolla $\log \frac{x^2 \cdot y}{100\sqrt{z^3}}$ j) Desarrolla $\log \frac{x^2 \cdot \sqrt{y}}{1000z}$

Ejercicio 8. Igualdades notables y Binomio de Newton:

8a. Desarrolla

1) $(2x + 5)^2 =$ 2) $(3x - 4)^2 =$ 3) $(5x + 2)(5x - 2) =$ 4) $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 =$

8b. Factoriza

1) $4x^2 + 20x + 25$ 2) $9x^2 - 24x + 16$ 3) $25x^2 - 4$ 4) $\frac{1}{4}x^2 + 4x + 16$

8c. Desarrolla

1) $(x + 2)^4$ sol: $= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$
 2) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^5$ sol: $= 243x^5 - \frac{405}{2}x^4 + \frac{270}{4}x^3 - \frac{90}{8}x^2 + \frac{15}{16}x - \frac{1}{32}$
 3) $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^3$ sol: $= 8x^3 + 9x^2 + \frac{27}{8}x + \frac{27}{64}$

8d. Simplifica factorizando (factor común e identidades notables)

1) $\frac{4x^2 + 8x + 4}{2x + 2}$ sol: $2(x + 1)$ 2) $\frac{x^4 - 16}{x^3 - 4x}$ sol: $\frac{x^2 + 4}{x}$ 3) $\frac{9x^2 - 12x + 4}{6x - 4}$ sol: $\frac{3x - 2}{2}$

Ejercicio 9. Factorización y Ruffini. Factoriza los siguientes polinomios:

1) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 8x^2$ (Sol: $x^2(x + 1)(x - 2)(x - 4)$)
 2) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ (Sol: $(x + 3)^2(x - 3)$)
 3) $P(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$ (Sol: $(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4)$)
 4) $P(x) = x^3 - 15x^2 + 75x - 125$ (Sol: $(x - 5)^3$)
 5) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 21x$ (Sol: $x(x - 3)(x + 7)$)
 6) $P(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ (Sol: $(x + 3)(x - 3)(x - 5)$)
 7) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ (Sol: $(x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 3)$)
 8) $P(x) = 2x^4 - 128x^2$ (Sol: $2x^2(x + 8)(x - 8)$)
 9) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ (Sol: $(x - 1)(x + 1)(x + 1)(x + 2)$)
 10) $P(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ (Sol: $(x + 2)^4$)
 11) $P(x) = 5x^4 - 10x^3$ (Sol: $5x^3(x - 2)$)
 12) $P(x) = x^5 - 39x^3 + 70x^2$ (Sol: $x^2(x - 2)(x - 5)(x + 7)$)
 13) $P(x) = 3x^6 - 6x^5 + 3x^3 - 6x^3$ (Sol: $3x^3(x - 2)(x^2 + 1)$)
 14) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9$ (Sol: $(x - 1)(x + 3)(2x + 3)$)

Ejercicio 10. Fracciones algebraicas. Opera y simplifica.

a) $\frac{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}{x^3 + x^2 - 9x - 9}$ sol: $\frac{x + 5}{x + 3}$ b) $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ sol: $\frac{x - 2}{x + 2}$
 c) $\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2x + 1}{x^3 - x}$ sol: $\frac{2x^2 - 2x - 2}{x^3 - x}$ d) $\frac{2}{x - 5} + \frac{2x - 20}{x^2 - 25} - \frac{3}{x + 5}$ sol: $\frac{1}{x - 5}$
 e) $\frac{x^2 - 9}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x + 3}$ sol: $x^2 - 4x + 3$ f) $\frac{3x - 6}{x - 1} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$ sol: $\frac{3x + 3}{x - 2}$