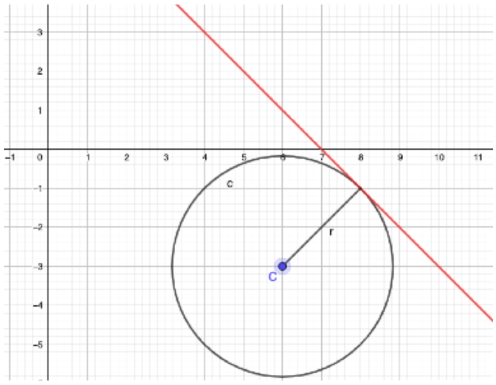
EJERCICIO 2 - SOLUCIÓN

2.1. Una circunferencia de centro O(6,–3) es tangente a la recta de ecuación r: x + y – 7 = 0.
a) Calcula el radio de la circunferencia
b) Obtén la ecuación de la circunferencia en forma desarrollada.
c) Obtén las coordenadas del punto de tangencia.
d) Determina la posición relativa del punto (6,3) respecto a la circunferencia.

En los ejercicios de geometría **conviene tener una idea gráfica de la situación**. Representar la recta tiene que saliros con mucha soltura, dando valores (x=0 y=7, y=0 x=7 => (0,7),(7,0), y de la circunferencia sabemos el centro y que es tangente, así que tendríamos el dibujo:



a) El radio de la circunferencia se obtiene calculando la distancia del centro (6,-3) a la recta:

$$R = dist(C, r) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 - 3 - 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

b) Escribimos la ecuación reducida de la circunferencia y desarrollamos:

$$(x-6)^2 + (y+3)^2 = (2\sqrt{2})^2 \implies x^2 - 12x + 36 + y^2 + 6y + 9 = 8 \implies$$

$$\implies x^2 + y^2 - 12x + 6y + 37 = 0$$

c) Para obtener las coordenadas del punto de tangencia tenemos dos opciones. La idea más directa es resolver el sistema formado por C y r, la otra opción sería construir una recta pasando por C perpendicular a r, y resolver el sistema formado por esas rectas. Solo detallo la opción 1:

Resolvemos el sistema formado por C y r por sustitución.

$$\left.\begin{array}{r} C : x^2 + y^2 - 12x + 6y + 37 = 0 \\ r : x + y - 7 = 0 \end{array}\right\}$$

Despejamos y en r:

$$y = 7 - x$$

Sustituimos en C:

$$x^2 + (7 - x)^2 - 12x + 6(7 - x) + 37 = 0 \implies$$
$$\implies x^2 + 49 - 14x + x^2 - 12x + 42 - 6x + 37 = 0 \implies$$
$$\implies 2x^2 - 32x + 128 = 0 \implies x = 8,\ y = -1$$

Luego el punto de corte (punto de tangencia) está en el punto (8,–1)

d) Para calcular la posición relativa de un punto con respecto a la circunferencia, lo más sencillo es calcular la distancia entre esos puntos, y compararla con el radio:

DISTANCIA: $dist((6,3),(6,-3)) = 6$
(la distancia es en vertical, basta con restar 3–(–3)=6)

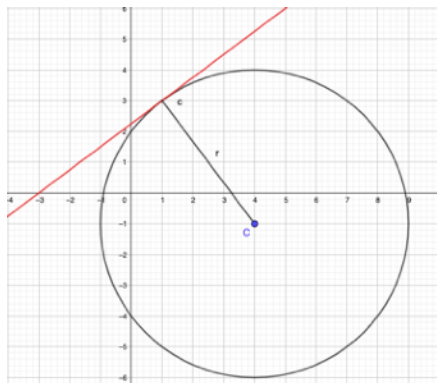
RADIO: $R = 2\sqrt{2} = 2{,}83$

dist>RADIO => Punto exterior a la circunferencia (era bastante fácil de ver que este iba a ser el resultado en el dibujo)

2.2 Una circunferencia de centro O(4,-1) es tangente a la recta de ecuación r: 3x – 4y + 9 = 0.

a) Calcula el radio de la circunferencia
b) Obtén la ecuación de la circunferencia en forma desarrollada.
c) Obtén las coordenadas del punto de tangencia.
d) Determina la posición relativa del punto (6,3) respecto a la circunferencia

En los ejercicios de geometría **conviene tener una idea gráfica de la situación**. Representar la recta tiene que saliros con mucha soltura, dando valores (x=0 y=9/4=2,25, y=0 x=-3 => (0, 2,25),(-3,0), y de la circunferencia sabemos el centro y que es tangente, así que tendríamos el dibujo:



a) El radio de la circunferencia se obtiene calculando la distancia del centro (4,–1) a la recta:

$$R = dist(C,r) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot (-1) + 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

b) Escribimos la ecuación reducida de la circunferencia y desarrollamos:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5^2 \implies x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 25 \implies$$

$$\implies x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$$

c) Para obtener las coordenadas del punto de tangencia tenemos dos opciones. La idea más directa es resolver el sistema formado por C y r, la otra opción sería construir una recta pasando por C perpendicular a r, y resolver el sistema formado por esas rectas. Solo detallo la opción 1:

Resolvemos el sistema formado por C y r por sustitución.

$$\left.\begin{array}{r} C: x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0 \\ r: 3x - 4y + 9 = 0 \end{array}\right\}$$

Despejamos y en r:

$$y = \frac{3x+9}{4}$$

Sustituimos en C:

$$x^2 + \left(\frac{3x+9}{4}\right)^2 - 8x + 2 \cdot \frac{3x+9}{4} - 8 = 0 \implies$$
$$\implies \frac{25x^2 - 50x + 25}{16} = 0 \implies x^2 - 2x + 1 = 0 \implies$$
$$\implies x = 1, \, y = 3$$

Luego el punto de corte (punto de tangencia) está en el punto (1,3)

d) Para calcular la posición relativa de un punto con respecto a la circunferencia, lo más sencillo es calcular la distancia entre esos puntos, y compararla con el radio:

DISTANCIA:

$$dist((6{,}3),(4,-1)) = \sqrt{(6-4)^2 + (3-(-1))^2} =$$
$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 4.47$$

RADIO: $R = 5$

dist<RADIO => Punto interior respecto de la circunferencia (era bastante fácil de ver que este iba a ser el resultado en el dibujo)