(48º) La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja se puede aproximar por una variable normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros. (39)

a) Determine el tamaño mínimo de muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 8 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días, calcule la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros

JUL-2020

Consideramos:

X = "producción diaria de leche" $\in N(\mu, 50)$

a) Para calcular el tamaño mínimo de la muestra $n \rightarrow$ Error $= E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, entonces se cumple:

$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow$ la amplitud:

$$2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \text{Error} \leq 8 \Rightarrow \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 4$$

Como el nivel de confianza $= 1 - \alpha = 0'95$

nivel de significación $= \alpha = 0'05 / \alpha/2 = 0'025$

Para $z_{\alpha/2} = z_{0'025} \Rightarrow 0'95 + 0'025 = 0'975$, entonces

$$\boxed{z_{\alpha/2} = 1'96}$$

Entonces: Error $= E = 1'96 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} \leq 4$

$$1'96 \cdot \frac{50}{4} \leq \sqrt{n} \Rightarrow n \geq \left(1'96 \cdot \frac{50}{4}\right)^2$$

$$\boxed{n \geq 600'25}$$

Por lo tanto el tamaño mínimo de la muestra es 601 días.

1'75 ptos

b) Si $n = 25$ días

$X \in N(\mu, \sigma) = N(950, 50)$, la media muestral:

$$\bar{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(950, \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(950, 10)$$

$$P(\bar{X} \leq 930) = P\left(Z \leq \frac{930-950}{10}\right) = P(Z \leq -2) =$$

$$= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) =$$

$$= 1 - 0'9772 = \boxed{0'0228}$$

Entonces, la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros es de 0'0228.

1'58 ptos

49º Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras entrevistar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69'7% y el 90'3%?

b) Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionados a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de $n = 144$ de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75%. 35

SEP 2020

Sea p = "proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra".

Muestra $\Rightarrow n = 100$ personas.

$\hat{p} = 0'80$.

a) El intervalo de confianza es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\,,\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right) =$$

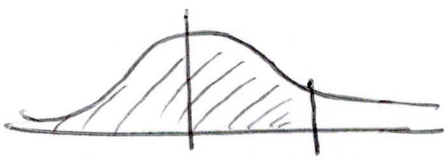
$$= (0'697, 0'903) \Rightarrow$$

$$\hat{p} + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0'903$$

$$0'8 + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{0'8\cdot 0'2}{100}} = 0'903 \Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot 0'04 = 0'103$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{0'103}{0'04} = 2'575 \Rightarrow \text{Según la tabla:}$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0'9950$$



$z_{\alpha/2} = 2'575$

$\alpha/2 = 0'005 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0'01}$ = Nivel de significación

Entonces nivel de confianza $= 1 - \alpha = 0'99$.

Entonces se puede hacer la afirmación con un nivel de confianza del 99%.

1'5 ptos

b) Si se sabe que $\hat{p} = \frac{8}{10} = 0'80$

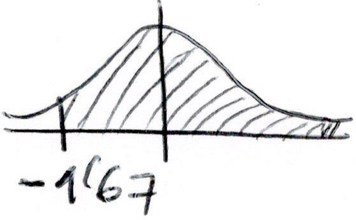
muestra de tamaño $n = 144$

$\hat{p}$ = proporción muestral $\in N(\mu, \sigma) =$

$= N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = N\left(0'80, \sqrt{\frac{0'80 \cdot 0'20}{144}}\right) =$

$= N(0'80, 0'03)$

$P(\hat{p} > 0'75) = P\left(\hat{p} > \frac{0'75 - 0'80}{0'03}\right) = P(\hat{p} > -1'67) =$



$= P(\hat{p} < 1'67) = \boxed{0'9525}$

Entonces, la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75% para muestras de $n = 144$ personas es 0'9525. 1'83 pts