38º Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $B^t \cdot A \cdot B$.

b) Calcula la inversa de la matriz $A-I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despeja la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcúlala.

$\boxed{\text{JUN 2019}}$

a) Calculamos:

$$[B^t \cdot A] B = \left[\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&5\\1&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}13&5&3\\5&2&1\\3&1&1\end{pmatrix}$$

b) $A-I=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$. Calculamos A^{-1}:

① $|A-I| = |C| = \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} = -1$

② $\text{Adj}(C) \rightarrow c_{11} = +1 \quad c_{21} = -1$

$c_{12} = -1 \quad c_{22} = +0$

③ $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot[\text{Adj}(C)]^t = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

c) Despejamos $X \rightarrow A \cdot X - B = X$

$A \cdot X - X = B$

$(A-I_2)\cdot X = B$

$(A-I_2)^{-1}\cdot(A-I_2)\cdot X = (A-I_2)^{-1}\cdot B$

$\boxed{X = (A-I_2)^{-1}\cdot B}$

$$X = \begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$