TEMA 8: <u>FUNCIONES</u>

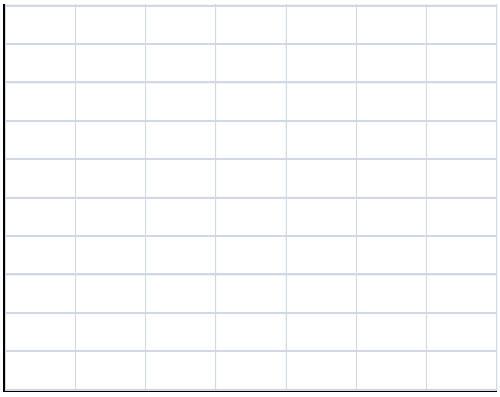
Una **función** es una relación entre dos magnitudes, *x* e *y*, que asigna a cada valor de *x,* un único valor de *y.* Estas magnitudes reciben el nombre de *variables,* siendo *x* la *variable independiente,* e *y* la *variable dependiente.*

Para establecer correctamente la relación que supone una función se pueden utilizar varios métodos:

- <u>Mediante un enunciado</u>: por ejemplo "el coste de las llamadas es de 20 céntimos el minuto". Di cuáles son las variables……………………………………………………………………
- <u>Mediante una tabla</u>: del ejemplo anterior:

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6
Coste (céntimos)	20	40	60	80	100	120

- <u>Mediante una fórmula:</u> Si C es el coste y t el tiempo, la expresión sería C = 20·t
- <u>Mediante una gráfica:</u> El tiempo t está en el eje horizontal, y el coste C en el vertical. Observa cómo cada punto de la recta nos indica el coste de una llamada según su duración.



Para definir correctamente una función es muy importante precisar el conjunto de valores que puede adoptar la variable independiente x. A este conjunto se le llama **dominio.**

FUNCIONES POLINÓMICAS DE 1^{ER} GRADO. LA RECTA

- <u>La función constante</u>: y = m, donde m es una constante (un número real)
- <u>La función lineal o de proporcionalidad directa</u>: y = mx, donde m es la constante de proporcionalidad)
- <u>La función lineal</u>: y = mx + n, donde m es la PENDIENTE y n el valor de la ordenada en el origen

Ejercicio 1: En las siguientes funciones de proporcionalidad di cuál es la pendiente y su significado

a) Coste de x kilos de arroz: y = 2'5 x
b) Coste de x litros de leche: y = 0'9x
c) Centímetros que hay en x metros: y = 100x
d) Peso de x kilos de agua: y = x
e) Kilómetros recorridos en bicicleta durante x horas: y = 8x

Ejercicio 2: Representa las rectas correspondientes a los apartados a) y d)

Ejercicio 3: En un contrato de trabajo temporal ofrecen dos modalidades de salario:

A→10 € por hora de trabajo

B→30 € diarios más 4€ por hora de trabajo

a) Obtén en cada caso la ecuación de la función que dice lo que se cobra cada día según las horas trabajadas.
b) Representa las dos funciones en los mismos ejes.
c) Analiza cuás de las dos opciones es más ventajosa para el trabajador, según las horas que se trabaje.

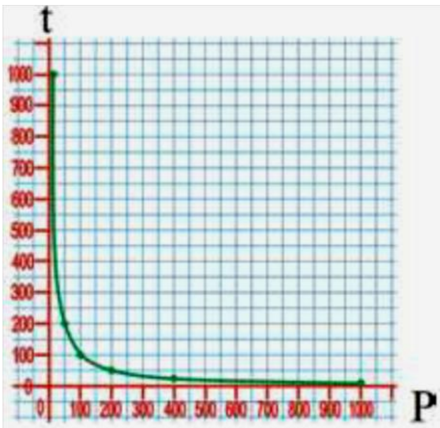
Ejercicio 4: Un camión cisterna pesa, vacío, 5000 kg, y tiene una capacidad de 10000 L. Se llena de agua con un caudal de 200 litros por minuto.
a) ¿Qué cantidad de agua habrá en el camión a los 10 minutos de comenzar el llenado?
b) ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse?
c) Escribe la ecuación de la función tiempo → cantidad de agua. Represéntala.
d) Como un litro de aguas pesa 1 kg, ¿cuánto pesará el camión a los 20 minutos de iniciarse el llenado?
e) Escribe la ecuación de la función que nos permite saber el peso del camión mientras se está llenando. Represéntala en los mismos ejes que la función del apartado c)

LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA. LA HIPÉRBOLA

Si hay que realizar un determinado trabajo, cuanto mayor sea la potencia menor será el tiempo que se tarda en hacerlo, como ya sabemos. Podemos concretar un poco más: si la potencia es el doble, el tiempo empleado será la mitad; si la potencia es el triple, el tiempo será tres veces menor, y así sucesivamente. Cuando ocurre esto, decimos que esas dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Ejemplo 1. Hay que realizar un trabajo de 10 000 J. ¿Cuánto tiempo tardaremos en hacerlo? Depende de la potencia que utilicemos; vamos a hacer una tabla tiempo/potencia (despejamos el tiempo de la fórmula de la potencia: P = W/t → t = W/P)

Potencia (W)	Tempo (s) [t = W/P]
10	1000
100	100
200	50
400	25
1000	10



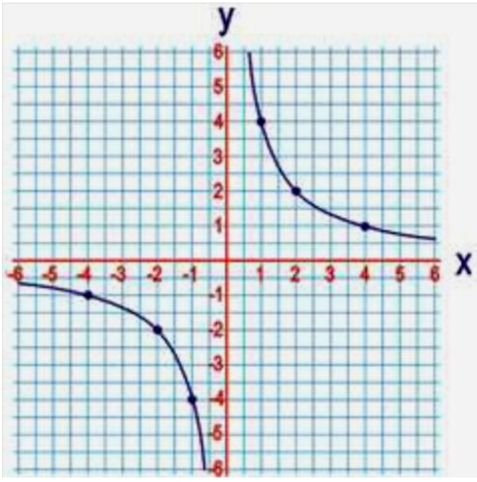
Relaciones de este tipo entre dos magnitudes son frecuentes en ciencias y en la vida cotidiana.

Matemáticamente podemos escribirlas de forma general con la expresión: – Donde k es un número fijo que se llama constante de proporcionalidad.

En general, la variable x puede tomar también valores negativos. Fíjese que, de la expresión anterior de la función, se deduce que el producto de las dos variables da siempre el mismo resultado: $x \cdot y = k$

Ejemplo 2. Representamos gráficamente la función $y = 4/x$. Hacemos primero una tabla de valores x-y y luego representamos

x	y
-4	-1
-2	-2
-1	-4
1	4
2	2
4	1

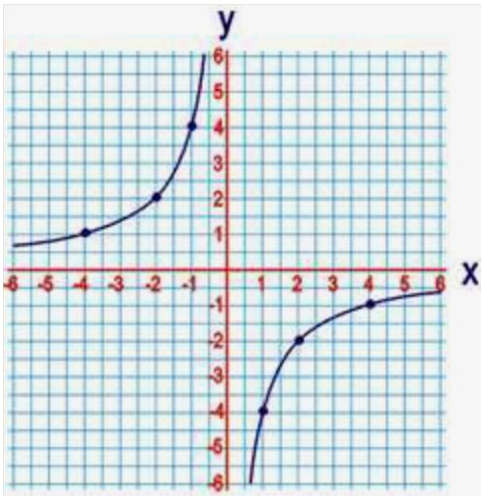


La representación grafica es una curva que se llama **hipérbola.** Tiene dos ramas que, en este caso, están en el primero y en el tercer cuadrante de los ejes de coordenadas. Observe que la curva no corta los ejes ni tampoco pasa por el origen de coordenadas; las dos ramas se pueden acercar mucho a los ejes, pero sin tocarlos: estas son **rectas asíntotas**.

Una recta es asíntota a una curva cuando ésta se acerca indefinidamente a la recta pero sin tocarla nunca. Si la constante k de proporcionalidad es positiva, como en la función anterior, la función es decreciente: al aumentar x, disminuye y. Si sigues la curva de izquierda a derecha, verás que “va bajando”, es decreciente.

Veamos cómo es la gráfica en el caso de ser k negativa. Sea la función $y = -4/x$:

x	y
-4	1
-2	2
-1	4
1	-4
2	-2
4	-1



Ya ves que si k es negativa, las dos ramas de la hipérbola están en los cuadrantes 2º y 4º, y que la función es siempre creciente. En todos los casos, la grafica es simétrica respecto del origen de coordenadas: a cada punto de coordenadas (x, y) le corresponde otro simétrico de coordenadas (-x, -y). Si la grafica pasa por el punto (3, -6), entonces también pasa por el (-3, 6).

Actividades propuestas

5. Represente gráficamente las funciones de proporcionalidad inversa siguientes:

a) y = 6/x

b) x.y = -1 (tendrás que despejar y)

6. Cuatro amigos doblan las portadas de unos CD; van a tardar 50 minutos. ¿Cuánto tardarían si les ayudasen dos amigas más? ¿Y si uno se tuviese que marchar?

7. Dos cintas transportadoras de maletas necesitan 30 minutos para cargarlas en un avión. ¿Cuánto tardarían cinco cintas? ¿Y una sola cinta?

8. En una granja hay 60 vacas. Tienen pasto para alimentarlas durante 20 días. Si venden 10 vacas y mueren 5, ¿cuántos días podrán comer las vacas que quedan

9. Determine si la tabla de datos corresponde a una función de proporcionalidad inversa (los datos corresponden al número de operarios que hacen una obra):

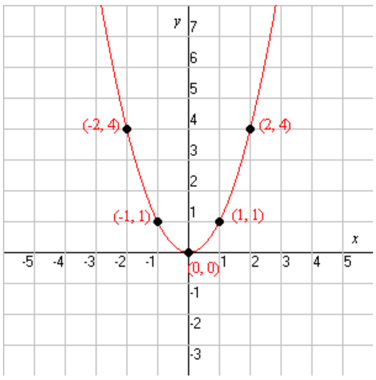
X	Y
100	10
200	5
300	3
400	2
500	1

10. Con los percebes que tenemos para la fiesta, doce invitados pueden comer como máximo200 g cada uno. Si aparecen tres invitados más, cada uno de ellos podrá comer:

LA FUNCIÓN POLINÓMICA DE 2º GRADO: LA PARÁBOLA

La representación gráfica de una ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$ se llama **parábola.**
Representemos $y = x^2$

x	**y**
0	**0**
1	1
-1	1
2	4
-2	4



Observamos las siguientes características:

_ **VÉRTICE** el punto (0,0), que es un mínimo, pues la función pasa de decrecer a crecer en ese punto.

Para calcularlo: x =—, y = f(x)

_ **Un eje de simetría:** Es la recta paralela al eje Y que pasa por el vértice: x =0

_ Si a>0 la parábola es convexa (un "valle")

Si a<0 la parábola es cóncava (una "montaña")

Ejercicio: Representa $y = 3x^2$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$. Conclusiones

Cuando nos piden que representemos una parábola debemos calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes: con el eje X, a partir de $y = 0$, y con el eje Y, a partir de $x = 0$

Ejercicio 11: Representa $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 3x + 2$, $y = -x^2 + 2x + 3$

Ejercicio 12: Si una piedra se arroja verticalmente desde el piso hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/seg, entonces $S(t) = -5t^2 + 10t$, donde S metros es la distancia de la piedra desde el punto de partida a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. Hallar :

a) ¿A qué altura subirá?

b) ¿Cuántos segundos tardará en caer al suelo?

c) ¿Cuántos segundos tardará en alcanzar el punto más alto?

d) ¿Qué altura alcanzará a los 0,5 segundos?

e) Una gráfica que represente la variación de la distancia en función del tiempo.

Ejercicio 13: Los registros de temperatura tomados entre las 0 horas y las 24 horas en una zona rural se ajustan a la función $T(x) = —— (x - 12)^2 + 10$, donde T es la temperatura en grados centígrados y x es la hora del día.

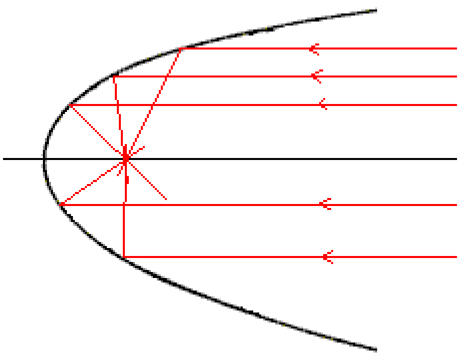
a) ¿cuál fue la temperatura máxima?

b)¿a qué hora se registró?

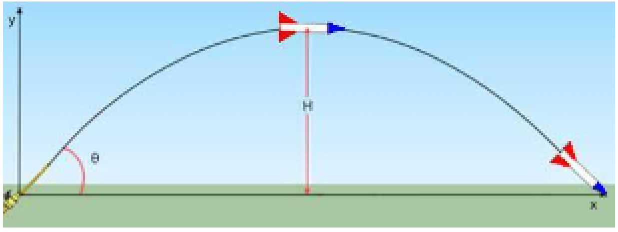
c) ¿cuándo la temperatura fue de cero grados?

d) ¿qué temperatura había a las 3 de la tarde?

PROPIEDADES DE LA PARÁBOLA



Un ejemplo de parábola es la trayectoria que sigue un proyectil al caer, el cual se mueven bajo la influencia de la gravedad. También los chorros de agua que salen de un surtidor tienen forma parabólica.



La forma de las parábolas y sus caracteristicas las hace utiles como reflectores de lámparas y faros de automóviles, en antenas se satélites, espejos solares, hornos solares, telescopios y algunos micrófonos utilizados en los deportes


En la construcción de edificios se utilizan formas parábolicas para realzar la belleza de las infraestructuras y dar mayor soporte a las mismas.

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y SU GRÁFICA

Analicemos las siguientes situaciones:

1_ Tenemos una hoja de papel y la doblamos por la mitad. Después la plegamos una vez más y otra más, hasta tener el papel doblado cuatro veces. Si este proceso lo repetimos 40 veces, ¿cuánto piensa que tendría de grosor? ¿Menos de un metro, entre 1 y 10 metros, más de 10 metros? Se sorprendería al saber que no es posible realizar 40 dobleces, y que el grosor sería suficiente para llegar de la Tierra a la Luna.

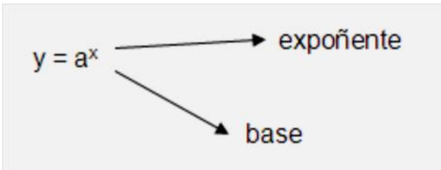
Esto supone un crecimiento exponencial, duplicación, reduplicación y de nuevo duplicación.
Nuestro pensamiento es lineal y pensar de modo exponencial es muy difícil.

2_ Una colonia de células de fermentos, en la que cada célula se duplica cada 10 minutos, crece de modo exponencial. Por cada célula, cada 10 minutos, habrá dos nuevas células. Después de otros 10 minutos, habrá cuatro células, 10 minutos después habrá ocho células y así sucesivamente; a más células de fermentos, más células nuevas habrá cada 10 minutos.

3_ Una leyenda India cuenta que un rey le ofreció al inventor del ajedrez una recompensa por la invención de tan entretenido juego, y el Bramán solicitó que le fuese concedido un grano de arroz por el primero cuadro, dos granos por el segundo, cuatro por el tercero y así doblando la cantidad hasta llegar a la totalidad de los 64 cuadrados que tiene el ajedrez. El rey accedió de inmediato, sin caer en la cuenta de la cantidad que tenía que sacar de sus arcas. Hagamos una estimación, completando la tabla siguiente:

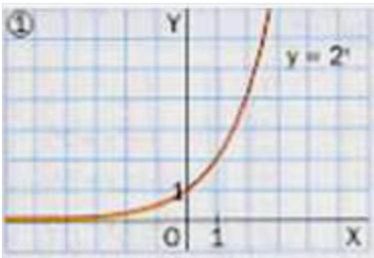
Cuadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Granos	2	$4=2^2$	$8=2^3$	$16=2^4$	$32=2^5$					

Observemos que por el cuadro 10 tendría que recibir: 210 = 1 024 granos de arroz.
Y por el cuadro 30 tendría 230 = 1 073 741 824 granos de arroz.
Para sorpresa del rey, fue incapaz de cumplir la promesa, ya que no tenía arroz suficiente en su reino.
Estamos ante una función llamada exponencial y tiene por expresión:



El caso particular anterior es una función exponencial de la expresión $y = 2^x$, y por lo tanto de base 2.
Antes de representar gráficamente esta función, debemos saber que:
_ Su dominio es toda la recta real. Los valores de la variable independiente (x) que podemos usar.
_ Su recorrido son el conjunto de los números reales positivos. Los posibles resultados que obtenemos (y).
_ Su gráfica pasa siempre por el punto (0,1).
_ Es creciente y continua en todo su dominio.
Veamos la tabla de la función y =2x y su representación gráfica:

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	-



Ejercicio 14: Un ordenador se deprecia de forma gradual y constante a razón de un 25 % anual. Si hoy compramos un ordenador por 1 200 euros:

_ ¿Cuál será su valor dentro de tres años?
_ ¿Cuál será su valor en seis meses?

Ejercicio 15: Expresa mediante una función las relaciones descritas en 1_, 2_, 3_ Haz las gráficas