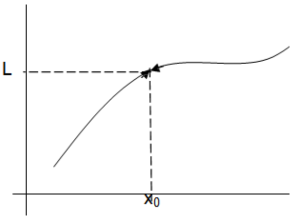
Tema 9. Limite de funciones. Continuidad

1. Límite de una función. Funciones convergentes

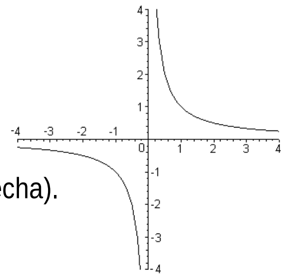
La idea intuitiva de límite de una función en un punto es fácil de comprender: es el valor hacia el que se aproxima la función cuando la variable independiente, x, se aproxima a dicho punto.

Definición: Matemáticamente una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0, y se denota $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si se cumple que cuanto más se acerca la x a x_0 (tanto a la derecha, x_0^+, como a la izquierda, x_0^-) el valor de la función, f(x) más se aproxima a L



Una función f(x), se dice que es convergente en x_0 si, existe el límite $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y es distinto de $\pm\infty$.

En caso contrario, la función se dice que es **divergente** (fig. derecha).



2. Límites laterales

Existen funciones definidas a trozos, son aquellas que están definidas de diferente manera a lo largo de distintos intervalos de la recta real. En estas funciones, cuando queremos estudiar el límite en los puntos donde cambia la expresión analítica, es necesario calcular los límites laterales, viéndose así la tendencia de la función a ambos lados del punto.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la izquierda, y se denota $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, si se cumple que cuando nos acercamos al valor de x_0 para x menores que x_0 la función se acerca a L.

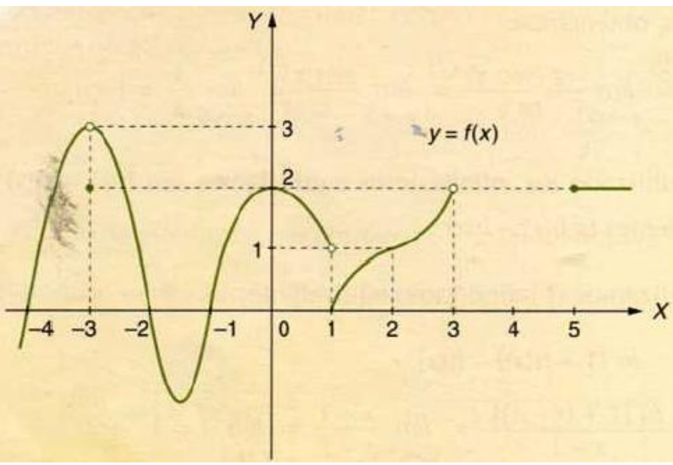
Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la derecha, y se denota $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, si se cumple que cuando nos acercamos al valor de x_0 para x menores que x_0 la función se acerca a L.

Teorema: El límite de una función f(x) en x_0 existe si, y sólo si, existen los límites laterales y éstos coinciden:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

En este ejemplo se pueden ver las distintas posibilidades que se pueden dar con límites en una función:



Los límites laterales en x= -3 coinciden, pero no son iguales a la imagen de dicho valor para la función:

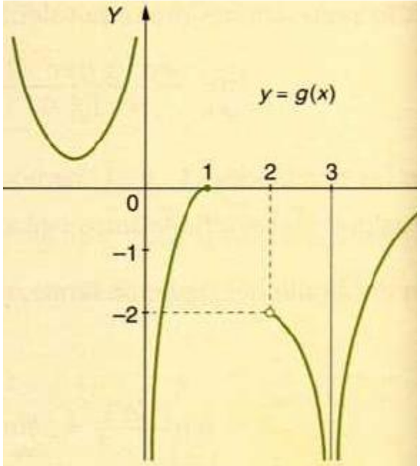
$\lim_{x \to -3} f(x) = 3$ f(-3)=2

En x=1, existen los dos límetes laterales, pero son distintos.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1, \; \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0, \; \lim_{x \to 1} f(x) = no \;\; existe$

En x= 3 sólo existe uno de los límites laterales:

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2, \; \lim_{x \to 3^+} f(x) = no\, existe, \; \lim_{x \to 3} f(x) = no\, existe$



Límites infinitos:

$$\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

Límites en el infinito:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$$

3.Operaciones con límites:

Si f y g son dos funciones y k es un número real, se cumplen las siguientes reglas:

1ª) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2ª) $\lim\limits_{x\to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

3ª) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4ª) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

5ª) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Al haber límites cuyo valor es ∞ y -∞, tendremos que ver cómo operan los números reales con ±∞.

Suma y diferencia:

1) $\forall k \in \mathbb{R}\ k \pm \infty = \pm\infty$

2) $\infty + \infty = \infty$

3) $-\infty - \infty = -\infty$

Producto:

1) $\forall k \in \mathbb{R}^+$ (k>0) $k \cdot \infty = \infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x = +\infty$

2) $\forall -k \in \mathbb{R}^-$ (-k<0) $k \cdot \infty = -\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} -3x = -\infty$

3) $\forall k \in \mathbb{R}^+$ (k>0) $k \cdot (-\infty) = -\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to -\infty} 3x = -\infty$

4) $\forall -k \in \mathbb{R}^-$ (-k<0) $-k \cdot (-\infty) = \infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to -\infty} -3x = +\infty$

Cociente:

1) $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dfrac{k}{\pm\infty} = 0$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

2) $\forall k \in \mathbb{R}^+$ $\dfrac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x}{4} = -\infty$

3) $\forall -k \in \mathbb{R}^-$ $\dfrac{\pm\infty}{-k} = \mp\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{-4} = -\infty$

Exponente:

1) $\forall k \in \mathbb{R}\ k>1\ \ k^{+\infty} = +\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x = +\infty$

2) $\forall k \in \mathbb{R}\ 0<k<1\ \ k^{+\infty} = 0$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0$

3) $\forall k \in \mathbb{R}\ k>1\ \ k^{-\infty} = 0$ →ejemplo $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x = 0$

4) $\forall k \in \mathbb{R}\ 0<k<1\ \ k^{-\infty} = +\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} = +\infty$

Indeterminaciones:

Operación	Indeterminación
Sustracción	$\infty - \infty$
Multiplicación	$\infty \cdot 0$
División	$\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$
Elevación a potencia	$1^\infty, \infty^0, 0^0$

3.1 Resolución de límites sin indeterminaciones.

En este apartado vamos a ver como se resuelven los límites en los que no hay indeterminaciones. Es sencillo sólo consiste en sustituir el valor de la x por el valor del límite y operar conforme a lo explicado en el apartado anterior. Veamos algunos ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{x+1} = 2^{\infty+1} = 2^{\infty} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^2-100}{2x+1} = \dfrac{0}{21} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3}{-2} = \dfrac{\infty-3}{-2} = \dfrac{\infty}{-2} = -\infty$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x+1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\infty+1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\infty} = 3^{\infty} = \infty$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} (1)^{2x+1} = (1)^{\infty+1} = 1$ *nota: la indeterminación 1^{∞} es cuando tiende a 1, no cuando es 1.*

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2+3}\right)^{2x} = 1^{\infty}\,(ind)$

Ejercicio 1: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x}{x-5}$ c) $\lim\limits_{x\to 7} \sqrt{3x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x+3)$ e) $\lim\limits_{x\to 0,1} \log_{10} x$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+4x+7$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2-4x+7$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2-4x+7$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2+4x+7$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+x^3-3$ k) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+x^3-3$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x}$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x^2}$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-1}{-5}$ ñ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-1}{-5}$

3.2 Resolución indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$

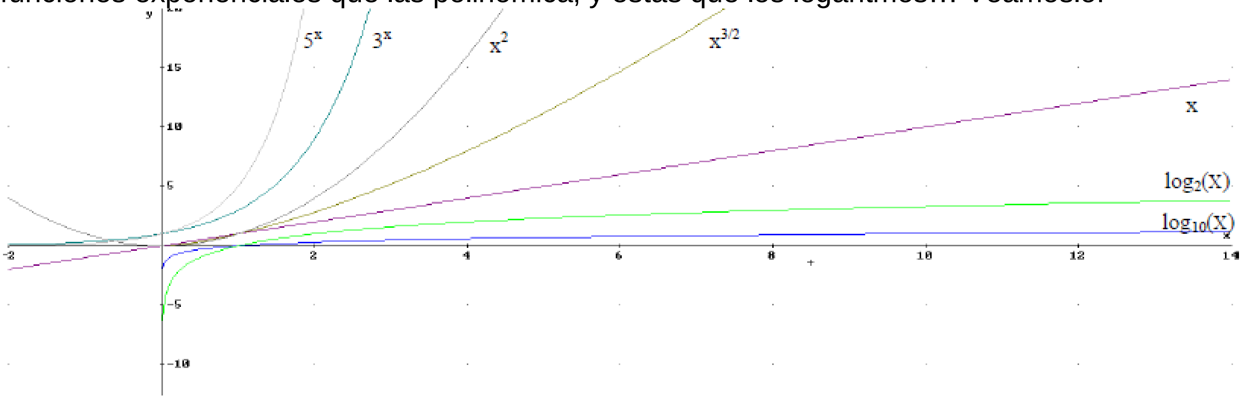
Para resolver estas indeterminaciones tenemos que comparar el crecimiento de las funciones, de tal forma que prevalece aquella cuya tendencia a $+\infty$ o $-\infty$ sea mayor al resto.

Orden de crecimiento a ∞ (de menor a mayor):

$\log_{a1}(x)<\log_{a2}(x)<x<x^{3/2}<x^2<\ldots<x^n<(b_2)^x<(b_1)^x$

donde $a_1>a_2$ y $b_1>b_2$. Tanto a como b mayores que 1

Todas estas funciones tienden a Todas estas funciones tienden a ∞ pero crece mucho más rápido las funciones exponenciales que las polinómica, y estas que los logaritmos… Veámoslo:



Ejemplos:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2x^2 - \log_3(x) = \infty - \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2^x + \log_3(x) = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} - 2^x = -\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2^x + \log_3(x) = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} - 2^x = -\infty$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty} x^{103} - 3^x + 2^x = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} - 3^x = -\infty$$

3.3 Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Las situaciones más simples en las que aparece es al calcular los límites infinitos de fracciones polinómica. Estas indeterminaciones se resuelven dividiendo el numerador y el denominador por la máxima potencia de x del denominador:

Ejemplos: $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x^2 - 3x + 2}{x^3}}{\frac{x^3 + 3x - 5}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3 + 3x + 2}{-x^2 + 3x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x^3 + 3x + 2}{x^2}}{\frac{-x^2 + 3x - 5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{-1 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2 + 3x + 2}{-2x^2 + 3x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-3x^2 + 3x + 2}{x^2}}{\frac{-2x^2 + 3x - 5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Conclusión:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0}$$

a) n>m → $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0} = 0$

b) m>n → $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} -\infty & \text{signo(P(x))} \neq \text{signo(Q(x))} \\ +\infty & si\,\text{signo(P(x))} = \text{signo(Q(x))} \end{cases}$

c) $m=n$ → $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0} = \frac{a_n}{a_n}$

Ejercicio 2: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{3x - 5}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 5}$ d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3}{-x^3}$

3.4 Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Aparece este tipo de límites principalmente en 2 casos diferentes:

1) Cociente de funciones polinómica: Se resuelven descomponiendo factorialmente numerador y denominador (aplicando Ruffini con raíz la del límite, ya que es el valor donde sea anulan los dos polinomios), simplificando los factores comunes.

Ejemplos:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-7x^2+14x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2-5x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x^2-5x+4)}=\frac{5}{-2}$$

$$b)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+2x+1)}{(x+1)(x^2-x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+2x+1)}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x-2)}=\frac{0}{-3}=0$$

2) Cociente con funciones racionales: Se resuelven multiplicando numerador y denominado por la expresión conjugada de la que lleva raíz,(cambiando el signo):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(\sqrt{x+4}+2)}{1}=-4$$

Ejercicio 2: Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

3.5 Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$

Este límite puede ser +∞, -∞ o no existir por ser los límites laterales diferentes. Se calcula a partir de los límites laterales (son siempre asíntotas verticales):

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0}\ \begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0^-}=-\infty\end{cases}\ \textit{no existe el límite}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0}\ \begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0^+}=+\infty\end{cases}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=+\infty$$

3.6 Resolución de indeterminaciones del tipo 0·∞

Se resuelven transformándolas en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3}{\sqrt{x^4-2}}\cdot(2x-3)=0\cdot\infty=\lim_{x\to -\infty}\frac{3(2x-3)}{\sqrt{x^4-2}}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to -\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{6}{x}=0$$

3.7 Resolución de indeterminaciones del tipo ∞ -∞

En el apartado no consideramos cuando eran funciones con crecimiento semejante; esto ocurre cuando tenemos una raíz con un polinomio de grado n y un polinomio restando de grado la mitad (n/2). Si esto ocurre lo que se hace es multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada, eliminando así la indeterminación del tipo ∞ -∞ y quedando expresión del tipo ∞/∞.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-(x+3)=\infty-\infty\ (\text{mismo grado})\ =\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-(x+3)\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+(x+3)\right)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-(x^2+6x+9)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-9}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1+\frac{3}{x}}=-\frac{1}{2}$$