ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuación exponencial

Una **ecuación exponencial** es aquella **ecuación** en la que la **incógnita** aparece en el **exponente**.

Para **resolver una ecuación exponencial** vamos a tener en cuenta:

1. $a > 0 \qquad a \neq 1$
2. $a^x = a^y \Longrightarrow x=y$
3. Las **propiedades de las potencias**.

$$a^0 = 1 \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^1 = a \qquad a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^n : b^n = (a : b)^n$$

Resolución de ecuaciones exponenciales

Caso 1

Realizar las operaciones necesaria para que en los miembros tengamos la misma base, de modo que podemos igualar los exponentes.

$a^x = a^y \Longrightarrow x= y$

Ejemplos

1. $2^{2x-1} = 4$

$$2^{2x-1} = 2^2 \qquad 2x-1=2 \qquad x = \frac{3}{2}$$

2. $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$

$$3^{\frac{x-3}{2x-1}} = 3^{\frac{3}{2}} \qquad \frac{x-3}{2x-1} = \frac{3}{2} \qquad x = -\frac{3}{4}$$

3. $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

$$2^x \cdot 2 + 2^x + \frac{2^x}{2} = 28 \qquad 2^x\left(2+1+\frac{1}{2}\right) = 28$$

$$2^x \cdot \frac{7}{2} = 28 \qquad 2^x = 2^3 \qquad x = 3$$

Caso 2

Cuando tenemos una ecuación más compleja podemos recurrir a un cambio de variable.

Ejemplos

1. $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$

En primer lugar aplicamos las propiedades de las potencias del producto o el cociente, para quitar las sumas o restas de los exponentes.

$$2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

Posteriormente realizamos el cambio de variable:

$$2^x = t \qquad 2^{2x} = \left(2^x\right)^2 = t^2$$

Resolvemos la ecuación y deshacemos el cambio de variable.

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} & 2^x = \frac{1}{2} & x_1 = -1 \\ t_2 = 1 & 2^x = 1 & x_2 = 0 \end{cases}$$

2. $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

$$2 - \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 0$$

$$3^x = t$$

$$2 - \frac{1}{t} + 3 \cdot t = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_1 = -1 \qquad 3^x = -1 \qquad \text{sin solución}$$

$$t_2 = \frac{1}{3} \qquad 3^x = \frac{1}{3} \qquad x = -1$$

Ecuación logarítmica

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo

Para resolver ecuaciones logarítmicas vamos a tener en cuenta:

1- Las propiedades de los logaritmos.

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^n = n$
4. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a (x^n) = n \log_a x$
7. $\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$

2- $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

3- Definición de logaritmo: $x = \log_a b \quad \Rightarrow \quad a^x = b$

4- Además tenemos que comprobar las soluciones para verificar que no tenemos logaritmos nulos o negativos.

Ejemplos

1. $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x)$

En el primer miembro aplicamos del logaritmo de un producto y en segundo la propiedad del logaritmo de una potencia.

$$\log\left[2\left(11 - x^2\right)\right] = \log(5 - x)^2$$

Teniendo en cuenta la propiedad: $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

$$2\left(11 - x^2\right) = (5 - x)^2$$

Resolvemos la ecuación y comprobamos que no obtenemos un logaritmo nulo o negativo.

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$x = 3 \qquad 11 - 3^2 > 0 \qquad 5 - 3 > 0$

$x = \frac{1}{3} \qquad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \qquad 5 - \frac{1}{3} > 0$

2. $2\log x = 3 + \log\frac{x}{10}$

En el 2º miembro aplicamos la propiedad del logaritmo de un cociente.

$$2\log x = 3 + \log x - \log 10$$

Restamos en los dos miembros log x y teniedo en cuenta que el log 10 = 1, tenemos:

$\log x = 3 - 1 \qquad \log x = 2$

Teniendo en cuenta la definición de logaritmo y que es un logaritmo decimal:

$10^2 = x \qquad x = 100$

3. $\log x + \log(x + 3) = 2\log(x + 1)$

En primer miembro aplicamos la propiedad del producto y en el 2º la de la potencia de un logaritmo.

$$\log\left[x(x + 3)\right] = \log(x + 1)^2$$

Teniendo en cuenta la inyectividad de los logartmos tenemos:

$$x(x + 3) = (x + 1)^2$$

Resolvemos la ecuación y comprobamos la solución.

$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \qquad x = 1$

4. $\dfrac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$

Multiplicamos en los dos miembros por log(3x −4).

$$\log(16 - x^2) = 2\log(3x - 4)$$

En el 2º miembro aplicamos la propiedad de la potencia de un logaritmo y tenemos en cuenta la inyectividad de los logartmos.

$\log(16 - x^2) = \log(3x - 4)^2 \qquad (16 - x^2) = (3x - 4)^2$

Resolvemos la ecuación x = 0 no es solución porque nos encontrariamos al sustituir en la ecuación con log =0, que no existe.

$10x^2 - 24x = 0 \qquad x = 0 \qquad x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Sistema de ecuación exponencial

Un sistema de ecuaciones exponenciales es aquel sistema en los que las incógnitas aparecen en los exponentes.

Resolución de sistemas de ecuaciones exponenciales

Caso 1

Igualar los esponentes si los dos miembros tienen potencias con la misma base.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3^{2x+y} = 3^7 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{cases}$$

Igualamos exponentes y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \qquad x = 3 \qquad y = 1$$

Caso 2

Realizar un cambio de variable. Ejemplo

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} = 9 \end{cases}$$

En primer lugar aplicamos las propiedades de las potencias del producto o el cociente, para quitar las sumas o restas de los exponentes.

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ \frac{1}{2} \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 9 \end{cases}$$

Posteriormente realizamos el cambio de variable:

$u = 2^x \qquad v = 5^y$

Resolvemos el sitema.

$$\begin{cases} u + v = 9 \\ \frac{u}{2} + 5v = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 9 \\ u + 10v = 18 \end{cases}$$

$u = 8 \qquad v = 1$

Deshacemos el cambio de variable

$2^x = 8 \qquad x = 3$

$5^y = 1 \qquad y = 0$

Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Para resolver sistemas de ecuaciones logarítmicas actuaremos de modo similar a como lo hicimos con las ecuaciones logarítmicas, es decir basándonos en la definición y las propiedades de los logaritmos y teniendo en cuenta que la función logarítmica es inyectiva.

Veamos dos casos de resolución de sistemas de ecuaciones logarítmicas.

Caso 1

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

En la sgunda ecuación aplicamos la propiedad del cociente de un logaritmo, en el primer miembro y en segundo tenemos en cuenta que el logaritmo decimal de 10 es 1.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log 10$$

Resolvemos el sistema por sustitución y al final comprobamos las soluciones, un solo par de soluciones es válida.

$\frac{x}{y} = 10 \qquad x = 10y$

$100y^2 - y^2 = 11$

$$y^2 = \frac{11}{99} = \frac{1}{9} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{3} \qquad x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Caso 2

Algunos sistemas se pueden **resolver** directamente **por el método de reducción.**

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ \underline{\log x - \log y = 1} \\ 2\log x \qquad = 4 \end{array}$$

$\log x = 2 \qquad x = 10^2 \qquad x = 100$

$2 + \log y = 3$

$\log y = 1 \qquad y = 10^1 \qquad y = 10$