BLOQUE 5:

FUNCIONES

- *Funciones elementales*
- *Límites de funciones*

5.FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.

5.1 INTRODUCCIÓN

En todas las ciencias se conocen leyes que relacionan dos magnitudes, de tal forma que, conociendo el valor de alguna de ellas podemos obtener, inequívocamente, el valor de la otra. Este tipo de relaciones sirvieron de origen al concepto de función.

Una función es una relación entre dos variables: x, llamada variable independiente e y, llamada variable dependiente. A cada valor de la variable x, la función le asocia un valor único de la variable y. Nosotros trabajaremos con funciones reales de variable real, es decir, funciones en las que las variables toman valores en los números reales.

Una función puede presentarse bajo varios aspectos, gráfica, ecuación o fórmula, tabla o texto. Nosotros nos centraremos en los aspectos ecuación-gráfica-texto. Es importante comprender que estas tres formas de hablar de una función son en realidad una sola, pues la relación que indican entre las variables es la misma y podemos pasar de una a otra. Las funciones que vienen descritas por una sola fórmula reciben el nombre de funciones elementales.

5.2 CONCEPTO DE FUNCIÓN

Llamamos ***función real de variable real*** a una correspondencia entre un conjunto $D \subset \Re$ tal que a cada elemento $x \in D$ se le hace corresponder un único elemento $y \in \Re$.

La representamos por:

$$\begin{aligned} f: D \subset \Re &\longrightarrow \Re \\ x &\longrightarrow f(x)=y \end{aligned}$$

A "x" se le llama *variable independiente* mientras a "y" se le llama *variable dependiente.* La expresión algebraica que me permite calcular el valor de y correspondiente a un x, recibe el nombre de *expresión analítica de la función f(x).*

Llamamos ***dominio de definición*** (o *campo de existencia*) de una función f y se representa por Dom(f), al conjunto de números reales x tales que existe f(x), es decir, y= f(x) es un valor real.

$$Dom(f)=\{\, x \in \Re \,/\, \exists\, f(x) \in \Re \,\}$$

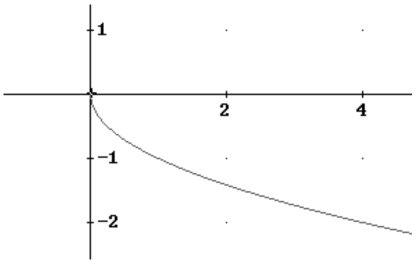
El dominio de definición de una función real puede verse restringido por la imposibilidad de realizar alguna operación con ciertos valores de x (por ejemplo, si anula un denominador o hace negativo un radicando) o también por el contexto real del que se extrae la función.

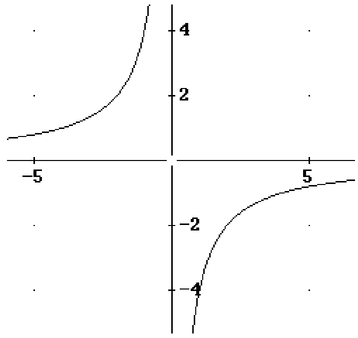
Si en los ejes de coordenadas representamos todos los puntos de la forma (x, f(x)) obtenemos la *gráfica de f(x).* Del estudio de la gráfica podremos conocer muchas propiedades de la función, de la misma forma que del estudio de la expresión analítica de la función podremos conjeturar como será su gráfica.

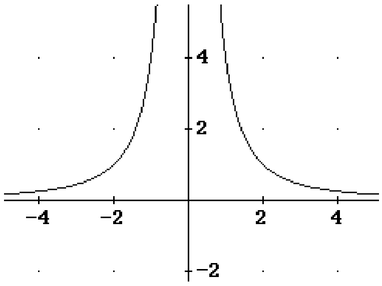
Se define **recorrido** (o *rango*) de una función f y se representa por Im(f) al conjunto de números reales $y \in \Re$ tales que existe $x \in Dom(f)$ cumpliendo que y=f(x).

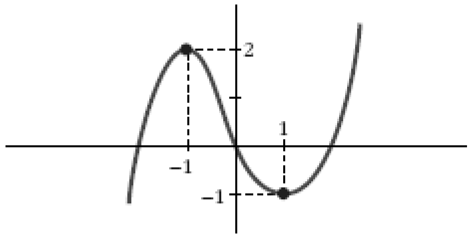
$$Im(f)=\{\, y \in \Re \,/\, \exists\, x \in \Re : y=f(x) \,\}$$

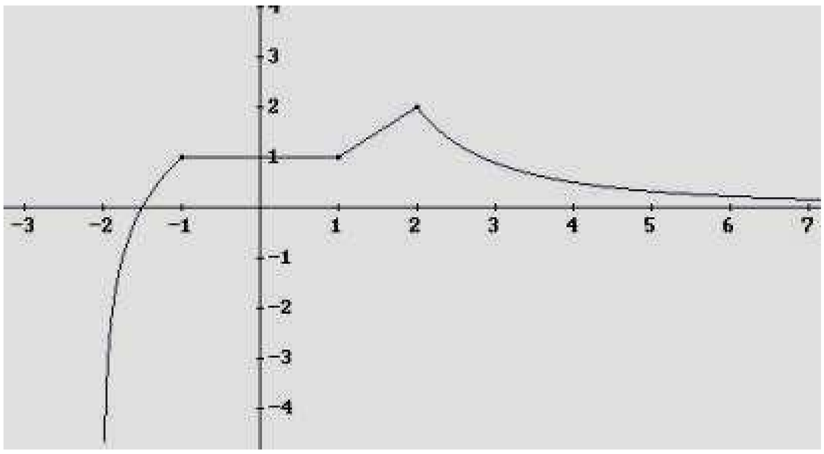
1. **Ejercicio**. Indica cuál es el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

2. **Ejercicio**: Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones

$b(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$

$c(x)=\ln(x^2-4)$

$z(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$

$f(x)=x^4-2x^2$

$k(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

$r(x)=\sqrt{x^2-9}$

$h(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$

$g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+3}}$

$j(x)=\ln(3x-5)$

$s(x)=\dfrac{-1}{1-x}$

$p(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$

$t(x)=\sqrt[3]{x^2+5}$

$u(x)=\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x-4}}$

$v(x)=\sqrt[6]{x+2}$

$w(x)=\dfrac{x^2-5}{\sqrt{x^2-1}}$

5.3 ***ALGUNAS PROPIEDADES LOCALES DE LAS FUNCIONES***

- **SIMETRÍAS**

Una función f es **simétrica respecto del eje de ordenadas** si verifica:

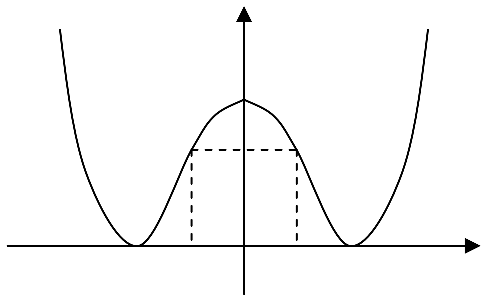
$$f(x) = f(-x),\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f)$$

Las funciones simétricas respecto del eje de ordenadas se llaman **funciones pares**.

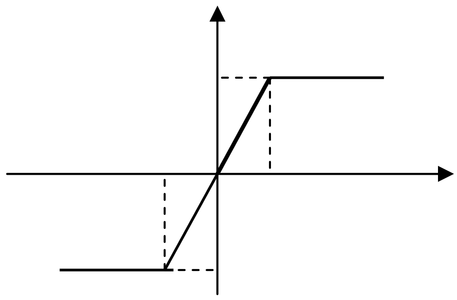
Una función f es **simétrica respecto del origen de coordenadas** si verifica:

$$f(x) =- f(-x),\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f)$$

Las funciones simétricas respecto del origen de coordenadas se llaman **funciones impares.**



Función par



Función impar

- **ACOTACIÓN. MONOTONÍA Y EXTREMOS.**

Una función f está **acotada superiormente** por un número real k si todos los valores que toma la función son menores o iguales que k.

$$f(x)\leq k,\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f)$$

El valor k recibe el nombre de cota superior de la función.

Una función f está **acotada inferiormente** por un número real p si todos los valores que toma la función son mayores o iguales que p.

$$f(x)\geq p,\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f)$$

A p se le llama **cota inferior** de la función.

Una función f se dice **acotada** si lo está superior e inferiormente.

$$p\leq f(x) \leq k,\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f)$$

Se dice que una función f es **creciente** en un punto x_0 si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 en el que se cumple:

$$\forall x \in I \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$$

Se dice que una función f es **estrictamente creciente** en un punto x_0 si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 en el que se cumple:

$$\forall x \in I \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

Se dice que una función f es **decreciente** en un punto x_0 si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 en el que se cumple:

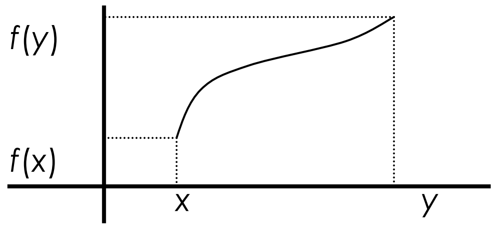
$$\forall x \in I \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \end{cases}$$

Se dice que una función f es **estrictamente decreciente** en un punto x_0 si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 en el que se cumple:

$$\forall x \in I \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Se dice que una función f es **creciente en un intervalo** (a,b), si es creciente en todos los puntos de ese intervalo, o intuitivamente, si se cumple:

$$\forall x, y \in (a,b) / x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

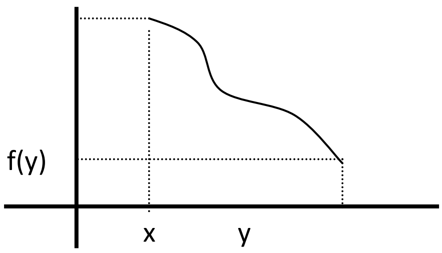


Análogamente, una función f es **estrictamente creciente** en un intervalo (a,b), si es estrictamente creciente en todos los puntos de ese intervalo, o si se cumple:

$$\forall x, y \in (a,b) / x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Una función f es **decreciente en un intervalo** (a,b), si es decreciente en todos los puntos de ese intervalo, o también si:

$$\forall x, y \in (a,b) / x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$



Una función f será **estrictamente decreciente en un intervalo** (a,b), si es estrictamente decreciente en todos los puntos de ese intervalo, o si:

$$\forall x, y \in (a,b) / x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Se dice que un punto x_0 es un **máximo relativo** de la función f si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$.

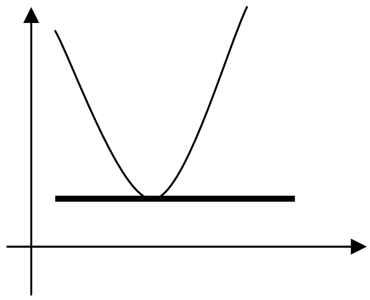
Se dice que un punto x_0 es un **mínimo relativo** de la función f si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I$.

Se dice que un punto x_0 es un **máximo absoluto** de la función f si $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D(f)$.

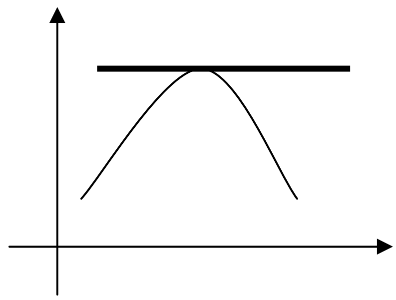
Se dice que un punto x_0 es un **mínimo absoluto** de la función f si $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D(f)$.

- **CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD**

Se dice que una función es convexa en un punto de su dominio de definición si, en un entorno de ese punto, la gráfica de la función se mantiene por encima de la tangente a la curva en ese punto.
En caso contrario se dice que es cóncava.



Convexa

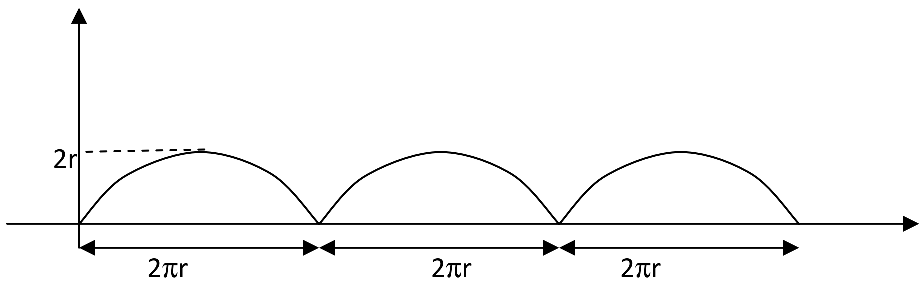


Cóncava

Los puntos donde la función pasa de cóncava a convexa o viceversa se llaman **puntos de inflexión.**

3. **Ejercicio**: Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y los máximos y mínimos de las funciones del ejercicio de la página 3.

- **FUNCIÓNES PERIÓDICAS**



Una función f **es periódica**, de **período** T (T>0), si verifica:

$$F(x+kT) = f(x),\ \forall\ k \in \mathbb{Z}\ y\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f)$$

A T se le llama **período principal** de la función, pues cualquier otro múltiplo de éste también es período.

5.4 TIPOS DE FUNCIONES

- <u>Funciones polinómicas</u>. Son las que tienen por expresión analítica un polinomio:

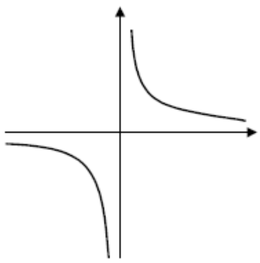
$$f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Para todas las funciones polinómicas Dom(f) = $\mathfrak{R}$. Las funciones polinómicas de primer grado se llaman funciones lineales o rectas y son del tipo f(x) = ax+b. El coeficiente a, se llama pendiente de la recta. Si a>0 la recta es creciente y si a<0 la recta es decreciente.

Las funciones polinómicas de segundo grado son de la forma $f(x)= ax^2+bx+c$, su representación gráfica es una parábola que tiene como coordenada x de su vértice a $\frac{-b}{2a}$. Si a<o la parábola presenta un máximo en su vértice y si a>o presenta un mínimo.

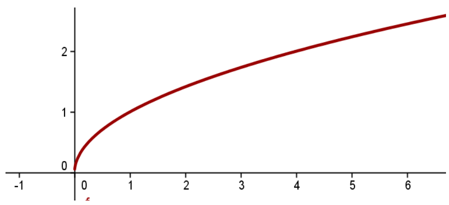
- <u>Funciones de proporcionalidad inversa.</u>

$$f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)=\frac{k}{x}$$



El dominio de estas funciones es Dom(f) = $\mathfrak{R}$-{0}. Su representación gráfica es una hipérbole.

- <u>Funciones raíz</u>: Las funciones $y=\sqrt{kx}$ se representan mediante medias parábolas con el eje paralelo al eje X.



- <u>Funciones racionales</u>. Son las que tienen por expresión analítica una fracción algebraica.

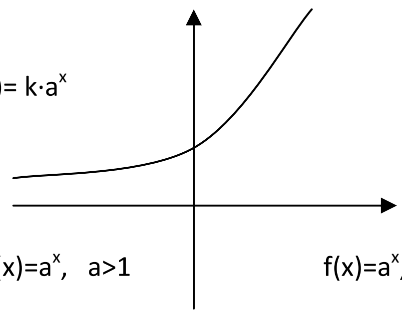
$$g: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$$
$$x \longrightarrow g(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$ siendo P y Q polinomios.

En este caso Dom(g)= $\{x \in \mathfrak{R} \;/\; Q(x) \neq 0\}$. Entre las funciones racionales las de expresión $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ también tienen por gráfica una hipérbole.

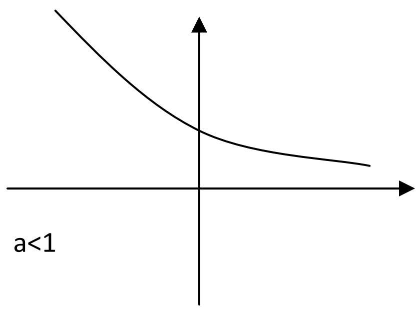
- <u>Funciones exponenciales</u>. Son aquellas en las que la variable aparece en el exponente. La base es siempre un nº real positivo, distinto de 1.

$$e: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$$
$$x \longrightarrow e(x)= k\cdot a^x$$

Dom(e)= $\mathfrak{R}$



$f(x)=a^x$, a>1



$f(x)=a^x$, a<1

Características de la función exponencial

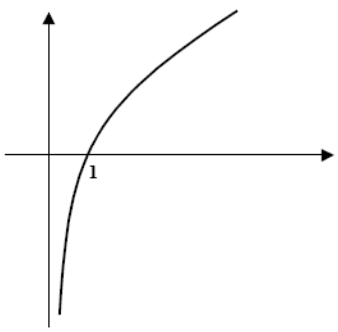
a) Su dominio es $\Re$.
b) Su recorrido es $(0, +\infty)$.
c) Es continua en su dominio.
d) Es creciente si la base es mayor que 1 y decreciente si la base es menor que 1.
e) Tiene una asíntota horizontal $y = 0$.

- <u>Funciones logarítmicas</u>

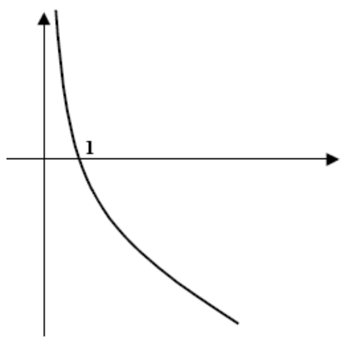
$$\log_a : \Re \longrightarrow \Re$$
$$x \longrightarrow \log_a(x) \text{ siendo } a>0,\ a \neq 1$$
$$\mathrm{Dom}(\log_a) = \{ x \in \Re \ / \ x > 0 \}$$

Propiedades de estas funciones:

a) Pasan por los puntos (1,0) y (a,1).
b) Su dominio se reduce a los números positivos.
c) Es creciente si $a>1$ y decreciente si $0<a<1$.
d) Tiene por asíntota vertical el eje Y.
e) Las más importantes son $f(x) = \ln x$ y $f(x) = \log x$.



$f(x) = \ln x$

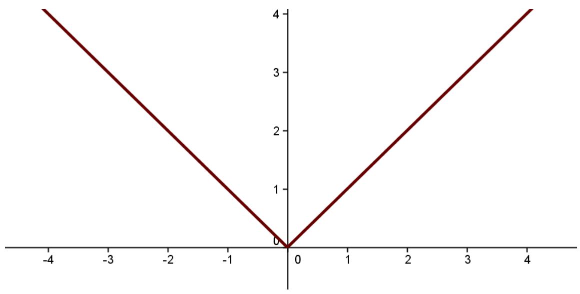


$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

- <u>Función valor absoluto de otra función</u>: Recordemos que el valor absoluto de un número se definía como:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

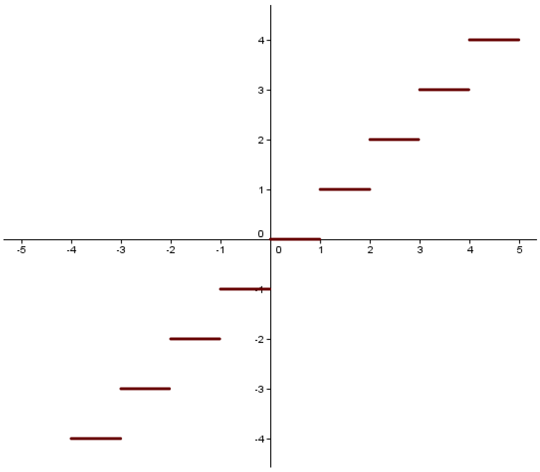
La función valor absoluto se define de forma análoga: $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$



En general, el valor absoluto de una función se define como:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$$

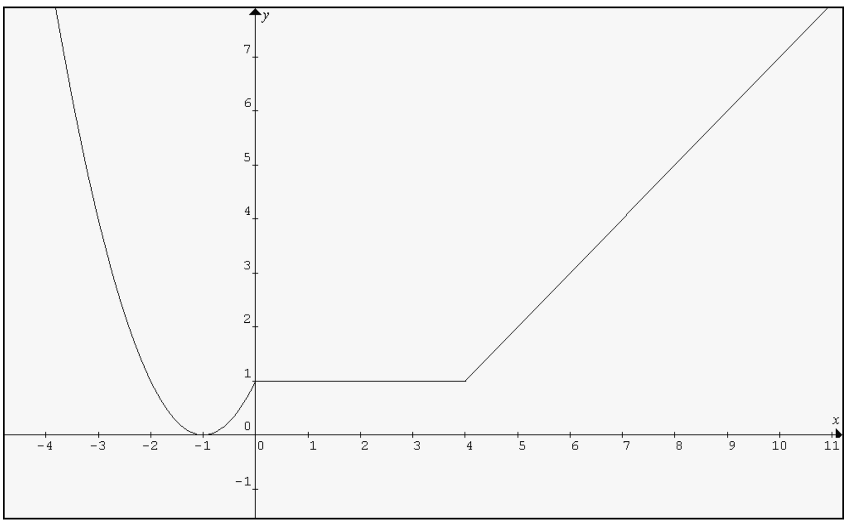
- Función parte entera: Se llama parte entera de un número x al mayor número entero menor o igual que x. A partir de esto, definimos la función parte entera de x, Ent(x), que hace corresponder a cada número x su parte entera:



- Funciones definidas a intervalos: Cuando la expresión analítica de una función no es única sino que varía de un intervalo a otro decimos que la función está definida a intervalos o a "trozos". Para representarlas gráficamente tenemos que estudiar cada tramo, y prestar atención a los puntos donde la función cambia la expresión.

Ejemplo:

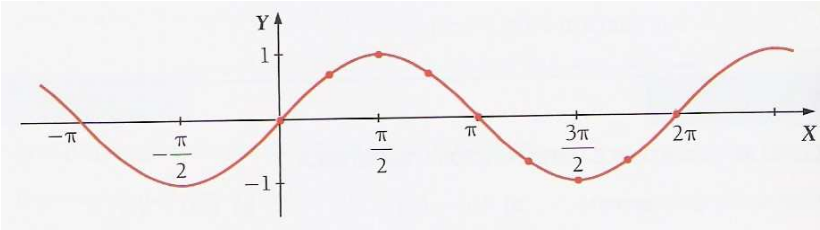
$$f(x)=\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } 0 < x < 4 \\ x - 3 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$



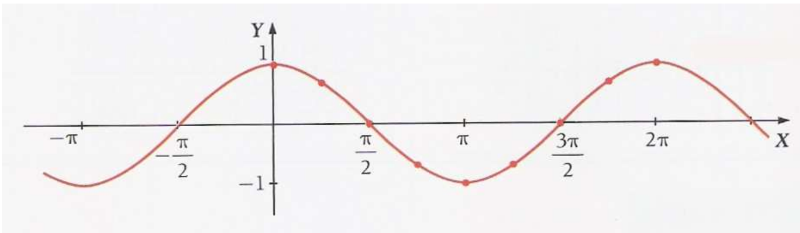
• <u>Funciones trigonométricas</u>

$$t: \Re \longrightarrow \Re$$
$$x \longrightarrow t(x)=\text{sen}\alpha \text{ (o } \cos\alpha, \text{ tx } \alpha,\ldots)$$

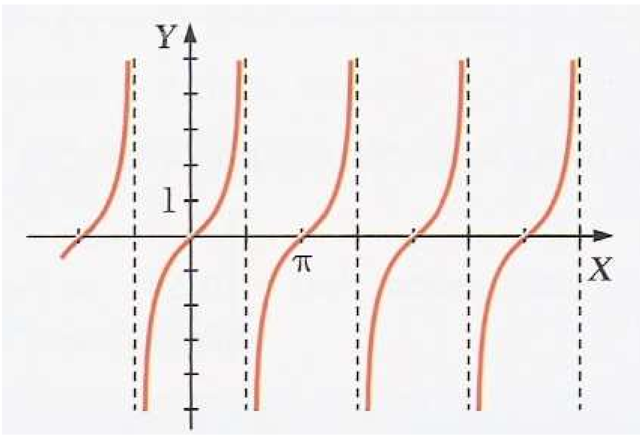
$$f(x) = senx$$



$$f(x) = \cos x$$



$$f(x) = tx\, x$$



5.5 *COMPOSICIÓN DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA*

Dadas dos funciones, f y g, se llama **función compuesta** de f y g, y se denota por $g \circ f$, a la función que transforma x en $g[f(x)]$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

La expresión $(g \circ f)(x)$ se lee “f compuesta con g”.
Además, en general $g \circ f \neq f \circ g$.

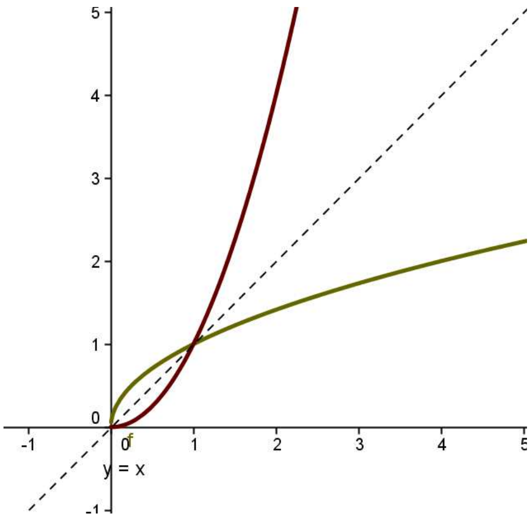
Se llama **función inversa** o recíproca de f a otra función, f^{-1}, que cumple la siguiente condición: “si $f(a) = b$, entonces, $f^{-1}(b) = a$ ”.

Como consecuencia se dan las siguientes relaciones:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x\,; \quad es\ decir,\ f^{-1}[f(x)] = x$$
$$x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) \xrightarrow{f} x\,; \quad es\ decir,\ f[f^{-1}(x)] = x$$

La función inversa de f^{-1} es f . Por eso se dice, simplemente, que las funciones f^{-1} y f son inversas o recíprocas.

Las gráficas de estas funciones son simétricas respecto de la recta y = x.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla el dominio de las siguientes funciones :

a) f(x)=3x-5 b) $y=3x^2+5x-4$ c) f(x)=$\frac{3x-5}{x+2}$ d) y=$\frac{x+3}{x^2-1}$

e) f(x)=$\frac{3x+5}{x^2-x-6}$ f) y=$\frac{2x}{x^2+4}$ g) y=$\frac{x-1}{x}$ h) f(x)=$\sqrt{x^2+3}$

i) y=$\sqrt{x-1}$ j) f(x)=$\frac{3x}{\sqrt{x-2}}$ k) y=$\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ l) y=$\frac{3x}{x^2-4}$

m) y=$\frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ n) y=$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$ ñ) y=$\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ o) y=$\ln(x+3)$

p) y=$\ln\frac{x-1}{x+1}$ q) y=$\sqrt{x^2-5x+6}$ r) y=$\frac{\ln(x-1)}{x-3}$ s) y=$\ln(x^2+1)$

t) y=tg x

2. Representa gráficamente las siguientes funciones y, utilizando la gráfica, indica: dominio, recorrido o imagen, puntos de corte con los ejes de coordenadas, intervalos de signo positivo y signo negativo e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) f(x)= 3 b) f(x)= -2 c) y= 0 d) y= x e) y= -2x f) f(x)= x + 2

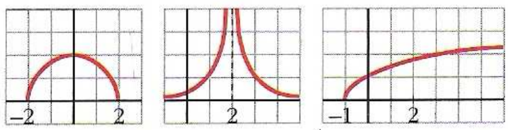
g) y= -2x + 3 h) y= x^2-1 i) y=x^2-4x+6 j) y=$\frac{-1}{2}x^2+2x+5$ k) y= x^2+1

l) y=$|x|$ m) y=$|x+2|$ n) y=$|x^2-5x+6|$ ñ) y=$|x^2-9|$ o) y=$\frac{1}{x}$

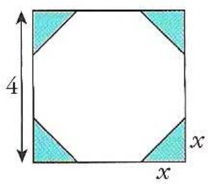
p) y=$\frac{2}{x-3}$ q) y=$\frac{-2}{x}$ r) y=$\frac{3x-5}{x-2}$ s) y=2^x t) y=$\left(\frac{1}{2}\right)^x$

u) y=$\log_2 x$ v) y=$\log_{\frac{1}{2}} x$ w) y= sen x x) f(x)= cos x y) f(x)= tg x

3. Observando la gráfica de estas funciones indica su dominio de definición y su recorrido:



4. De un cuadrado de 4cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.
   a. Escribe el área del octógono que resulta en función de x.
   b. ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?



5. Representa gráficamente las siguientes funciones a trozos :

a) f(x)=$\begin{cases} x & si \quad x \le 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$ b) f(x)=$\frac{|x|}{x}$ c) f(x)=$\begin{cases} x^2+1 & si \quad x \le 0 \\ x-2 & si \quad x > 0 \end{cases}$

d) f(x)=$|x-2|$ e) f(x)=$\begin{cases} x & si \quad x \le -1 \\ 1-x^2 & si \quad -1 < x \le 2 \\ -3 & si \quad x > 2 \end{cases}$ f) g(x)=$\begin{cases} x^2+2x+1 & si \quad x \le 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < 4 \\ x-3 & si \quad x \ge 4 \end{cases}$

6. Representa y define como funciones a trozos:

a) $f(x)=|x-5|$ b) $y=1-|x|$ c) $f(x)=|x^2-4|$

7. Sin representarlas gráficamente, halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas e intervalos de signo, de las siguientes funciones :

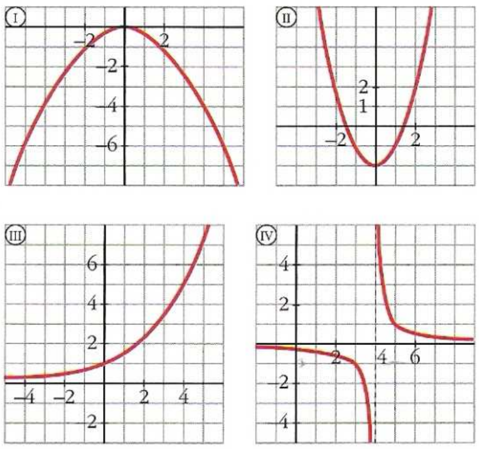
a) y= 2x-3 b) y= x^2-5x+6 c) y= x^3-1

d) y=$\dfrac{x-2}{x}$ e) y=$\dfrac{x^2-3x+2}{x-5}$ f) y=$\dfrac{x^3}{x^2-x-6}$

8. Asocia a cada una de las gráficas su expresión analítica:

$a) y = 1{,}5^x$ $b) y = x^2 - 2$

$c) y = -0{,}25x^2$ $d) y = \dfrac{1}{x-4}$



9. Dadas las funciones $f(x)=2x^2-x+1$ y $g(x)=x+3$, calcula su suma, diferencia, producto y cociente. ¿Cuál es el dominio de $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$?

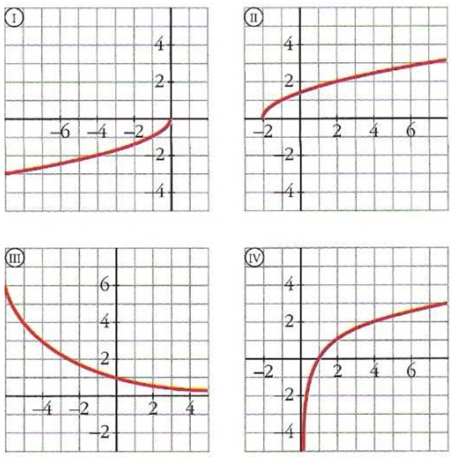
10. Dadas las funciones $f(x)=3x-2$ y $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$ se pide calcular :

a) $(f+g)(x)$ y su dominio b) $(f-g)(x)$ y su dominio

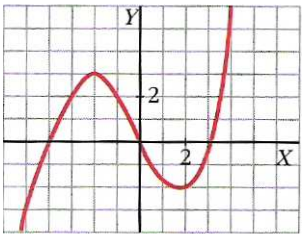
c) $(f \cdot g)(x)$ y su dominio d) $(f:g)(x)$ y su dominio

11. Asocia a cada gráfica la expresión analítica que le corresponda entre las siguientes:

$a) y = \sqrt{x+2}$ $b) y = 0{,}75^x$ $c) y = \log_2 x$ $d) y = -\sqrt{x}$

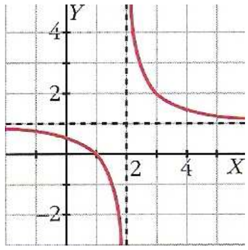


12. Esta es la gráfica de la función y = f(x).Representa a partir de ella las funciones:



a) $y = f(x-1)$
b) $y = f(x) + 2$
c) $y = -f(x)$
d) $y = |f(x)|$
e) $y = f(x+2)$
f) $y = f(x) - 1$

13. La expresión analítica de esta función es del tipo $y = \dfrac{1}{x-a} + b$. Observa la gráfica y di los valores de a y de b.



14. Estudia las simetrías de las siguientes funciones:

    1. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ $\quad g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ $\quad h(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$

15. *Sean las* funciones: $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 1$. Calcular :

    a) $(g \circ f)(2)$ y $(g \circ f)(x)$ $\qquad$ b) $(f \circ g)(-3)$ y $(f \circ g)(x)$

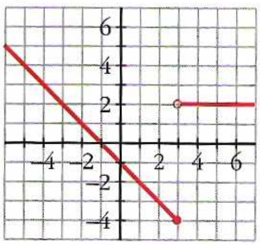
16. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x^2$, definidas ambas en $(0, \infty)$, hallar: $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ y sus dominios. ¿Se puede deducir de este ejercicio que la composición de funciones es conmutativa? ¿Por qué?

17. Halla la función inversa de $f(x) = x^3 - 6$ y comprueba que se verifica: $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

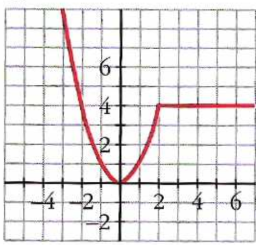
18. Halla la función inversa de $y = f(x) = 2^{x+1}$ y comprueba que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

19. Busca la expresión analítica de estas funciones:

a)



b)



20. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).
    a. Dibuja la gráfica en el intervalo [0,5].
    b. Calcula la altura del edificio.
    c. ¿En qué instante alcanza la altura máxima?

21. Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400€ cada uno y sabe que por cada 10€ de subida venderá dos electrodomésticos menos.
    a. ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50€?
    b. Escribe la función que relaciona la subida de precios con los ingresos mensuales.
    c. ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

22. Helena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida. Representa la función tiempo-distancia y busca su expresión analítica.

23. Un negocio en el que invertimos 10000€, pierde un 4% mensual. Escribe la función que nos da el capital que tenemos según los mese transcurridos y represéntala. ¿Cuánto tiempo tardará el capital inicial en reducirse a la mitad?

24. Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo y = k.a^t (t en minutos), calcula **k**, **a** y representa también la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5000 bacterias?

25. Una parábola corta al eje de abscisas en x =1 y en x =3. La ordenada del vértice es y = -4. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?

26. Indica el dominio de definición de: $y = \ln\dfrac{x+3}{x-2}$ y de $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

27. Representa y expresa en intervalos las funciones:
    a. $y = 1 - |x|$ b. $y = |x-1| - |x|$

AUTOEVALUACIÓN 1

1. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$a)\, y = \sqrt{x^2 - 2x} \qquad b)\, y = \frac{2}{x^3 - x^2}$$

2. Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$a)\, y = |2x+3| \qquad b)\, y = \begin{cases} -x^2 + 4 & si\ x < 1 \\ 4 - x & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

3. Representa $y = \dfrac{1}{x}$. A partir de ella dibuja la gráfica de $y = \dfrac{-2x+5}{x-2}$

4. Ponemos al fuego un cazo con agua a 10°C. En 5 minutos alcanza 100°C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente.
    a. Representa la función que describe este fenómeno e indica su expresión analítica.
    b. Di cual es su dominio y su recorrido.

5. El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0.01x$ (donde x es el número de artículos fabricados y p su precio en cientos de euros).
    a. Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?
    b. Representa la función nº de artículos-ingresos.
    c. ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

6. Depositamos en un banco 5000€ al 6% anual.
    a. Escribe la función que nos dice cómo evoluciona el capital a lo largo del tiempo. ¿Qué tipo de función es?
    b. ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

7. Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, indica:
    a. $f[g(2)]$
    b. $g[f(15)]$
    c. $f \circ g$
    d. $g \circ f$
    e. $f^{-1}(x)$
    f. $g^{-1}(x)$
    g. $f^{-1} \circ g^{-1}$
    h. $g^{-1} \circ f^{-1}$

AUTOEVALUACIÓN 2

1. Se considera un cuadrado cuyo lado mide x cm. Con centro en cada vértice, y radio, la mitad de la longitud del lado, se construyen sectores circulares. Encontrar la expresión del área de la figura que se forma dentro del cuadrado en función de su lado.
   Hallar el valor del área en el caso de que el lado mida $\sqrt{2}$ cm.

   Sol: $\left\{ a) \dfrac{4x^2 - \pi.x^2}{4} \quad b) \dfrac{4-\pi}{2} cm^2 \right\}$

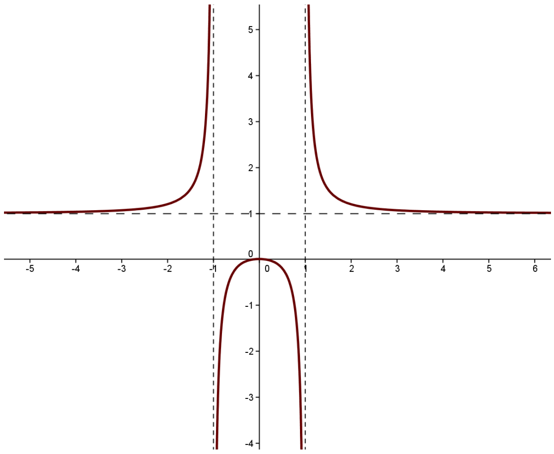
2. Dibujar la gráfica de una función con las siguientes características;
    - Su dominio es toda la recta real y su recorrido es el intervalo [-3,3].
    - Es simétrica respecto del origen de coordenadas (es decir, es impar).
    - Es creciente en (-1,1) y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

3. Se consideran las funciones: $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $g(x) = 2x - 1$. Calcular:
    a. $f^{-1}(x)$ y su dominio.
    b. $(f \circ g)(x)$ y su dominio.
    c. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y su dominio.

$$Sol: \left\{ \begin{array}{l} a) f^{-1}(x) = \dfrac{-x}{x-1}; Dom = \Re - \{1\} \\ b) (f \circ g)(x) = \dfrac{2x-1}{2x}; Dom = \Re - \{0\} \\ c) \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{2x^2 + x + 1}; Dom = \Re - \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\} \end{array} \right\}$$

4. Dada la función representada, indicar:

   a. Dominio y recorrido.
   b. Simetría y monotonía.
   c. Puntos de corte y asíntotas .



AUTOEVALUACIÓN 3

1. a) Se considera un círculo cuyo radio mide x cm y se inscribe un cuadrado en él. Encontrar la expresión del área de la figura que forman los cuatro segmentos circulares.
   b) Hallar el valor del área en el caso de que el radio mida $\sqrt{8}$ cm.

Sol: $\left\{\begin{array}{l} a)\ f(x)=(\pi-2).x^2 \\ b)\ f\left(\sqrt{8}\right)=8.(\pi-2)cm^2 \end{array}\right\}$

2. Dibujar la gráfica de una función con las siguientes características:
   - Su recorrido es toda la recta real.
   - Es simétrica respecto del eje de ordenadas.
   - Tiene un máximo relativo en el punto (0,4).
   - Tiene dos asíntotas verticales.

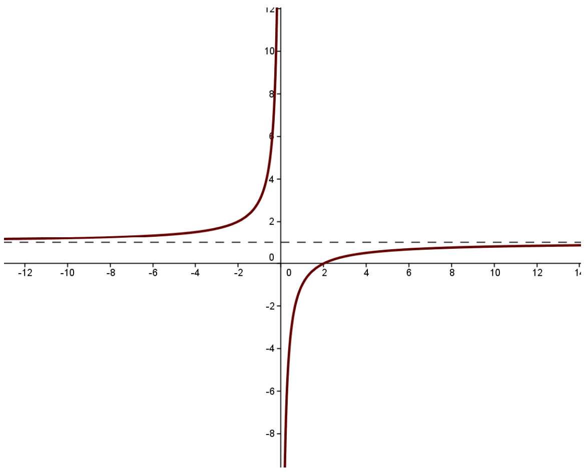
3. Se consideran las funciones: $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ y $g(x)=\sqrt{x}$. Calcular:

   a. $f^{-1}(x)$ y su dominio.
   b. $(g\circ f)(x)$ y su dominio.
   c. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y su dominio.

$$Sol:\left\{\begin{array}{l} a)\ f^{-1}(x)=\dfrac{1}{1-x};\ Dom=\Re-\{1\} \\ b)\ (g\circ f)(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}};\ Dom=(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \\ c)\ \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}};\ Dom=(0,+\infty) \end{array}\right\}$$

4. Dada la función representada, indicar:

   a) Dominio y recorrido.
   b) Simetría y monotonía.
   c) Puntos de corte.
   d) Asíntotas.



AUTOEVALUACIÓN 4

1. Encontrar una función polinómica de tercer grado que pase por los puntos A(0,7), B(1,6), C(-1,14) y D(2,17) . $\{Sol: f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7\}$

2. Representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & si\ x \le 1 \\ \ln x & si\ x > 1 \end{cases}$

3. El número de platos que un cocinero prepara viene dado en función de los días x que lleva realizando este trabajo mediante la expresión $f(x) = \dfrac{25x+5}{x+1}$
   a. Representar gráficamente la función, e indicar la parte gráfica que tiene sentido en el contexto del problema.
   b. ¿Cuántos platos prepara al empezar a trabajar? ¿Y al cabo de un día de trabajo?
   c. ¿Al cabo de cuántos días prepara 20 platos? ¿Cuál es el número máximo de platos que puede preparar?

4. Representar la función $y = \cos x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$
   A partir de la gráfica anterior dibujar en el mismo intervalo las gráficas de las funciones:

   $a) y = 4\cos x + 1$ $\qquad$ $b) y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

AUTOEVALUACIÓN 5

1. Hallar la función polinómica de tercer grado a la que pertenecen los puntos A(0,8), B(1,8), C(-1,6) y D(-2,-4). $\{Sol: f(x) = x^3 - x^2 + 8\}$

2. Representar gráficamente la función: $f(x) = \begin{cases} |5 - x| & si\ x \ge 0 \\ 5 - x^2 & si\ x < 0 \end{cases}$

3. El número de células de un cultivo de laboratorio viene dado por la expresión:
   $$f(x) = e^x - a$$
   Donde x indica el tiempo en días.
   a) Calcular el valor de a si el estudio del cultivo se inicia con cuatro células. ¿Cuántas células habrá al día siguiente?
   b) Representar gráficamente la función, e indicar la parte gráfica que tiene sentido en el contexto del problema.
   c) ¿Cuántos días han de pasar para que haya 400 células en el cultivo? ¿Y para que se duplique esta cantidad?

4. Representar la función $y = senx$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$
   A partir de la gráfica anterior dibujar en el mismo intervalo las gráficas de las funciones:

   $a) y = 3senx - 2$ $\qquad$ $b) y = sen4x$

5.6 LÍMITES DE FUNCIONES

- Idea intuitiva de límite.

El límite de una función en un punto nos informa sobre el comportamiento de la función cuando nos aproximamos a ese punto.

Sea la función $f(x)= x^2 + 2$

a) Cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, ¿a qué número se aproxima f(x)?

$x \to 2^-$	1’5	1’9	1’99	1’999	....
$f(x) \to ?$	4’25	5’61	5’9601	5’996001	$\to 2^2+2$

b) Cuando x se aproxima a 2 por la derecha, ¿a qué número se aproxima f(x)?

$x \to 2^+$	2’5	2’1	2’01	2’001	....
$f(x) \to ?$	8’25	6’41	6’0401	6’004001	$\to 2^2+2$

c) Cuando x se aproxima a 2, ¿a qué número se aproxima f(x)?

$x \to 2$	2’5	1’5	2’1	1’99	....
$f(x) \to ?$					¿?

4. Ejercicio: Haz lo mismo para $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ en el punto x=1.

- Límite de una función en un punto.

El concepto de **límite de una función en un punto** de abscisa x=a informa sobre el comportamiento de la función en un entorno (a-δ,a+δ) de a.
Si cuando nos aproximamos a “a” las imágenes de la función se aproximan a un punto “l”, se dice entonces que “l” es el límite de la función en el punto a.
Simbólicamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l \iff [\ \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ /\ \text{si } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon\ ]}$$

Análogamente, si en vez de considerar entornos tomamos entornos laterales, entornos a la derecha (a, a+δ) o a la izquierda (a-δ,a), tenemos el límite de f cuando x tiende a “a” por la derecha o el límite de f cuando x tiende a “a” por la izquierda.
Simbólicamente:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \iff [\ \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ /\ \text{si } |x-a| < \delta,\ x<a \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon\ ] \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \iff [\ \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ /\ \text{si } |x-a| < \delta,\ x>a \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon\ ] \end{array}}$$

Necesariamente, según la definición, para que exista el límite de una función en un punto deben existir los límites laterales y además ser iguales.

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} \text{ si } x < 2 \\ -x + 5 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Como puede observarse, cuando los valores de x se aproximan a 2 por la izquierda, los valores correspondientes de f(x) se aproximan a 2 mientras que si los valores de x se aproximan a 2 por la derecha, los de la función se acercan a 3.

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ Por lo tanto el límite de la función en x= 2 no existe.

Además, también podemos definir los límites de una función cuando x tiende al +∞ o cuando tiende al -∞.

- Límites infinitos y límites en el infinito

DEF: Decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si cuando nos aproximamos a "a", las imágenes se hacen tan grandes o tan pequeñas como queramos.

> Decimos que $lím_{x\to a} f(x) = +\infty$ ($lím_{x\to a} f(x) = -\infty$) si dado K>0 (K<0), encontramos δ >0 tal que si a-δ< x < a+δ, entonces f(x) >K (f(x)<K)

Análogamente se definen los límites laterales infinitos.

DEF: Decimos que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ cuando al hacer x tan grande como queramos las imágenes se aproximan a l.

Análogamente también $\text{lím}_{x\to -\infty} f(x) = l$ cuando al hacer x tan pequeña como queramos las imágenes se aproximan a l.

> Decimos que $lím_{x\to +\infty} f(x) = l$ si y sólo si dado ε>0, arbitrariamente pequeño, podemos encontrar un h, tan grande como sea necesario, tal que si x >h entonces │f(x)-l│<ε.

5. Ejercicio: Calcula los siguientes límites:

a) $\text{lím}_{x\to 3} x^2 - 5 =$ b) $\text{lím}_{x\to 2} x^2 - 4 =$ c) $\text{lím}_{x\to 1} \dfrac{2}{x-1} =$ d) $\text{lím}_{x\to -2} \dfrac{x-4}{x+2} =$

6. Ejercicio: Calcula los siguientes límites:

a) $lím_{x\to +\infty} x^2 - 3x + 2$ b) $lím_{x\to -\infty} x^3 - 3x^2$ c) $lím_{x\to -\infty} -2x^5 + 2x - 3$ d) $lím_{x\to +\infty} -3x^4 + 2$

e) $lím_{x\to +\infty} e^{2x}$ f) $lím_{x\to -\infty} e^{2x}$ g) $lím_{x\to +\infty} 3^{-2x+2}$ h) $lím_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

i) $lím_{x\to +\infty} e^{-2x^2+1}$

•Operaciones con límites

Sean las funciones reales de variable real f y g y sea a$\in\Re$ tales que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\beta$$

Entonces:

$$\lim_{x\to a}(f\pm g)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\text{Se}\quad \beta\neq 0,\ \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{Se}\quad \alpha\geq 0,\quad \lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt{\alpha}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\alpha^{\beta}$$

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to a}g(f(x))=g(\lim_{x\to a}f(x))=g(\alpha)$$

7. <u>Ejercicio</u>: Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) }\lim_{x\to 2}4x^2-2= \quad \text{b) }\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}= \quad \text{c) }\lim_{x\to 2}\left(4x^2-2-\frac{1}{x+2}\right)=$$

$$\text{d) }\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{1}{x+2}}= \quad \text{e) }\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{4x^2-2}= \quad \text{f) }\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-2}{x+2}=$$

•Operaciones con expresiones infinitas

En las operaciones con límites tanto α como β pueden ser infinito. Así, podemos usar estas propiedades teniendo en cuenta las siguientes expresiones:

Sumas

$(+\infty)+a=+\infty$

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)+a=-\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$-(-\infty)=+\infty$

Productos

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)\cdot\infty=-\infty$

$(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$

$\infty\cdot(-\infty)=-\infty$

Se a > 0 $\begin{cases}(+\infty)\cdot a=+\infty\\(-\infty)\cdot a=-\infty\end{cases}$

Se a < 0 $\begin{cases}(+\infty)\cdot a=-\infty\\(-\infty)\cdot a=+\infty\end{cases}$

Cocientes

$\frac{a}{\pm\infty}=0$

$\frac{a}{0}=\pm\infty$ (hay que hallar los límites laterales)

$\frac{\pm\infty}{0}=\pm\infty$

$\frac{0}{\pm\infty}=0$

$\frac{\infty}{a}\begin{cases} a>0 & \infty \\ a<0 & -\infty \end{cases}$

$\frac{-\infty}{a}\begin{cases} a>0 & -\infty \\ a<0 & \infty \end{cases}$

Potencias

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

$(+\infty)^{-\infty} = 0$

Se $a > 0$, $(+\infty)^a = +\infty$

Se $a < 0$, $(+\infty)^a = 0$

Se $a \neq 0$, $a^0 = 1$

Se $a > 1$ $\begin{cases} a^{+\infty}=+\infty \\ a^{-\infty}=0 \end{cases}$

Se $0<a<1$ $\begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$

- **<u>Resolución de indeterminaciones</u>.**

Hay algunas operaciones que no se pueden realizar con expresiones infinitas. Estas son:

$$\infty - \infty;\ 0 \cdot \infty;\ \frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 1^{\infty};\ 0^0;\ \infty^0.$$

Estas expresiones se llaman ***indeterminaciones.***

- <u>Indeterminación de tipo</u> $\frac{\infty}{\infty}$: Este tipo de indeterminaciones se resuelven considerando los términos de mayor grado de cada una de las funciones implicadas.

  <u>EJEMPLOS:</u>

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+2x+1}{1-x^3}=\frac{\infty}{\infty}.\ \text{Resolvemos (dividiendo por la mayor potencia)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+2x+1}{1-x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3/x^3+2x/x^3+1/x^3}{1/x^3-x^3/x^3}=2$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+2x-1}+2x}{1-x}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{Resolvemos:}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+2x-1}+2x}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2/x^2+2x/x^2-1/x^2}+2x/x}{1/x-x/x}=-\left(\sqrt{2}+2\right)$$

- <u>Indeterminación de tipo</u> $\infty - \infty$: Estas indeterminaciones aparecen al calcular límites de diferencias de funciones racionales o irracionales. En el primer caso se resuelven operando convenientemente, y en el segundo caso multiplicamos numerador y denominador por la expresión radical conjugada.

EJEMPLOS:

a)
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\infty-\infty$$

Resolvemos:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+2)-4}{(x-2)\cdot(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\cdot(x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right)=\infty-\infty$. Resolvemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right)}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+x+2}=-2$$

- <u>Indeterminación del tipo</u> $\frac{0}{0}$: Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones polinómicas o de funciones racionales. En el primer caso se resuelven factorizando el numerador y el denominador por la regla de Ruffini, y en el segundo caso se resuelve multiplicando numerador y denominador por la expresión radical conjugada de la función que lleve raíz.

EJEMPLOS:

$a)\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}=\frac{0}{0}$. Resolvemos:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{8}{3}$$

$b)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{0}{0}$. Resolvemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x}=\frac{0}{0}$$

Resolvemos factorizando:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x-1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}(x-1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)=-4$$

- Indeterminación de tipo $0\cdot\infty$: Este tipo de indeterminaciones se resuelven haciendo el producto.

EJEMPLO:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^4-2}}(2x-3)=0\cdot\infty \quad \text{Resolvemos:}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^4-2}}(2x-3)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-9}{\sqrt{x^4-2}}=\frac{\infty}{\infty} \quad \text{Resolvemos:}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-9}{\sqrt{x^4-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x/x^2-9/x^2}{\sqrt{x^4/x^4-2/x^4}}=\frac{0}{1}=0$$

- Indeterminación de tipo $1^{+\infty}$

Se define el **número e** como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$$

siendo f(x) una función real de variable real tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Veamos cómo resolvemos este tipo de indeterminaciones mediante un ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=1^{+\infty}$$

Resolvemos:

Sumamos y restamos 1 a la base de la potencia:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)^{3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+x-1-x^2-2}{x^2+2}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-3}{x^2+2}\right)^{3x-1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{x-3}}\right)^{3x-1}$$

Si llamamos f(x)=$\frac{x^2+2}{x-3}$, tenemos que conseguir que aparezca en el exponente y para eso hacemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{x-3}}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{x-3}}\right)^{\frac{x^2+2}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x^2+2}(3x-1)}$$

Utilizando que en la potencia de una potencia se multiplican los exponentes y la propiedad e) de las operaciones con límites, tenemos que:

$$\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{x-3}}\right)^{\frac{x^2+2}{x-3}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-10x+3}{x^2+2}} = e^3$$

También se puede aplicar la siguiente fórmula para resolver este tipo de límites. Nosotros sólo la usaremos para comprobar resultados:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} h(x)\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$$

- Hay determinadas funciones en las que las operaciones son demasiado complejas y podemos resolver la indeterminación estudiando el orden de los infinitos.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\pm\infty$, se dice que f(x) es un infinito de orden superior a g(x) si:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$, o lo que es igual, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$.

Sólo con fijarnos en las gráficas podemos concluir que:

a) Dadas dos potencias de x, la de mayor exponente es un infinito de orden superior.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6}{2x^4}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^{52}}}{2x^2}=+\infty$$

b) Dadas dos funciones exponenciales de bases mayores que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{243\cdot 1'5^x}=+\infty$$

c) Cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{243\cdot x^7}=+\infty$$

d) Tanto las funciones exponenciales de base mayor que 1 como las potencias de x son infinitos de orden superior a cualquier función logarítmica.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_5 x}{x^5}=0$$

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^3-5x}-\frac{3x^5+2x^3}{5x^4}\right)=+\infty$, porque el minuendo es de grado 3/2 y el sustraendo es de grado 1.

$b)\ \underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\left(\left(x^2-3x\right)^5-1'5^x\right)=-\infty$, porque una función exponencial con base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

5.7 <u>CONTINUIDAD</u>

Intuitivamente, una función se dice que es *continua* en su dominio cuando su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

<u>DEF</u>: Una función f se dice *continua en un punto a* cuando el límite de la función en el punto coincide con la imagen de la función en el punto a. Es decir:

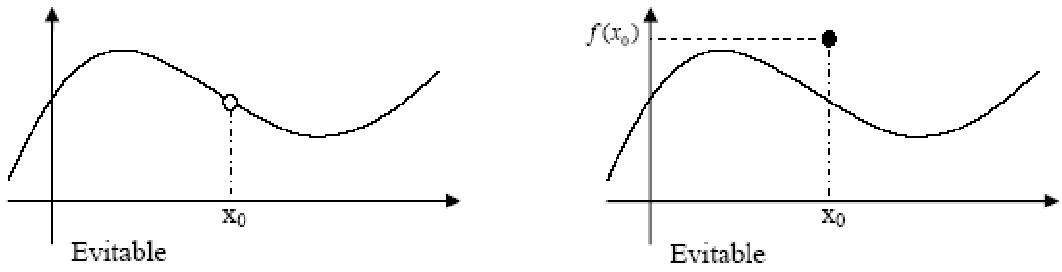
$$\boxed{\text{f continua en x = a} \Leftrightarrow \underset{x\to a^+}{\text{lím}}\, f(x) = \underset{x\to a^-}{\text{lím}}\, f(x) = \underset{x\to a}{\text{lím}}\, f(x) = f(a)}$$

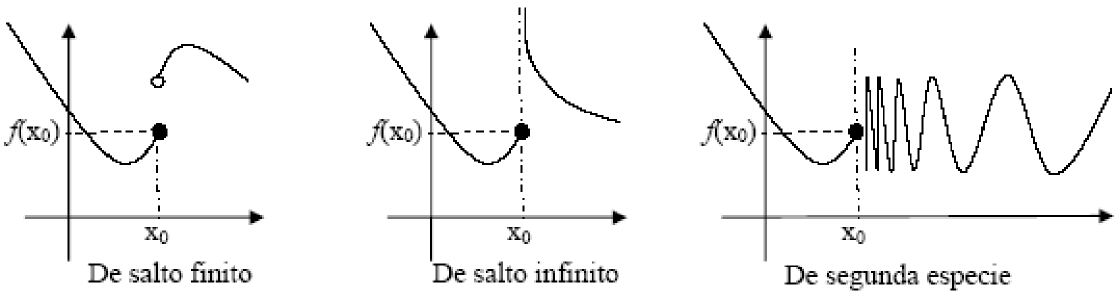
Esto implica las siguientes condiciones:

1º Existe f(a).
2º Existe $\lim_{x\to a} f(x)$
3º El límite coincide con el valor de la función en a.

• <u>TIPOS DE DISCONTINUIDADES:</u>

Discontinuidades
- **Evitables** (Existe el límite de la función en x_0 pero no coincide con $f(x_0)$ o no existe $f(x_0)$)
- **No evitables** (Cuando no existe el límite)
  - **De primera especie**
    - **De salto finito** (Existen los límites laterales de la función en x_0 pero no coinciden)
    - **De salto infinito** (Alguno de los límites, o los dos, vale $\pm\infty$)
  - **De segunda especie** (Alguno de los límites laterales, o los dos, no existe)





<u>DEF</u>: Se dice que una función es *continua* cuando es continua en todos los puntos de su dominio.

<u>DEF</u>: Continuidad en un intervalo: una función *f s*e dice que es continua en un intervalo (a,b) si es continua en todo los puntos de ese intervalo.
En el caso de que el intervalo sea cerrado [a,b], la continuidad de la función en el exigirá también la continuidad por la derecha en "a" y por la izquierda en "b", es decir:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

•<u>Continuidad de las funciones más usuales</u>.

a) Sean f y g funciones continuas en x=a. Se cumple que:

1) $f \pm g$ es continua en x=a.
2) $f \cdot g$ es continua en x=a.
3) $|f|$ es continua en x=a.
4) Si g(a)≠ 0, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x=a.

b) Las funciones polinómicas son continuas en todos los puntos.

c) Las funciones racionales son continuas en todo su dominio.

d) La función exponencial $e^{f(x)}$ es continua en todos los puntos donde es continua la función f.

e) La función logarítmica y = log (f(x)) es continua en todo x donde f(x)>0 y f sea continua.

f) Las funciones definidas a trozos serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión.

8.<u>Ejercicio</u>: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{2x+1}{2x^2+3x-2} \qquad b)\ g(x)=e^{\frac{1}{x}} \qquad c)\ h(x)=\log(x+1)$$

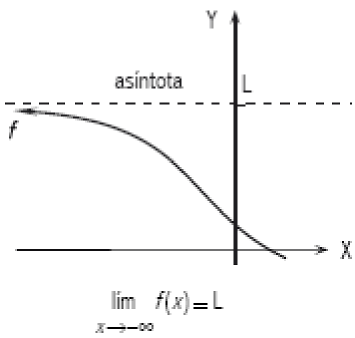
$$d)\ f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ -x+1 & si \quad 0\le x\le 2 \\ x^2-4x+2 & si \quad x>2 \end{cases} \qquad e)\ h(x)=\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$$

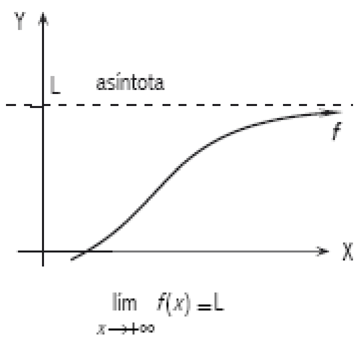
5.8 <u>ASÍNTOTAS</u>

Llamamos *asíntotas* de una función a las rectas a las cuales se aproxima la función infinitamente. Estas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

- **Asíntotas horizontales.**

Se dice que y=L es una *asíntota horizontal* de la función y=f(x) cuando: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$



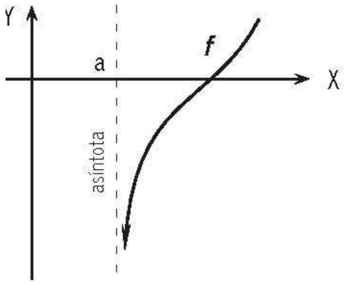


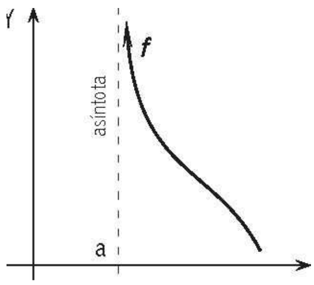
Para conocer la posición de la función con respecto a la asíntota, le damos valores grandes a x para comprobar si su imagen está por encima o por debajo de L, pudiendo saber así como se aproxima la curva a la asíntota.

- **Asíntotas verticales.**

Se dice que la recta x= a es una *asíntota vertical* de la función y=f(x) cuando:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty \quad o/y \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$$





Para conocer la posición de la curva con respecto a la asíntota hay que estudiar los límites laterales en x=a

- **Asíntotas oblicuas.**

  La recta y=mx+n es una asíntota oblicua de la función y=f(x) si y sólo si:

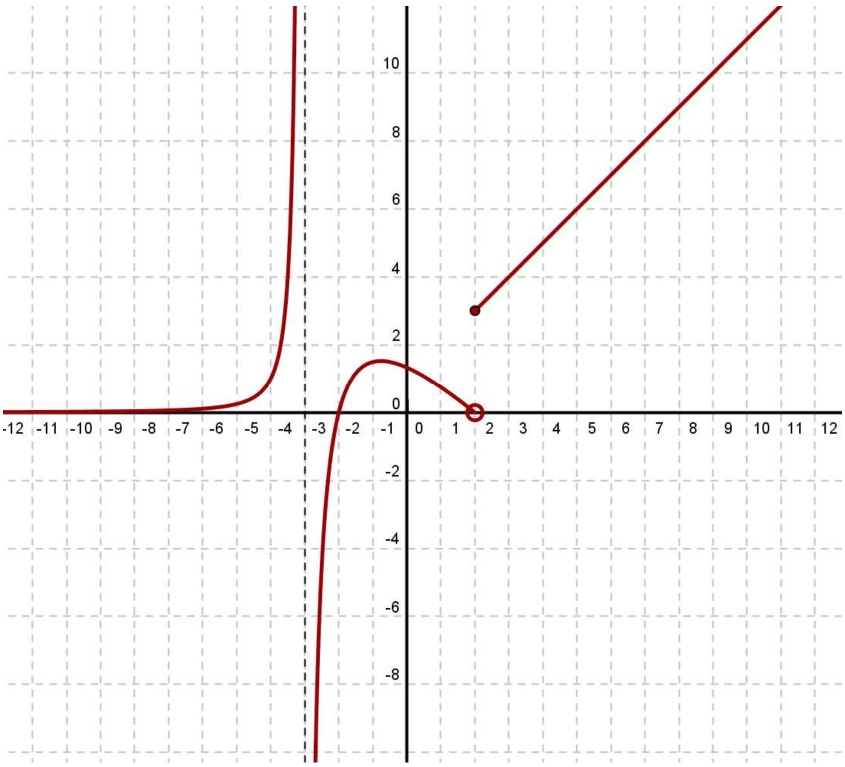
  Existe $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m \quad (\text{siendo m distinto de } 0 \text{ y de } \infty)$.

  En este caso: $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$

La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales u oblicuas, pero nunca a las verticales.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sobre la gráfica de la función f(x) completa los siguientes límites:



$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)=$ $\qquad$ f(-3)=

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ $\qquad$ f(0)=

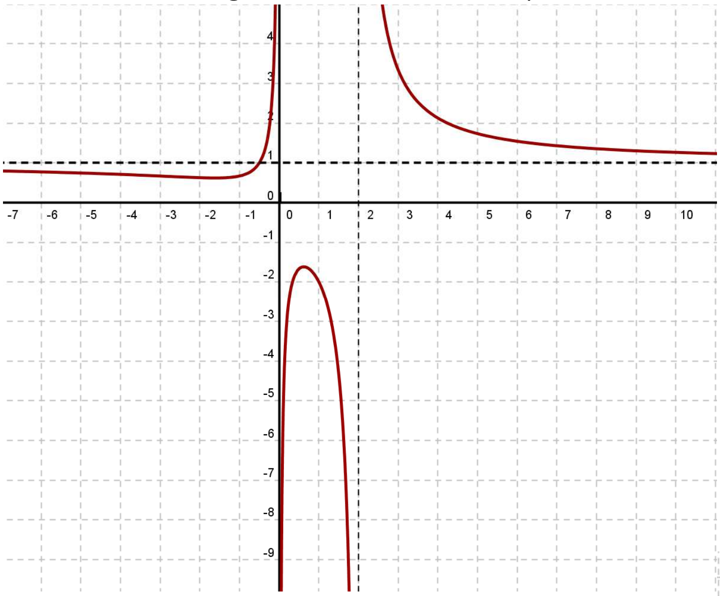
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$ $\qquad$ f(2)=

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=$

2. Sobre la gráfica de la función completa:



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ f(0)=

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

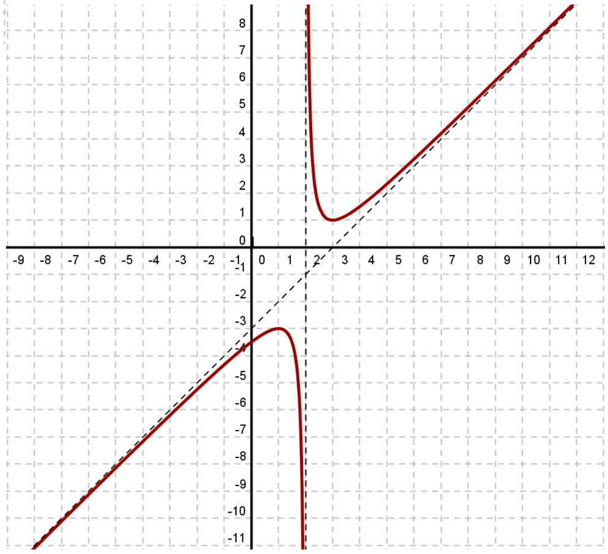
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ f(2)=

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

3. Sobre la gráfica de la función completa:



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ f(0)=

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

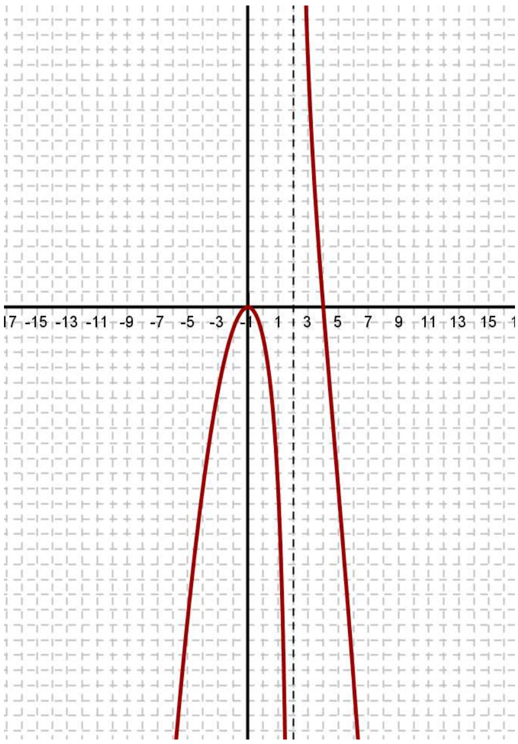
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ f(2)=

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

4. Sobre la gráfica de la función completa:



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ f(0)=

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$

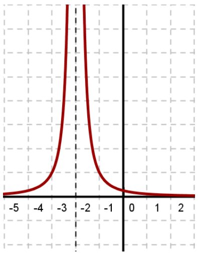
$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$

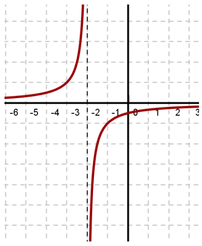
$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ f(3)=

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

5. En los dibujos se muestran las gráficas de las funciones $f_1(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ y $f_2(x)=\dfrac{-1}{x+2}$





Identifica cual es cada una de ellas e indica cual es su límite cuando $x \to -2$

6. Dibuja una función que verifique las siguientes características:
   a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$
   b. $f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$
   c. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty,\ f(2)=1$
   d. $f(2)=3,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$

7. Haz la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones:

a)

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

b)

$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$

c)

$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=+\infty$

8. Calcula los siguientes límites:
   a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{x}{2}\right)=$
   b. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1-x}{x-2}\right)=$
   c. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{10+x-x^2}=$
   d. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=$
   e. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x)=$
   f. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 2^x=$
   g. $\lim\limits_{x\to 4}\log_2 x=$
   h. $\lim\limits_{x\to -2} e^{x-1}=$

9. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x\le 0 \\ x+1 & si\ 0<x<5 \\ x^2-1 & si\ x>5 \end{cases}$, calcula:
   a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$
   b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$
   c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$
   d. $f(0)=$
   e. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=$
   f. $f(5)=$

10. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x^2-2x}=$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x}=$

c. $\lim_{a\to 0}\frac{3a^3-2a^2}{a^2}=$

d. $\lim_{b\to 0}\frac{b^2-7b}{4b}=$

11. Resuelve los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$

b. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+x}=$

c. $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}=$

d. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=$

e. $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}=$

f. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=$

g. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x+1}=$

h. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=$

i. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+1}{x+1}=$

12. Calcula:

a. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=$

b. $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+1}=$

c. $\lim_{x\to 3}\frac{3}{x-3}=$

d. $\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x+1}=$

13. Calcula el límite de la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2+x}$ en x = 3, x = 0, y x =-1.

14. Calcula en las siguientes funciones los límites cuando $x\to 0$, cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to -\infty$.

a. $f(x)=\frac{1}{x^2-10}$

b. $f(x)=\frac{100}{3x^2}$

c. $f(x)=-\frac{7}{\sqrt{x}}$

d. $f(x)=\frac{2}{10x^2-x^3}$

15. Calcula los siguientes límites en el infinito:

a. $\lim_{x\to\infty}(7+x+x^3)=$

b. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-10x-32}{5}=$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^4}{3}+\frac{x}{2}-17\right)=$

d. $\lim_{x\to\infty}(7-x)^2=$

e. $\lim_{x\to\infty}(x^3-10x)=$

f. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-4}=$

g. $\lim_{x\to\infty}\frac{3-x}{2}=$

h. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{-3}=$

i. $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{(x-1)^2}=$

j. $\lim_{x\to -\infty}(7+x+x^3)=$

k. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-10x-32}{5}=$

l. $\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{x^4}{3}+\frac{x}{2}-17\right)=$

m. $\lim_{x\to -\infty}(7-x)^2=$

n. $\lim_{x\to -\infty}\left(x^3-10x\right)=$

o. $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-4}=$

p. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3-x}{2}=$

q. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x}{-3}=$

r. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3}{(x-1)^2}=$

16. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x-4}=$

b. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=$

c. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}=$

e. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=$

f. $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^2-1}=$

g. $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=$

h. $\lim_{x\to -1}\frac{-x^5-1}{x^3}=$

17. Resuelve los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x^2}{3-x}=$

b. $\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{x^2-1}=$

c. $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{(2-x)^3}=$

d. $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{x+2}=$

e. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+5}{1-x}=$

f. $\lim_{x\to +\infty}\frac{2-3x}{x+3}=$

g. $\lim_{x\to +\infty}\frac{3-2x}{5-2x}=$

h. $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{(3x-1)^2}=$

i. $\lim_{x\to +\infty}\left[1-(x-2)^2\right]=$

j. $\lim_{x\to +\infty}\frac{1-x}{(2x+1)^2}=$

k. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+1}{5x}=$

l. $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=$

m. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x-1}=$

n. $\lim_{x\to +\infty}\frac{1-12x^2}{3x^2}=$

o. $\lim_{x\to +\infty}\left(10x-x^3\right)=$

p. $\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x^2}{3-x}=$

q. $\lim_{x\to -\infty}\frac{-1}{x^2-1}=$

r. $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{(2-x)^3}=$

s. $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{x+2}=$

t. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+5}{1-x}=$

u. $\lim_{x\to -\infty}\frac{2-3x}{x+3}=$

v. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3-2x}{5-2x}=$

w. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2}{(3x-1)^2}=$

x. $\lim_{x\to -\infty}\left[1-(x-2)^2\right]=$

y. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{(2x+1)^2} =$

z. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{5x} =$

aa. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} =$

bb. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} =$

cc. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-12x^2}{3x^2} =$

dd. $\lim_{x\to-\infty} \left(10x - x^3\right) =$

18.Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a. $\lim_{x\to0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} =$

b. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4} =$

c. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} =$

d. $\lim_{x\to0} \sqrt{x^2+x} - x =$

e. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x =$

f. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} =$

g. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+2).(x-3)} - x =$

h. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}.\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) =$

19.Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

b) $\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

c) $\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{\frac{x}{5}}-1}{x-5}$

d) $\lim_{x\to2} \left(\frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x}\right)$

e) $\lim_{x\to4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

f) $\lim_{x\to2} \sqrt{\frac{3x^2-4x-4}{x^2-2x}}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x-1} - 2\sqrt{x+2}\right)$

h) $\lim_{x\to1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$

i) $\lim_{x\to-2} \frac{x^4+x^3-x^2+x-2}{x^3-3x+2}$

j) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+1)\cdot(x-2)} - x$

k) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{2-x}$

l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x-3}{3-4x^3}$

m) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4}\right)$

n) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x-5}\right)^{3x-1}$

ñ) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-4}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

o) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+3x}{x^2-2}\right)^{x/2}$

p) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{2x^3-2x}{x^3}}$

q) $\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{1-3x}$

r) $\lim_{x\to\infty} \left(e^x - x^3\right)$

s) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{e^x}$

t) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\log x}{\log x}$

u) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^3+2}}$

v) $\lim_{x\to\infty} \left(|2x-1| + x\right)$

w) $\lim_{x\to-\infty} \left(|2x-1| + x\right)$

x) $\lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot2^x}{2^x+1}$

z) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x+1}}{2x}$

20. Determinar a para que se verifique: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$

21. Justificar si existe el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=$

Representar la función y justificar gráficamente el resultado analítico anterior.

22. Calcula los siguientes límites:

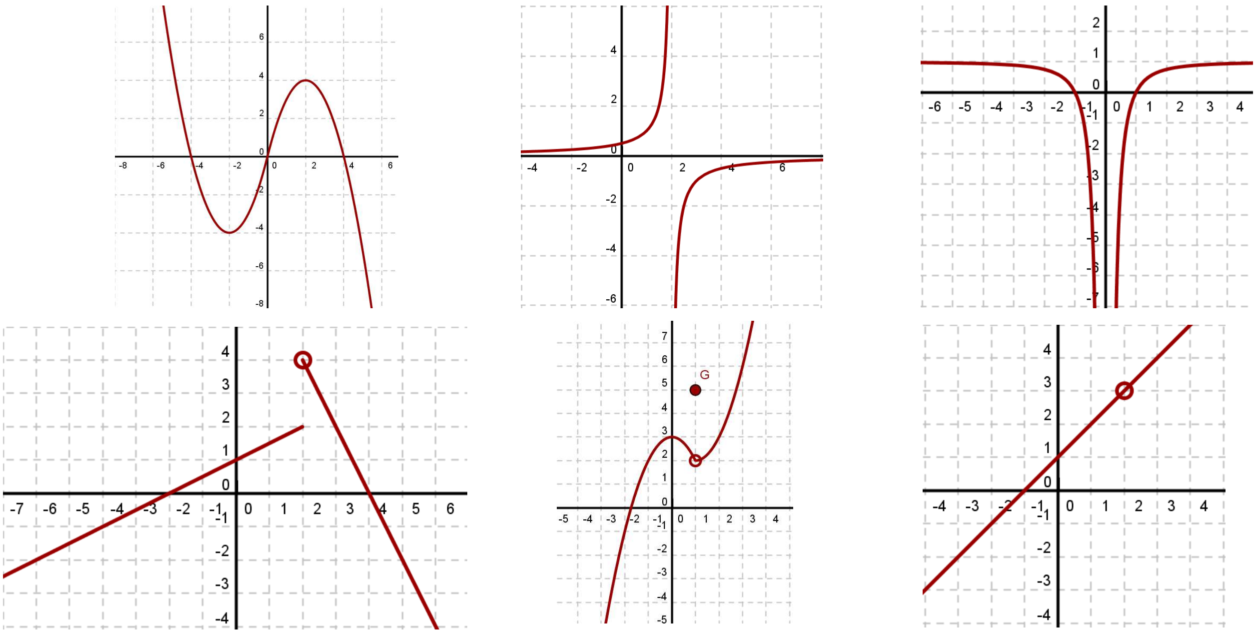
a. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}=$

b. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x}=$

c. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=$

d. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}=$

23. Observa las siguientes gráficas:



Señala cual de las gráficas corresponde a una función continua; en las que no lo sean describe sus discontinuidades.

24. Indica para que valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:

a. $y=x^2+x-6$

b. $y=\frac{1}{x^2+2}$

c. $y=\ln(-3x)$

d. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

e. $y=\sqrt{5-2x}$

f. $y=\frac{x}{(x-2)^2}$

25. Representa gráficamente las siguientes funciones y di si son continuas en x=1 (en caso de que no lo sean indica el tipo de discontinuidad que poseen).

$a)\ f(x)=\begin{cases}1-x^2 & si\ x\le 1\\ x-1 & si\ x>1\end{cases}$ $\quad b)\ f(x)=\begin{cases}x+2 & si\ x<1\\ 3 & si\ x>1\end{cases}$ $\quad c)\ f(x)=\begin{cases}x^2 & si\ x\ne 1\\ -1 & si\ x=1\end{cases}$

Determina en cada una de ellas el límite cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

26.Calcula en cada caso el valor de k para que la función f(x) sea continua en todo ℝ.

a. $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si\ x\le 3 \\ x+k & si\ x>3 \end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases} 6-\dfrac{x}{2} & si\ x<2 \\ x^2+kx & si\ x\ge 2 \end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & si\ x\ne 0 \\ k & si\ x=0 \end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases} k-x & si\ x<1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x\ge 1 \end{cases}$

27.Estudia la continuidad de las funciones:

$a)\ f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & si\ x\le 0 \\ 2^{x+1} & si\ x>0 \end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\begin{cases} -x-1 & si\ -1\ge x \\ 1-x^2 & si\ -1<x<1 \\ x-1 & si\ x\ge 1 \end{cases}$

28.Hallar y clasificar los puntos de discontinuidad de la función:

a) $p(x)=\begin{cases} 2^x & si\quad x\le 3 \\ \dfrac{5}{9-x^2} & si\quad x>3 \end{cases}$

b) $g(x)=\dfrac{x}{|x|}$

c) $y=\dfrac{\mathrm{Ln}\left(x^3-4x^2+5x-2\right)^2}{x+5}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & si\quad x<0 \\ |x-1| & si\quad x\ge 0 \end{cases}$

29.Estudia la continuidad de esta función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & si\quad x\le 0 \\ -x^2+14 & si\quad 0<x\le 3 \\ \sqrt{x^2+16} & si\quad x>3 \end{cases}$$

30.¿Qué valor debe tomar a para que las funciones sean continuas?

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si\quad x<-2 \\ a & si\quad x=-2 \\ -2x-7 & si\quad x>-2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} tx\dfrac{-\pi}{2x} & si\quad x\le -2 \\ \log(ax+7) & si\quad x>-2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & si\quad x\le -2 \\ ax-2 & si\quad x>-2 \end{cases}$

31. Hallar los parámetros para que sean continuas las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, & x<0 \\ ax+b, & 0\le x<1 \\ 2 & x\ge 1 \end{cases}$

b) $h(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & x\le \pi \\ 2x+b & x>\pi \end{cases}$

c) $g(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$

d) $p(x)=\dfrac{a\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$

e) $r(x)=\begin{cases} Lx & si \quad 0<x<1 \\ ax^2+b & si \quad 1\le x \end{cases}$

32. Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} |x+2| & si \quad x<-1 \\ x^2 & si \quad -1\le x<1 \\ 2x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

33. ¿Es continua la función $y=\pi/x$ en el intervalo [0,1]? ¿Está acotada en dicho intervalo? ¿Tiene máximo? ¿Tiene mínimo?

34. Calcula el valor de a para que las siguientes funciones sean continuas en x=1:

a. $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x\le 1 \\ 4-ax^2 & si\ x>1 \end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & si\ x\ne 1 \\ a & si\ x=1 \end{cases}$

35. Calcula a y b para que la función sea continua en toda la recta real:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & si\ x\le -1 \\ ax+b & si\ -1<x<1 \\ 2x+1 & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

36. En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizado por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $f(t)=\dfrac{30t}{t+4}$ (t en días). Contesta:

a. ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?
b. Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.
c. ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

37. Determina las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a. $y=\dfrac{2x}{x-3}$

b. $y=\dfrac{2}{1-x}$

c. $y=\dfrac{2x+3}{1-x}$

d. $y=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

e. $y=\dfrac{4x^2-3}{2x}$

f. $y=\dfrac{3}{x^2+1}$

g. $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$

h. $y=\dfrac{3+x-x^2}{x}$

i. $y=\dfrac{x^4}{x-1}$

j. $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

k. $y=\dfrac{-1}{(x+2)^2}$

l. $y=\dfrac{3x^2}{x+1}$

m. $y=\dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$

n. $y=\dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

38. Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos en los que se anula el denominador:

a. $f(x)=\dfrac{3x}{2x+4}$

b. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$

c. $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$

d. $f(t)=\dfrac{t^3-2t^2}{t^2}$

39. Determina las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a. $y=\dfrac{(3-x)^2}{2x+1}$

b. $y=\dfrac{5x-2}{2x-7}$

c. $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

d. $y=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

e. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

f. $y=\dfrac{3x^2}{x+2}$

40. Determina las ramas infinitas de estas funciones. Cuando tengan asíntotas, sitúa la curva:

a. $y=\dfrac{x^4-1}{x^2}$

b. $y=\dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$

c. $y=\dfrac{1}{9-x^2}$

d. $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$

e. $y=\dfrac{2x^2}{x+3}$

f. $y=\dfrac{x^3}{2x-5}$

41. Prueba que la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ sólo tiene una asíntota horizontal y otra vertical.

42. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}$

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

d. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1}$

e. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2}$

f. $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

43. Determina las asíntotas de estas funciones:

a. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

b. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$

c. $y=\dfrac{2x^2+5}{x^2-4x+5}$

d. $y=\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$

e. $y=x+\dfrac{4}{x-5}$

f. $y=x+1+\dfrac{5}{x}$

44. Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:

a. $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<3\\ 5-x & si\ x\geq 3\end{cases}$ b. $f(x)=\begin{cases}1 & si\ x\leq 3\\ x^2+1 & si\ x>3\end{cases}$ c. $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & si\ x<2\\ 1 & si\ x>2\end{cases}$

Calcula los límites de las funciones anteriores en x=-2 y en x=2.
Determina también, en cada una de ellas, el límite cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

45. Calcula los límites cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$ de las siguientes funciones:

a. $f(x)=2^{x-1}$

b. $f(x)=0.75^x$

c. $f(x)=1+e^x$

d. $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$

e. $f(x)=2^{x+3}$

f. $f(x)=1.5^x-1$

g. $f(x)=2+e^x$

h. $f(x)=e^{-x}$

46. Representa una función que verifique estas condiciones:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to 1^+}f(x)=-\infty$

La función que representante, ¿es discontinua en algún punto? En caso afirmativo, indica en cual e indica que tipo de discontinuidad posee.

47. ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que no está definida? ¿Puede la función ser continua en dicho punto?

48. ¿Puede una función tener más de dos asíntotas verticales? ¿Y más de dos asíntotas horizontales? Pon ejemplos si es posible.

AUTOEVALUACIÓN 6

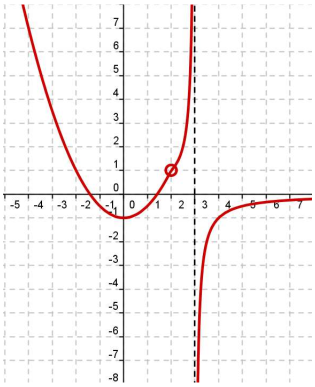
1. Calcula el límite de $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & si\ x\le 3 \\ x^2-x-7 & si\ x>3 \end{cases}$ en los puntos de abscisa 0, 3 y 5.

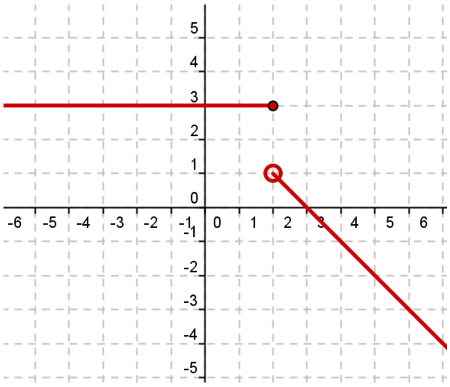
Di si la función es continua en dichos puntos.

2. Determina los siguientes límites:

$$a)\lim_{x\to 0} 2^{x-1} = \qquad b)\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \qquad c)\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-4)^2} =$$

3. Sobre la gráfica de las funciones determina los límites que se indican:





$$\lim_{x\to 3} f(x) = \quad ; \quad \lim_{x\to 2} f(x) = \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) =$$

Estudia además la continuidad de las funciones indicando los puntos y tipos de discontinuidad

4. Indica las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2-2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.

5. Justifica que valor debe tomar **a** para que la función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} ax-2 & si\ x\le 1 \\ 4x-2a & si\ x>1 \end{cases}$$

6. Determina el límite de $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x^2-5x+6}$ cuando $x\to 3$; $x\to 2$; $x\to +\infty$; $x\to -\infty$ y representa la información que obtengas.

7. Representa una función que verifique las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$$

8. Estudia las ramas infinitas de $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+4}$ y sitúa la curva respecto a su asíntota.

AUTOEVALUACIÓN 7

1. Calcular los siguientes límites:
   a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=$ $\{Sol: 2\sqrt{2}\}$
   b. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$ $\{Sol: 1\}$

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+m & si\ x\le 1 \\ \ln x & si\ x>1 \end{cases}$ determinar el valor de m para que la función sea continua en toda la recta real. $\{Sol: m=1\}$

3. Sea la función $f(x)=\dfrac{3x^2-3x}{1-x^2}$
   a. Encontrar los puntos de discontinuidad de f. $\{Sol: x=1, x=-1\}$
   b. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable. $\{Sol: x=1\}$
   c. Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical. $\{Sol: x=-1\}$

4. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x} & si\ x\ge -1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & si\ x<-1 \end{cases}$
   a. Estudiar el dominio y la continuidad de f. $\{Sol: \Re-\{0\}\}$
   b. Hallar las asíntotas de la gráfica de f. $\{Sol: x=0, y=2, y=x+3\}$

5. Dibujar la gráfica de una función real que cumpla lo siguiente:
   i. Sea continua en todos los puntos.
   ii. Sea lineal si x<3.
   iii. Sea cuadrática en el intervalo [-3,3].
   iv. Tienda a cero cuando $x\to\infty$

AUTOEVALUACIÓN 8

1. Calcula los siguientes límites:

   a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=$ $\left\{Sol:\frac{1}{8}\right\}$

   b. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=$ $\left\{Sol:\frac{1}{2}\right\}$

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x-2 & si\ x<-1\\ a-2x^2 & si\ -1\le x\le 1\\ \dfrac{b}{x} & si\ x>1\end{cases}$ determinar los valores de a y b para que f(x) sea continua en toda la recta real. $\{Sol: a=1, b=-1\}$

3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$

   a. Encontrar los puntos de discontinuidad de f. $\{Sol: x=1, x=-1\}$

   b. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable. $\{Sol: x=1\}$

   c. Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical. $\{Sol: x=-1\}$

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$; se pide:

   a. Especificar su dominio. $\{Sol: \Re-\{2,-3\}\}$

   b. Estudiar su continuidad.

   c. Calcular las asíntotas si las hubiera. $\{Sol: x=2, x=-3, y=-x/2+1\}$

5. Dibuja la gráfica de una función f que verifique:

i. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$	iv. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$	vii. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=0$
ii. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$	v. $f(1)=1$	viii. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$
iii. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-2$	vi. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$	