BLOQUE 4:

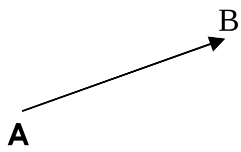
GEOMETRÍA

- Vectores
- La recta en el plano
- Cónicas

4.1 VECTORES

Hay magnitudes que no quedan bien definidas mediante un número; necesitamos conocer además su dirección y su sentido. A estas magnitudes se les llama magnitudes vectoriales, y las representamos mediante vectores.

Un vector $\vec{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B



Para determinar un vector tenemos que conocer su módulo, dirección y sentido.

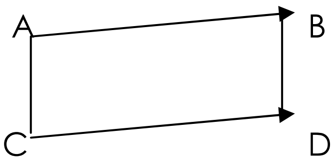
<u>Módulo del vector</u> $\vec{AB}$ es la longitud del segmento $\overline{AB}$. El módulo del vector $\vec{AB}$ se representa por $|\vec{AB}|$.

<u>Dirección del vector</u> $\vec{AB}$ es la dirección de la recta que pasa por A y B.

<u>Sentido del vector</u> $\vec{AB}$ es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B. (Observa que en cada dirección hay dos sentidos, el que va de A hacia B y el que va de B hacia A).

EQUIPOLENCIA DE VECTORES

Dados dos vectores diremos que son equipolentes si tienen la misma longitud, dirección y sentido.



Vectores equipolentes

Todos los vectores equipolentes entre si representan el mismo vector, que llamaremos vector libre.

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, llamamos combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al vector $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, donde λ y μ son números reales.

VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Un conjunto de vectores son linealmente dependientes si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás. En caso contrario, decimos que son linealmente independientes.

BASE

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base en el plano si son linealmente independientes y cualquier vector se puede poner como combinación lineal de ellos. Se denota B = $\left\{\vec{u}, \vec{v}\right\}$

En el plano, dos vectores con distinta dirección forman una base.

COORDENADAS DE UN VECTOR

Un vector $\vec{w}$ se puede poner siempre como combinación lineal de los vectores de la base B = $\left\{\vec{u}, \vec{v}\right\} \rightarrow a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$. Los números (a,b) son las coordenadas del vector $\vec{w}$ respecto de la base B.

SISTEMA DE REFERENCIA

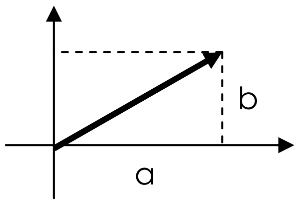
Un sistema de referencia en el plano está formado por un punto fijo O y una base $\left\{\vec{u}, \vec{v}\right\}$

Los vectores de una base pueden ser perpendiculares, en ese caso hablamos de una base ortogonal. Si, además, tienen módulo 1, la base es ortonormal.

Por lo general trabajaremos con una base ortonormal: $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$

MÓDULO DE UN VECTOR DADO EN COORDENADAS.

Sea el vector $\vec{u}$ de coordenadas (a, b).



Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

VECTORES PARALELOS

Dos vectores son paralelos cuando tienen la misma dirección.

En coordenadas: $\vec{u} = (u_1, u_2)\ \ y\ \ \vec{v} = (v_1, v_2)$ son paralelos si $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2}$

COORDENADAS DE UN VECTOR DADO POR LOS EXTREMOS

Sea el vector de origen A(a_1, a_2) y de extremo B(b_1, b_2), las coordenadas de $\vec{AB}$, vienen dadas por $\vec{AB}$ =($b_1 - a_1, b_2 - a_2$)

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Sean los puntos A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2).

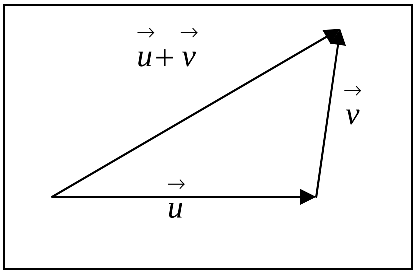
$$\text{Distancia de A a B} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2) son $M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$

OPERACIONES CON VECTORES.

- **Adición de vectores:** Para sumar dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se representa uno de ellos $\vec{u}$ y con origen en el extremo de $\vec{u}$, se representa el otro vector $\vec{v}$. El vector suma es el que tiene el origen de $\vec{u}$ y el extremo de $\vec{v}$.



Otra forma de sumar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ consiste en representar ambos vectores con el mismo origen. El vector suma se obtiene como la diagonal del paralelogramo que tiene por lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si el vector $\vec{u}$ tiene de coordenadas (x,y) y el vector $\vec{v}$ tiene de coordenadas (x',y'), entonces:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

- **Producto de un número por un vector:** Al multiplicar un vector $\vec{u}$ por un número k obtenemos un nuevo vector k·$\vec{u}$ que tiene:
  - módulo igual al del vector $\vec{u}$ por el valor absoluto del número k.
  - dirección la misma que el vector $\vec{u}$
  - sentido el mismo que $\vec{u}$ si k es positivo. El contrario que $\vec{u}$, si k es negativo.

  Si el vector $\vec{u}$ tiene de coordenadas (x,y) entonces:

$$k\cdot\vec{u} = k\cdot(x,y) = (kx, ky)$$

4.2 PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano. Se define el producto escalar como:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$ siendo α el ángulo que forman.

PROPIEDADES

- Si $\vec{u} = 0$ o $\vec{v} = 0$ entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Asociativa: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$
- Si $\vec{u} \neq 0$ y $\vec{v} \neq 0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares ($\perp$) si y sólo si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

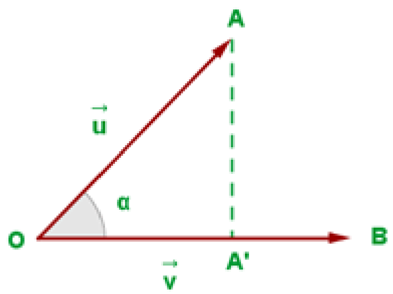
EXPRESIÓN ANALÍTICA

Sean los vectores $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$. Definimos su producto escalar como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El producto escalar de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$$\cos\alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \qquad OA' = |\vec{u}| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot OA' \qquad OA' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

ÁNGULO QUE FORMAN DOS VECTORES

Despejando en la definición del producto escalar, obtenemos que:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

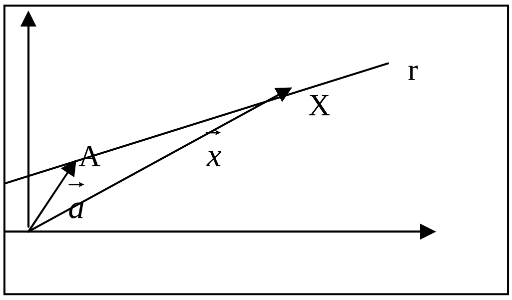
VECTORES PERPENDICULARES

Un vector perpendicular a $\vec{u}(u_1, u_2)$ es $\vec{n}(-u_2, u_1)$

4.3 ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Sea A un punto de la recta r y sea $\vec{u}$ su vector dirección.



Dado cualquier otro punto X de la recta, se cumple que:

$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}$ con t ∈ R

Observando la figura, se obtiene que:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}, \quad \textbf{con } t \in \mathbf{R}}$$

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA:

Un punto del plano queda determinado por dos coordenadas.
Sea X = (x,y) y A = (x_1, y_1)

Sustituyendo en la ecuación vectorial:

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$$

los vectores por sus coordenadas cartesianas, queda:

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(u_1, u_2)$$

e igualando términos:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + t \cdot u_1 \\ y = y_1 + t \cdot u_2 \end{cases} \text{con } t \in \mathrm{R}}$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA

ECUACIÓN CONTINUA DE LA RECTA:

Despejando el parámetro en las ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x - x_1}{u_1} \\ t &= \frac{y - y_1}{u_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2}}$$

ECUACIÓN CONTINUA

Si $u_1 = 0$ la recta tendrá la forma x = x_1. Si $u_2 = 0$ la recta tendrá la forma y = y_1.

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA:

Operando en la ecuación continua, tenemos:
$u_2(x-x_1)=u_1(y-y_1) \Leftrightarrow u_2x-u_1y-u_2x_1+u_1y_1=0$

Llamamos A = u_2 , B = -u_1, C= $u_1y_1-u_2x_1$ y tenemos:

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

ECUACIÓN GENERAL

Observa que el vector dirección es $\vec{u}$ =(-B, A)

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS:

Dados dos puntos del plano hay una única recta que pasa por ellos. Vamos a determinarla:

Sean A = (x_1, y_1) y B = (x_2, y_2) dos puntos del plano. ¿Cuál será la dirección de la recta que pasa por A y por B? Lo más sencillo es tomar el vector $\vec{AB}$ como vector dirección:

$$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$$

Así, las distintas ecuaciones de la recta son:

- Ecuación vectorial: $\vec{x}=(x_1,y_1)+t\overrightarrow{AB}$
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1) \\ y=y_1+t(y_2-y_1) \end{cases}$ t ∈ R
- Ecuación continua: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE:

Consideremos la recta r que pasa por el punto A = (x_1, y_1) y lleva la dirección del vector $\vec{u}=(u_1,u_2)$; la ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$$

Esta ecuación sólo es posible usarla cuando $u_1 \neq 0 \neq u_2$. En este caso obtenemos la expresión:

$$y-y_1=\frac{u_2}{u_1}(x-x_1)$$

Al número $\dfrac{u_2}{u_1}$ se le llama “pendiente” de la recta, y se representa por m. Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$ **ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE**

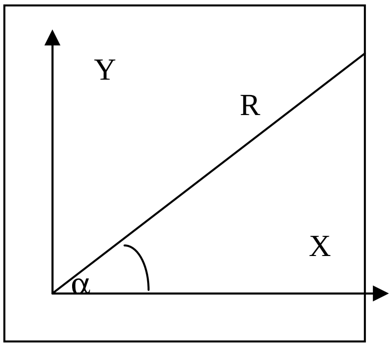
¿Cuál es el significado geométrico de la pendiente?

Acabamos de ver que la recta que pasa por A y lleva la dirección de $\vec{u} = (u_1, u_2)$ tiene como pendiente $m = \frac{u_2}{u_1}$.

Ahora bien, $m = \frac{u_2}{u_1}$ = tx α, siendo α el ángulo que forma la parte positiva del eje de abscisas con el vector director de la recta.

Como la recta r es siempre paralela a su vector director, se deduce que:

La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que forma la parte positiva del eje de abscisas con la recta.



La pendiente de una recta también se puede calcular si nos dan la ecuación general: Ax+By+C=0. Teniendo en cuenta que el vector director viene dado por $\vec{u}$ =(-B, A) y que $m = \frac{u_2}{u_1}$ obtenemos que $m = \frac{-A}{B}$.

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

Si en la ecuación general de la recta Ax+By+C = 0 despejamos "y" obtenemos la ecuación de la recta en forma explícita:

$$y = \frac{-A}{B}x + \frac{-C}{B}$$

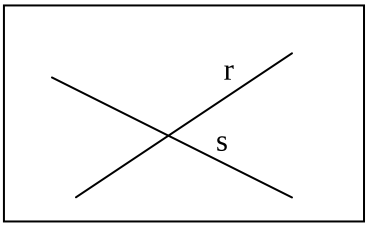
que normalmente se escribe:

$$\boxed{y = mx + n}$$

donde m representa la pendiente y n la ordenada en el origen.

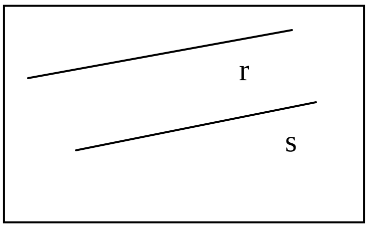
4.4 POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO

Si trazamos dos rectas cualquiera en el plano, puede ocurrir que:



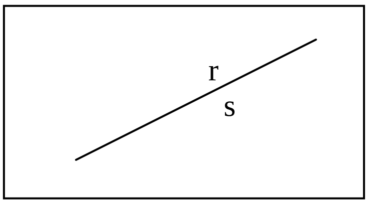
- Sean secantes, es decir, se cortan.
- Sean paralelas.
- Sean coincidentes.

A la vista de las figuras del margen, está claro que:



- Dos rectas son secantes si sólo tienen un punto en común.
- Dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto en común.
- Dos rectas son coincidentes si tienen todos los puntos comunes.

Para averiguar si las rectas son secantes, paralelas o coincidentes hallaremos su intersección resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones, de manera que:



- Si tiene una solución, las rectas se cortan.
- Si no tiene solución, las rectas son paralelas.
- Si tiene infinitas soluciones, las rectas son coincidentes.

¿Podemos saber la posición relativa de las dos rectas sin necesidad de resolver el sistema que forman?

Sean las rectas r y s de ecuaciones: Ax+By+C = 0 y A'x+B'y+C' = 0.
Las pendientes y las ordenadas en el origen de ambas rectas son:

$$m = \frac{-A}{B} \qquad m' = \frac{-A'}{B'} \qquad n = \frac{-C}{B} \qquad n' = \frac{-C'}{B'}$$

1.- Las rectas r y s son coincidentes si sus pendientes y sus ordenadas en el origen son iguales, es decir:

$$m = m' \Leftrightarrow \frac{-A}{B} = \frac{-A'}{B'} \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

$$n = n' \Leftrightarrow \frac{-C}{B} = \frac{-C'}{B'} \Leftrightarrow \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'}$$

$$\boxed{\text{r y s coincidentes} \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}}$$

2.- Las rectas r y s son paralelas si sus pendientes son iguales, y sus ordenadas en el origen son distintas, es decir:

$$m = m' \Leftrightarrow \frac{-A}{B} = \frac{-A'}{B'} \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

$$n \neq n' \Leftrightarrow \frac{-C}{B} \neq \frac{-C'}{B'} \Leftrightarrow \frac{C}{C'} \neq \frac{B}{B'}$$

r y s paralelas $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

3.- Las rectas r y s son secantes si sus pendientes son distintas, es decir:

$$m \neq m' \Leftrightarrow \frac{-A}{B} \neq \frac{-A'}{B'} \Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

r y s secantes $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

ÁNGULO QUE FORMAN DOS RECTAS.

Definimos el ángulo que forman dos rectas como el menor de los dos ángulos que forman. Para calcularlo hallamos el coseno del ángulo que forman sus vectores directores, tomando el valor absoluto.

RECTAS PERPENDICULARES.

Dada la recta r=Ax+By+C=0 su vector director viene dado por (-B,A).
Utilizando la propiedad 4 del producto escalar, tenemos que los vectores perpendiculares a (-B, A) son de la forma (A, B).
Así pues, son perpendiculares a r todas las rectas que tienen a (A, B) como vector director.
Si dos rectas son perpendiculares sus pendientes cumplen: $m' = \frac{-1}{m}$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La distancia de un punto P = (x_0, y_0) a la recta Ax + By + C = 0 se expresa:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

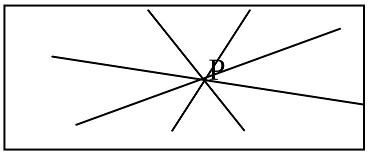
DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Si las rectas son secantes o coincidentes, la distancia es 0.
Si las rectas son paralelas, se toma un punto de una de ellas y se calcula su distancia a la otra recta.

4.5 HAZ DE RECTAS SECANTES:

Se llama haz de rectas de vértice $P(x_0,y_0)$, al conjunto de todas las rectas del plano que pasan por el punto P. Su ecuación es:

$y-y_0 = m(x-x_0)$, siendo m un número real



Para cada valor de m se obtiene una recta que pasa por $P(x_0 ,y_0)$.

¿Y si el punto viene determinado mediante dos rectas que se cortan?

Sean las rectas de ecuaciones:

r: Ax+By+C=0, s: A’x+B’y+C’=0

que suponemos se cortan en el punto $P(x_0,y_0)$.

La ecuación:

$$\alpha(Ax+By+C)+\beta(A'x+B'y+C)=0$$

representa el haz de rectas de vértice P, ya que al variar α y β se obtienen rectas que pasan por el punto P(x0,y0), pues sus coordenadas verifican la ecuación:

$$\alpha(Ax_0+By_0+C)+\beta(A'x_0+B'y_0+C')=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

Si dividimos por uno de los parámetros que sea no nulo, se tiene:

$$Ax+By+C+\frac{\alpha}{\beta}(A'x+B'y+C')=0$$

y llamando $k=\dfrac{\alpha}{\beta}$, resulta:

$$\boxed{Ax+By+C+k(A'x+B'y+C')=0}$$

siendo k un número real.

4.6 HAZ DE RECTAS PARALELAS:

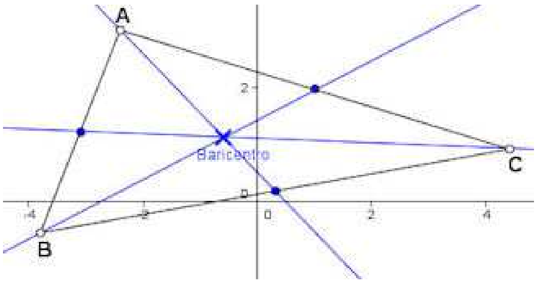
Se llama haz de rectas paralelas a la recta r: Ax+By+C=0 al conjunto de todas las rectas del plano que son paralelas a r. Su ecuación es:

Ax+By+k=0, siendo k un número real.

4.7 RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

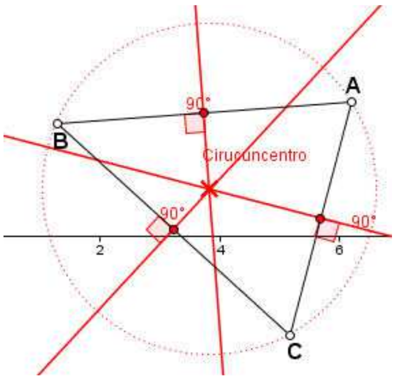
MEDIANAS Y BARICENTRO

Se llama mediana a la recta que une un vértice con la mitad del lado opuesto. En un triángulo ABC, las tres medianas se cruzan en un punto G llamado **Baricentro** que es el centro de gravedad del triángulo. Cada mediana divide al triángulo en dos triángulos de igual área. Además el Baricentro dista doble del vértice que del punto medio del lado.



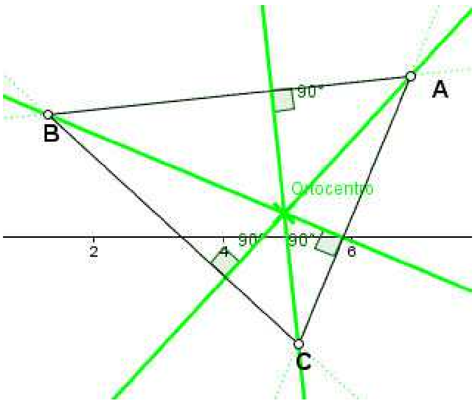
MEDIATRICES Y CIRCUNCENTRO

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular en su punto medio. Las mediatrices de un triángulo son las mediatrices de sus lados. El punto O donde se cortan las tres mediatrices se llama **Circuncentro** y equidista, es decir, está la misma distancia de los tres vértices A, B y C, es por eso que pertenece a las tres mediatrices. La circunferencia que pasa por los tres vértices se llama **Circunferencia Circunscrita.**



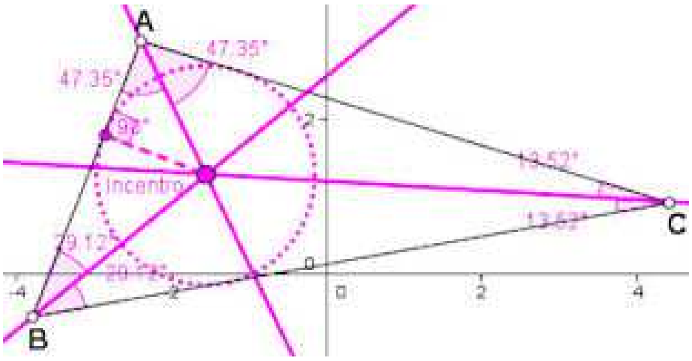
ALTURAS Y ORTOCENTRO

Se llama altura en un triángulo a la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto. En un triángulo ABC, las tres alturas se cruzan en un punto llamado **Ortocentro**.



BISECTRICES E INCENTRO

Se llama bisectriz a la recta que divide un ángulo en dos partes iguales. Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos. El punto I donde se cortan las tres bisectrices interiores se llama **Incentro**, equidista de los tres lados y por eso podemos construir una circunferencia de centro I tangente a los lados del triángulo. Dicha circunferencia se llama **Circunferencia Inscrita** y es la circunferencia más "grande" que se puede definir completamente contenida dentro del triángulo.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.-Razona que pares de vectores forman una base:

$a)\vec{u} = (2,-3) \quad y \quad \vec{v} = (5,4)$

$b)\vec{u} = (0,-3) \quad y \quad \vec{v} = (4,1)$

2.- Dados los puntos A(0,3), B(2,1), C(-2,2) y D(-3,4). Calcula los vectores:

$a)\ \vec{AB} - \vec{CD} \qquad b)\ \vec{AC} + \vec{DC} \qquad c)\ \vec{BD} - \vec{CA}$

3.-Si, respecto de una base, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u}$ = (2, −3) y $\vec{v}$ = (5, 4), halla las coordenadas de los siguientes vectores:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$ e) $-3\vec{u} - \vec{v}$

b) $5\vec{u} + 2\vec{v}$ d) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ f) $-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

4.-Dados $\vec{u}$ = (2,-1) y $\vec{v}$ = (0,3), realiza las siguientes operaciones de vectores:

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$ b) $5\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

5.-Calcula el punto medio del segmento de extremos A(1,2) y B(-3,-2).

6.-Encuentra el simétrico del punto A(1,2) respecto de C(3,0).

7.-Calcula el módulo de los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}+\vec{b}, 2\vec{b}-\vec{c}$, dados:

$\vec{a} = (-3,4), \ \vec{b} = (-5,-12) \ e \ \vec{c} = (3,-1)$

8.-Dados los puntos A(2,1) y B(1,2). Calcular:

a) Las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$

b) Sus módulos.

9.- Calcula el producto escalar, módulos y ángulo de los siguientes vectores:

$a)\vec{u}(3,4) \qquad \vec{v}(-4,3)$

$b)\vec{x}(1,3) \qquad \vec{y}(3,-1)$

$c)\vec{u}(-1,6) \qquad \vec{v}(3,5)$

$d)\vec{u}(-3,2) \qquad \vec{v}(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

$e)\vec{x}(1-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \qquad \vec{y}(1+\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$f)\vec{u}(2\sqrt{2},-2) \qquad \vec{v}(\sqrt{2},-1)$

10.-Calcular **a** para que el producto escalar de $\vec{x}(a,1)$ por $\vec{y}(2,-3)$ sea la unidad.

11.-Hallar m, sabiendo que $\vec{u}(m,5)$ y $|\vec{u}| = 13$

12.- Sean los vectores $\vec{u}(3,-1) \ y \ \vec{v}(a,2)$. Calcula el valor de **a** para que el vector $\vec{v}$ tenga la misma dirección que el vector $\vec{u}+\vec{v}$

13.- Halla la proyección del vector $\vec{u}(2,-5)$ sobre el vector $\vec{v}(5,1)$

14.-Dados $\vec{u}(3,4)\ \ y\ \ \vec{v}(2,-3)$, calcula las componentes de un vector $\vec{x}$, sabiendo que $\vec{u}\cdot\vec{x}=0 \quad y \quad \vec{v}\cdot\vec{x}=1$

15.-Encuentra un vector $\vec{u}$ que es perpendicular a $\vec{v}$ =(3,5) y cuyo módulo sea $\left|\vec{u}\right| = 2\sqrt{34}$

16.-Calcula m para que $\vec{v}$ = (7,-2) y $\vec{w}$=(m,6):
a) Sean perpendiculares.
b) Sean paralelos.
c) Tengan el mismo módulo.

17.-Calcula el ángulo que forman los vectores:

$a)\ \vec{a}=(-1,5)\ \ y\ \ \vec{b}=(3,2)$

$b)\ \vec{c}=(1,\sqrt{3})\ \ y\ \ \vec{d}=(-1,\sqrt{3})$

$c)\ \vec{e}=(-6,4)\ \ y\ \ \vec{f}=(-9,6)$

$d)\ \vec{g}=(2,-5)\ \ y\ \ \vec{h}=(4,6)$

18.-Calcula **m** para que los vectores $\vec{a}=(8,-6)$ y $\vec{b}=(m,3)$ formen un ángulo de 60º.

19.-Calcula $\lambda\ \ y\ \ \mu$ para que los vectores $\vec{u}$ = (5, 1), $\vec{v}$ = (-1, 4) y $\vec{w}$= (13, 11) verifiquen $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{w}$

20.- Representa las rectas dadas por las ecuaciones:

$a)\ y=2$

$b)\ y=-3$

$c)\ x=-4$

$d)\ 2x+3y-7=0$

$e)\ 5x-7=0$

$f)\ y=-3x+2$

$g)\ y=-5x+2$

$h)\begin{cases} x=3-t \\ y=-5+2t \end{cases}$

$i)\begin{cases} x=-t \\ y=1+t \end{cases}$

$j)\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}$

$k)\ \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-7}{2}$

21.-Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto A(3,5) y lleva la dirección del vector $\vec{u}$ =(2,-4) en forma paramétrica y general.

22.-Dada la recta de ecuación vectorial $\vec{x}=(3,2)+t(9,-1)$, halla las otras formas distintas de la ecuación de la recta.

23.-Dada la recta de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=-3+t \\ y=2-5t \end{cases}$, hallar las otras formas distintas de la ecuación.

24.-Lo mismo para la recta de ecuación en forma continua $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+5}{4}$, y la recta de ecuación en forma general 5x-7y-2=0.

25.-Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(3,1) y B(5,-2). ¿Cuál es su ordenada en el origen? ¿Qué representa?

26.-Determina si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.

27.-Determina el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

$a) r:(x,y)=(3,2)+t(2,5) \qquad s:(x,y)=(0,1)+t(-3,2)$

$b) r:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{4} \qquad s: x-2=\dfrac{y}{4}$

$c) r: 3x-2y=0 \qquad s: 3x+4y+1=0$

28.-Halla la distancia del punto A(2,-4) a la recta $(x,y)=(1,-5)+t(2,3)$

29.-Halla la distancia entre las rectas $r:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{4} \quad y \quad s: 2x-y+13=0$

30.-Halla la recta que pasa por el punto (2,12) y es perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

31.-Halla las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento A(4,1), B(-2,4) en tres partes iguales.

32.-Las rectas $r: 3x+2y-1=0 \quad y \quad s: x+ky-2=0$, forman un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ rad. Halla k.

33.-Sea el cuadrilátero de vértices A(2,1), B(4,3), C(3,7) y D(-1,2). Calcula las ecuaciones de los lados.
Calcula además las ecuaciones de sus diagonales.

34.-Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2, $\dfrac{1}{3}$) y tiene igual pendiente que la recta -x+y+3=0.

35.-Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de 90^0 con la parte positiva del eje de abscisas.

36.-¿Cuánto tiene que valer el parámetro h para que el punto (h,3) pertenezca a la recta de ecuación 2x+3y-7=0?

37.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas 3x+4y-10=0, 4x-3y-5=0 y por el punto P(2,-3).

38.-Dadas las rectas 3x+my-7=0; 4x+y-14=0; 7x+2y-28=0, determina **m** para que las tres sean rayos de un mismo haz.

39.-Hallar la ecuación de la recta que pertenece al haz determinado por las rectas 3x+2y+2=0; x-2y+8=0, y pasa por el punto P(-5,7).

40.-Las rectas mx+2y=3; 5x+ny=7 se cortan en el punto (-1,3). Calcula **m** y **n**.

41.-Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas de ecuaciones 4x+6y-5=0; x-2y-3=0, y es paralela a la recta de ecuación 4x-5y-12=0.

42.-Hallar el valor de **k** para que las rectas 2x-3y+7=0 y kx+y-2=0 sean paralelas.

43.- Determina la posición relativa de las siguientes rectas:

$$a)\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ x+2y+4=0 \\ 3x+3y+3=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+2y=11 \\ 3x-y=5 \\ 2x+3y=18 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3x-2y=0 \\ 3x+2y-5=0 \end{cases}$$

44.- Calcula la recta que pasa por el punto A(5,-3) y por el punto medio del segmento que tiene como extremos los puntos P(1,3) y Q(-4,5).

45.- Calcula la recta que, pasando por el origen de coordenadas, es perpendicular a la recta 3x-2y+3=0.
¿Cuál es la condición para que dos rectas sean perpendiculares?

46.-Encuentra el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos P(-1,4) y Q(3,8) y la recta $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{8}$.

47.-Encuentra el valor de **m** para que y = mx -1 forme un ángulo de 45º con $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-3}{6}$

48.-Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por (-3,6) y es paralela a $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{8}$

49.-Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento si sus extremos son (1,5) y (-3,-7).

50.-Halla la ecuación de las bisectrices de las rectas r y s de ecuaciones

r: 4x – 3y + 1 = 0 s:5x +12y – 4 = 0

Comprueba que son perpendiculares.

51.- Dados los puntos O(0, 0), A(2, 0) y B(5, 4), hallar:
La ecuación de la recta AB.
El coseno del ángulo (AOB).

52.- Los puntos A(-2, 5), B(-1, 2) y C(5, 4) son vértices de un rectángulo. Calcula:
a) Las coordenadas del cuarto vértice.
b) El centro del rectángulo.
c) La longitud de la diagonal.

53.- En un sistema de coordenadas ortogonales, el eje OX y las tres rectas:

y=1; x+2y-2=0; x+2y-6=0

limitan un cuadrilátero. Hallar su área, las ecuaciones de sus diagonales y las coordenadas del punto de intersección de estas.

54.- Dada la recta 2x+y-3=0, hallar la recta perpendicular a ésta que pasa por el punto (1,2).

55.- La recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llama mediana. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(-1, 4), B(7, 4) y C(2, 0) y comprueba que las tres medianas se cortan en un punto (baricentro).

56.- Dado el triángulo de vértices A(7,-7), B(1,-5) y C(3,1), calcula:
a) La longitud de sus tres medianas.
b) La longitud de la altura que pasa por A.
c) Su ortocentro.
d) El baricentro.
e) La ecuación de la mediatriz del lado BC.

57.-Calcula la distancia entre las rectas r: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}$ y s: 6x –4y + 1 = 0.

58.-La recta r: x – 2y + 4 = 0 forma con los ejes de coordenadas un triángulo del que se pide su área.

59.-Halla el punto simétrico de A(3,2) respecto de la recta r:2x +y –12 =0.

60.-Dado el triángulo de vértices A(6,-5), B(1,-4) y C(4,2), calcula:
a) El baricentro.
b) La mediatriz del lado BC.
c) La altura que pasa por C.
d) La longitud de la mediana que pasa por B.

61.-Calcula el ortocentro y el área del triángulo cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos A(-1,7) y B(4,3).

62.-El paralelogramo ABCD tiene de vértices A(-1,1), B(0,-1) y C(3,2). Halla las coordenadas de D y su área.

63.-Un punto P dista lo mismo de A(6,10) y de B(-4,8). Su distancia al eje de abscisas es el doble que al eje de ordenadas. Determina las coordenadas de P.

64.-Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo cuyos vértices son A(2,2), B(-2,2) y C(-2,-2).

65.-Los puntos B(-1,3) y C(3,-3) determinan el lado desigual de un triángulo isósceles ABC tal que A está en la recta x + 2y –15 = 0. Determina el vértice A, las alturas del triángulo y su ortocentro.

66.-Determina la ecuación de una recta r con estas características: r es perpendicular a la recta que pasa por A(8,0) y B(0,5), r tiene un punto en común con las rectas 4x – 3y + 1 = 0 y 2x +y – 7 = 0.

67.-El triángulo ABC es isósceles. El lado desigual tiene por extremos A(3,1) y B(-2,3). El vértice C está en el eje de ordenadas. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo y su área.

68.-Calcula el área limitada por la recta 3x +2y – 6 = 0, el eje de abscisas, el de ordenadas y la ordenada correspondiente a x = 4.

69.-Los ejes de coordenadas y las rectas 3x +4y –12 = 0 e 5x + 6y – 30 = 0 forman un cuadrilátero del que se pide su perímetro y su área.

70.-Determina sobre la recta 3x –5y + 25 = 0 un punto que diste lo mismo de A(3,4) y de B(7,8).

71.-Dada la recta r: $r: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{4}$ y el punto A(2,7). Calcula las coordenadas del simétrico de A respecto de r.

72.-La recta r: 2x – 3y + 12 = 0 determina con los ejes coordenados un segmento AB. Halla la ecuación de la mediatriz de AB.

73.-La recta r corta a los ejes coordenados en los puntos (-4,0) y (0,3). Halla la distancia del punto P(6,5) a r.

74.-Sean la recta r: 3x – y –1 = 0 y los puntos A(8,1) y B(4,-2). Calcula la ecuación de la recta determinada por el punto B y el punto A', simétrico de A, respecto de r.

AUTOEVALUACIÓN 1

1. Dados los puntos A(2,-1) , B(0,2); las rectas r: x – y = 1; s: -x+2y-1=0. Calcula:
    a) Posición relativa de las rectas r y s.
    b) Distancia entre A y B.
    c) Distancia entre A y r.
    d) Recta paralela a r pasando por A.
    e) Recta perpendicular a s pasando por B.
    f) Punto simétrico a B respecto a la recta r .

2. a) Calcular el valor de **n** para que las rectas r y s sean paralelas; siendo r: 3x - y -12 = 0 y s: $\frac{x-2}{1/3} = \frac{y-4}{2n-1}$

b) Para el valor de **n** hallado en el apartado a), determinar la distancia que separa a r y s.

3. Se consideran los puntos A(2,1) y B(6,-5). Se pide:
    a) Calcular la longitud del segmento AB.
    b) Determinar la mediatriz de este segmento.
    c) Hallar el punto simétrico de A respecto del punto P(-1,2).

4. Dadas las rectas: r: 2x –y = 1, s: 3x + 2y =12. Se pide:
    a) Hallar la ecuación de la recta concurrente con ellas que pasa por el punto P(-8,-3).
    b) Calcula el ángulo que forman las rectas r y s.

AUTOEVALUACIÓN 2

1. Dados los puntos A(-3,1) , B(2,0); las rectas r(x,y) = (1,-1) – λ (2,4) ; s: $\begin{cases} x=-t \\ y=3 \end{cases}$. Calcula:

    a) Posición relativa de las rectas r y s.
    b) Distancia entre A y B.
    c) Distancia entre A y r.
    d) Recta paralela a r pasando por A.
    e) Recta perpendicular a s pasando por B.
    f) Punto simétrico a B respecto a la recta r .

2. Calcular el valor de a y de b para que la recta r: $\dfrac{x-b}{2a}=\dfrac{y+2}{a-1}$ pase por el punto $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ y tenga la dirección del vector $\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Se considera la familia de rectas: mx + (m -2)y + (m +1) = 0 siendo m un parámetro real. Se pide:
    a) Determinar el punto común a todas las rectas de la familia.
    b) Hallar la recta de esta familia que pasa por el punto P(1,1).
    c) Encontrar la recta de esta familia que es paralela a la recta x – 2y + 1 = 0.

4. a)Calcular el valor de m para que el baricentro del triángulo de vértices A(7,4), B(m +2, -6) y C(-5, m+1) esté situado en el eje de abscisas y hallar sus coordenadas.

    b) Obtener la ecuación de la mediana del triángulo anterior que pasa por el vértice A.

    c) Hallar la medida del segmento determinado por el vértice A y el punto de intersección de la mediana anterior y el lado BC del triángulo.

LUGAR GEOMÉTRICO

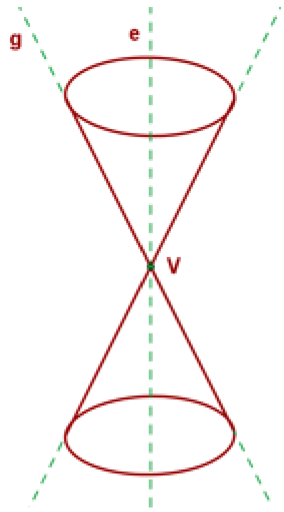
Se llama lugar geométrico del plano al conjunto de puntos de este que cumplen una condición determinada.

Ejemplo:

La mediatriz de un segmento de extremos A y B es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y de B.
Si P es un punto de la mediatriz, deberá cumplir: d(P,A) = d(P,B).

La bisectriz del ángulo que forman dos rectas es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas rectas.
Si P es un punto de la bisectriz que determinan las rectas r y s, ha de cumplirse:

d(P,r) = d(P,s)

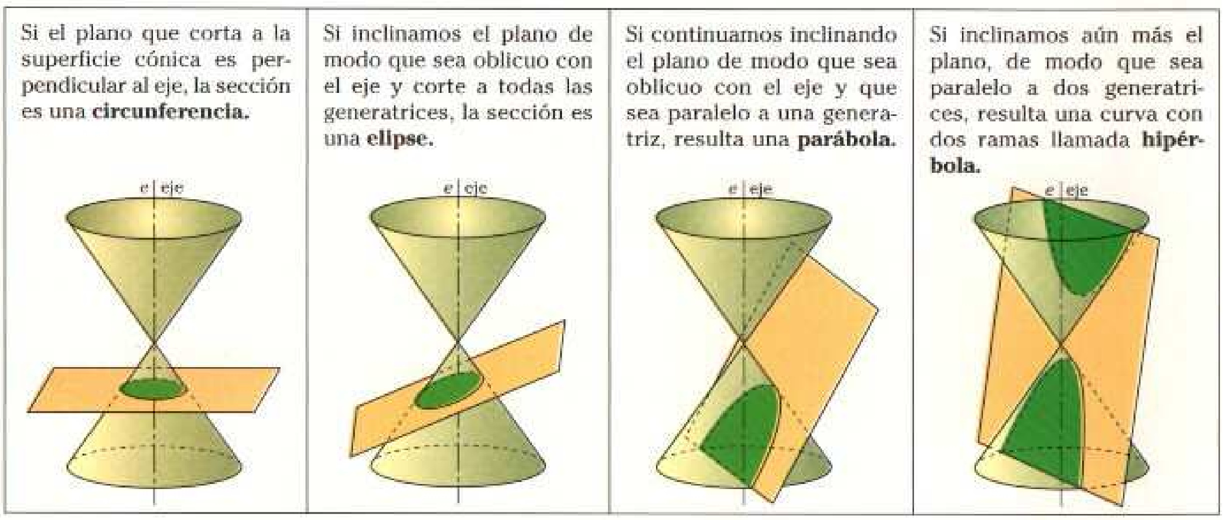


SUPERFICIE CÓNICA

Se llama superficie cónica de revolución a la superficie engendrada por una recta móvil que gira alrededor de otra fija, a la que corta.
La recta móvil se llama generatriz; la fija, eje; y el punto de intersección de ambas, vértice.

CÓNICA

Se llama cónica a la curva que resulta de la intersección de una superficie cónica y un plano.



CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante e igual al radio**.**

Si P(x,y) es un punto cualquiera de la circunferencia, C(a,b) es el centro y r el radio:

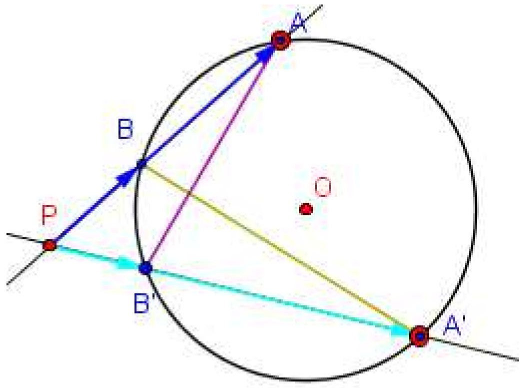
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Operando: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

donde $A = -2a \quad B = -2b \quad C = a^2+b^2-r^2$

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Consideramos una circunferencia cualquiera y un punto P del plano. Desde el punto P se trazan dos secantes a la circunferencia, obteniéndose los puntos A, A', B y B'.



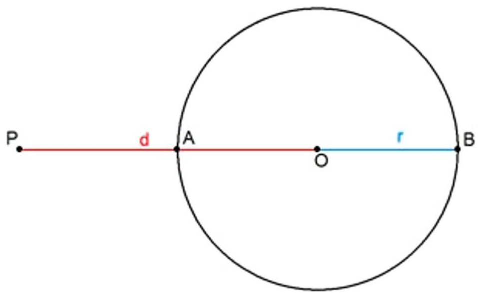
El valor común $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}$ recibe el nombre de **potencia del punto P** respecto de la circunferencia dada.

Los triángulo PAB´y PA´B son semejantes porque tienen un ángulo en común, P, y B y B´iguales, pues abarcan el mismo arco. Por tanto:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}$$

Cálculo de la potencia

Como la potencia del punto respecto de una circunferencia no depende de la recta secante que se tome, trazaremos una recta secante que pase por el centro de la circunferencia.



Llamando d a la distancia $\overline{PO}$ y r al radio de la circunferencia, se tiene que:

$$\overline{PA} = d - r \text{ y } \overline{PB} = d + r.$$

Entonces la potencia es:

$$Pot_C(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$$

Teniendo en cuenta que $d = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$

$$Pot_C(P) = d^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

Podemos concluir que, para obtener la potencia de un punto respecto de una circunferencia, basta con sustituir, en el primer miembro de la ecuación de la circunferencia, las coordenadas del punto.

La potencia, dependiendo de la posición del punto P respecto de la circunferencia, toma los valores:

· Positivo, si P es un punto exterior a la circunferencia (d > r).

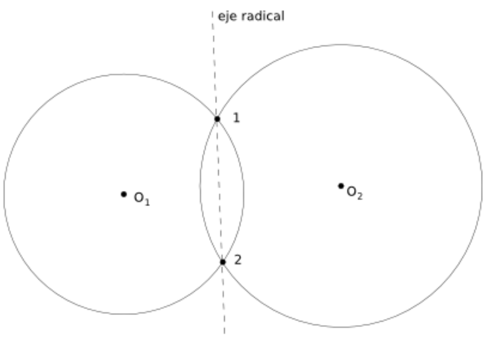
· Cero, si P es un punto de la circunferencia (d = r) .

· Negativo, si P es un punto interior a la circunferencia (d > r).

Eje radical de dos circunferencias

El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias.

Consideramos dos circunferencias de ecuaciones:



$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$$

Sus potencias son:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C \quad y \quad x^2 + y^2 + A'x + B'y + C'$$

La ecuación del lugar geométrico es:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = x^2 + y^2 + A'x + B'y + C'$$

Reduciendo términos semejantes, resulta:

$$(A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0$$

que es la ecuación de una recta.

Centro radical de dos circunferencias

Es el punto del plano que tiene la misma potencia respecto de dichas circunferencias.

Se calcula hallando la intersección de los ejes radicales de las circunferencias, dos a dos.

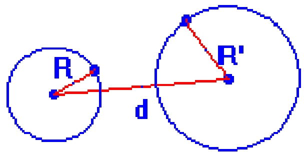
Posición relativa de dos circunferencias

La posición relativa entre dos circunferencias viene determinada por la distancia entre sus centros (d) y el valor de sus radios R y R’.

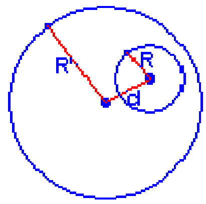
Según el número de puntos que tengan en común existen los siguientes casos:

-<u>Ningún punto en común</u>

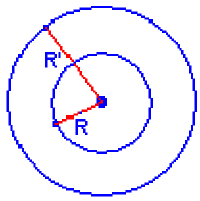
Exteriores: La distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios.



Interiores: La distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios.

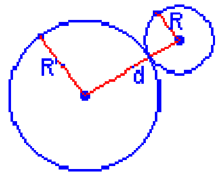


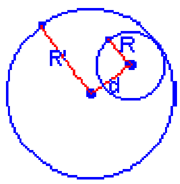
Concéntricas: Los centros coinciden.



-<u>Un punto en común</u>

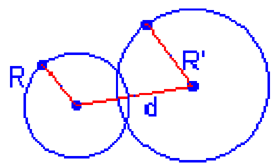
Tangentes exteriores: La distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.
Tangentes interiores: La distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.





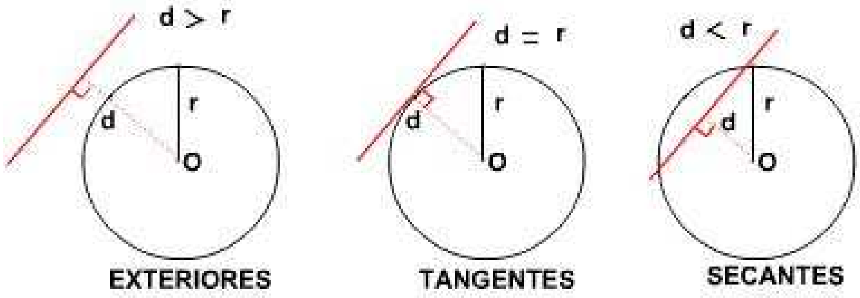
-<u>Dos puntos en común</u>

Secantes: La distancia entre sus centros es mayor que la diferencia de los radios pero menor que su suma.



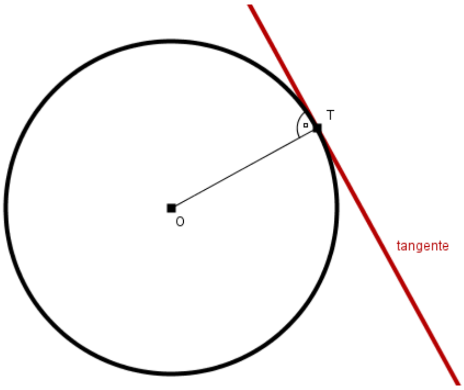
Posición relativa de recta y circunferencia

Para determinar la posición relativa de ambas podemos resolver el sistema de ecuaciones y, según el número de puntos de corte, sabremos la posición, o bien comparar la distancia del centro de la circunferencia a la recta con el radio:



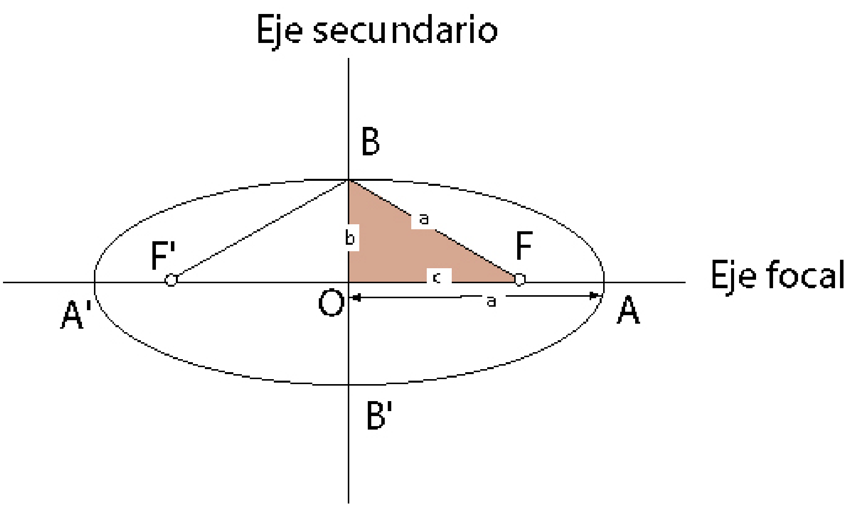
Recta tangente a una circunferencia

La **recta tangente** es una recta que tiene un único punto de intersección con la circunferencia. La recta tangente a una circunferencia de centro O que pasa por un punto T de la misma es la recta perpendicular al radio OT que pasa por el punto T.



ELIPSE

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.



F y F´son los focos, la distancia entre ellos se llama distancia focal y se representa por 2c.

Eje focal: es la recta que pasa por los focos.

Eje secundario: es la mediatriz del segmento que determinan los focos.

Los vértices de la elipse son la intersección de esta con el eje focal, A y A´, y con el eje secundario, B y B´.

Eje mayor: es el segmento entre los vértices A y A´, se representa por 2a.

Eje menor: es el segmento entre los vértices B y B´ y se representa por 2b.

El centro de la elipse es O, es el punto de intersección de los ejes.

Ecuación:

Para determinar la ecuación de la elipse vamos a considerar que está centrada en el origen de coordenadas.

F = (c,0) F´= (-c,0)

Sea P = (x,y) un punto de la elipse. Por definición, debe cumplir: $\overline{PF}+\overline{PF'}=\text{constante}$

Para determinar el valor de la constante tomaremos el punto A: $\overline{AF}+\overline{AF'}=2a$

Por lo tanto podemos escribir: $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left[2a-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right]^2$$

$$4xc+4a^2=4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

Desarrollando, dividiendo entre 4 y volviendo a elevar al cuadrado:

$$x^2c^2+a^4+2a^2xc=a^2x^2+a^2c^2+2a^2xc+a^2y^2$$

$$a^2\left(a^2-c^2\right)=x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2$$

Como $a^2=b^2+c^2$

$$a^2b^2=x^2b^2+a^2y^2$$

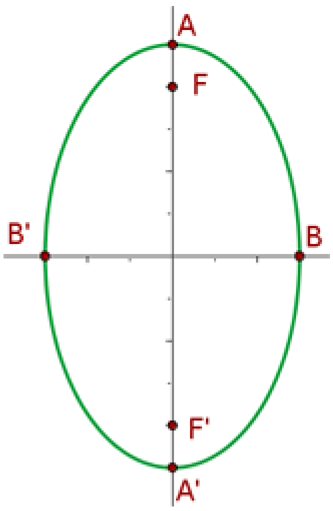
Dividiendo por a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Por tanto la <u>ecuación reducida</u> de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

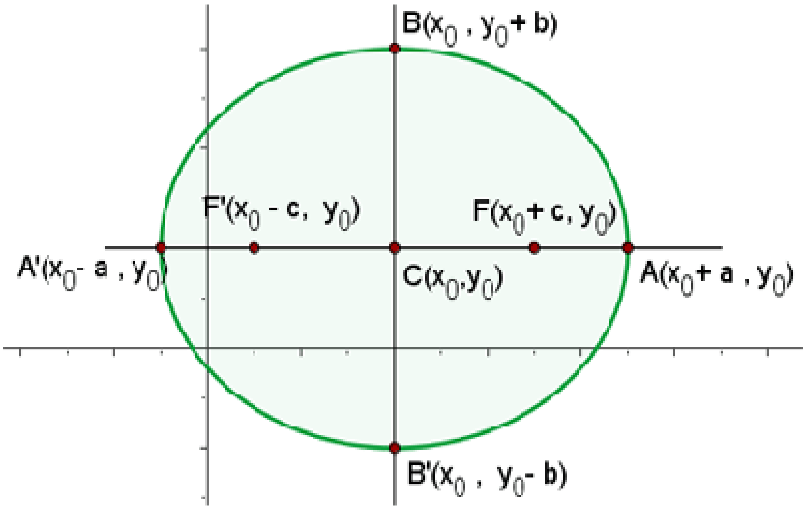
<u>Ecuación de una elipse centrada en el origen con el semieje mayor vertical:</u>



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Ecuación de una elipse de eje mayor horizontal no centrada en el origen, sino en un punto $P(x_0,y_0)$

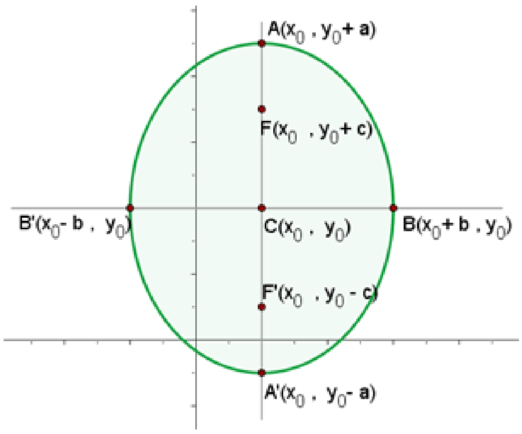
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



Ecuación de una elipse de eje mayor vertical no centrada en el origen, sino en un punto

$P(x_0, y_0)$

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

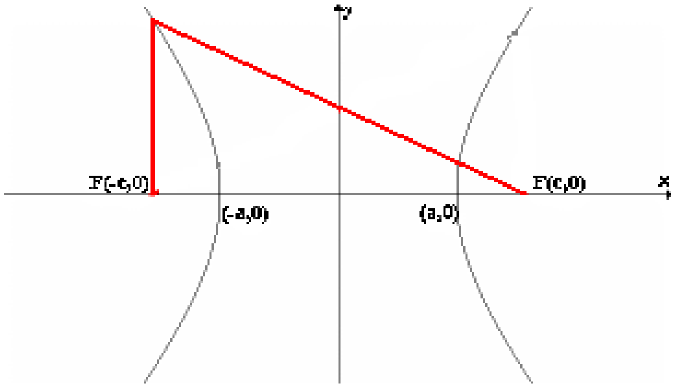


Excentricidad

Es el cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor $e=\frac{c}{a}<1$

HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

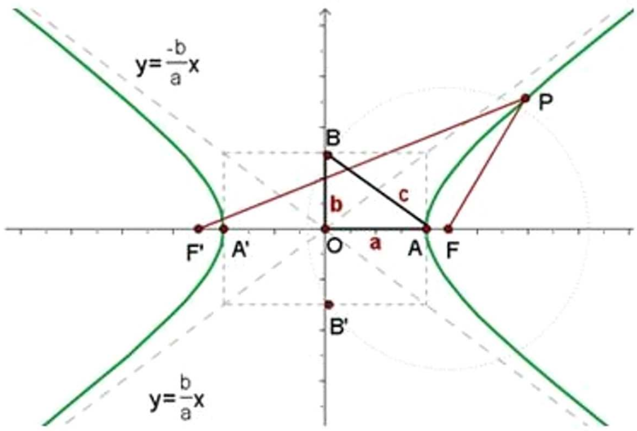


F y F´son los focos, la distancia entre ellos se llama distancia focal y se representa por 2c.
Eje focal: es la recta que pasa por los focos.
Eje secundario: es la mediatriz del segmento que une los focos.
2a es la longitud del eje real y 2b es la longitud del eje imaginario.
Los vértices de la hipérbola son los puntos de intersección de esta con el eje focal, A y A´.
El centro de la hipérbola es el punto de intersección de los ejes.

Ecuación:

Consideramos una hipérbola centrada en el origen de coordenadas:

F = (c,0) F´= (-c,0)



Sea P=(x,y) un punto de la hipérbola. Por definición, debe cumplir:

$$\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right| = \text{constante} = 2\text{a}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\pm 2a$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left[\pm 2a-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right]^2$$

$$-4xc-4a^2=\pm 4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

Desarrollando, dividiendo entre 4 y volviendo a elevar al cuadrado:

$$x^2c^2 + a^4 + 2a^2xc = a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2xc + a^2y^2$$

$$a^2\left(a^2 - c^2\right) = x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2$$

Como $b^2 = c^2 - a^2$

$$a^2b^2 = x^2b^2 - a^2y^2$$

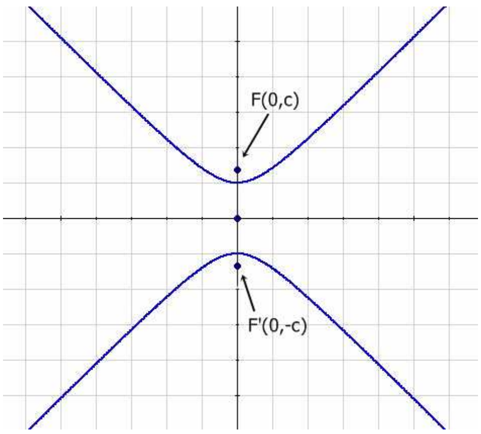
Dividiendo por a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por tanto la <u>ecuación reducida</u> de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

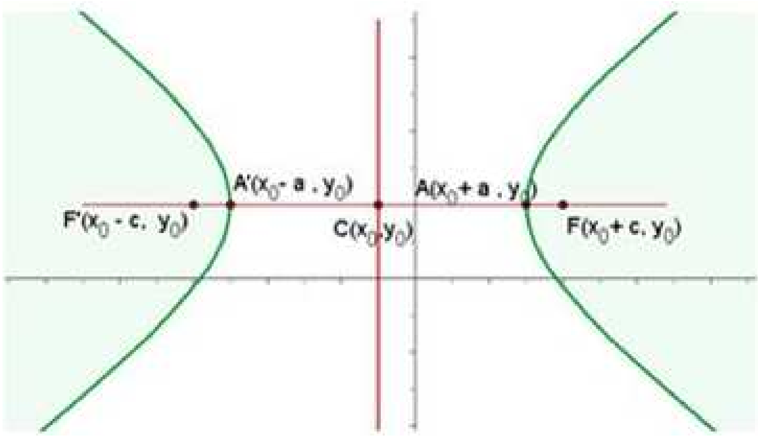
<u>Ecuación de una hipérbola centrada en el origen con eje focal vertical</u>



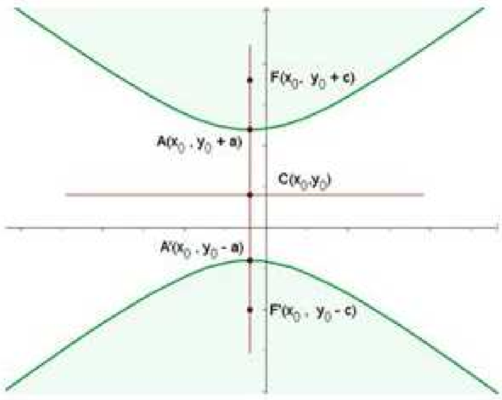
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

<u>Ecuación de una hipérbola de eje focal horizontal centrada en el punto P(x_0, y_0)</u>

$$\frac{\left(x - x_0\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y - y_0\right)^2}{b^2} = 1$$



Ecuación de una hipérbola de eje focal vertical centrada en el punto P(x_0, y_0)



$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Excentricidad

Es el cociente entre la semidistancia focal y el semieje real $e=\frac{c}{a}>1$.

Asíntotas de la hipérbola

Son las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Hipérbola equilátera

Una hipérbola cuyo eje real es igual al eje imaginario, es decir, a = b, se llama hipérbola equilátera.

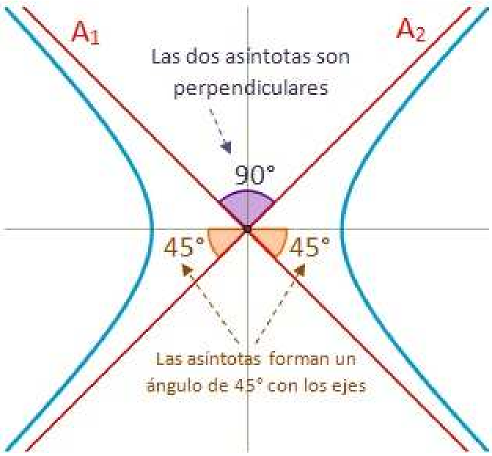
Su ecuación es: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2-y^2=a^2$

Sus asíntotas son $y=\pm x$

Como

$$a^2=c^2-a^2 \Rightarrow c^2=2a^2 \Rightarrow c=a\sqrt{2}$$

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$$

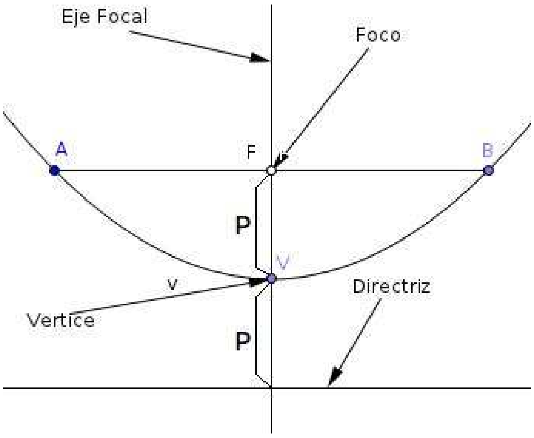


Una hipérbola equilátera también se puede expresar de la forma $y=\frac{k}{x}$ $\left(k=\frac{a^2}{2}\right)$.

Esta ecuación se conoce con el nombre de "ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas".

<u>**PARÁBOLA**</u>

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta, llamada directriz, y de un punto, llamado foco.



La distancia entre el foco y la directriz se denomina <u>parámetro</u> de la parábola y se denota por **p**.

El <u>eje</u> de la parábola es la perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

El punto de intersección de la parábola con su eje es el <u>vértice</u>.

Ecuación

Tomamos como eje de abscisas el eje de la parábola, y como eje de ordenadas, la paralela a la directriz que pasa por el vértice.

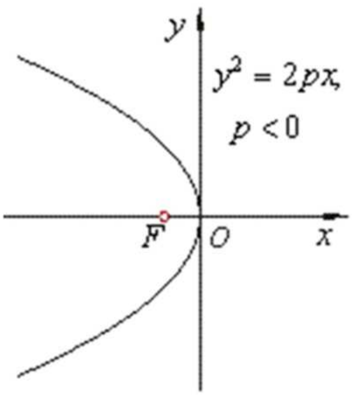
El foco es F = $\left(\frac{p}{2},0\right)$ y la ecuación de la directriz es $x=-\frac{p}{2}$.

Sea P = (x,y) un punto de la parábola, deberá cumplir d(P,d) = d(P,F)

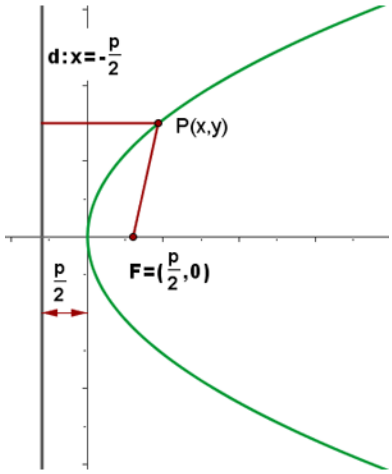
$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2 \Rightarrow y^2=2px$$

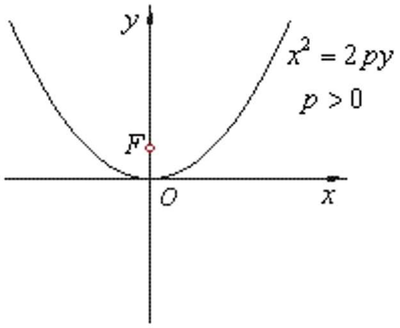
<u>Ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y directriz vertical</u>:



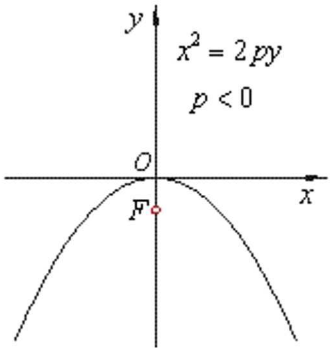
$$y^2=2px$$



Ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y directriz horizontal:

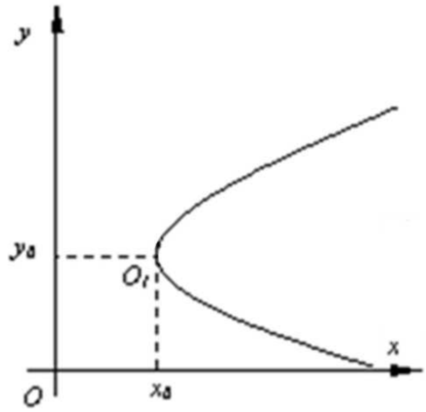


$$x^2 = 2py$$

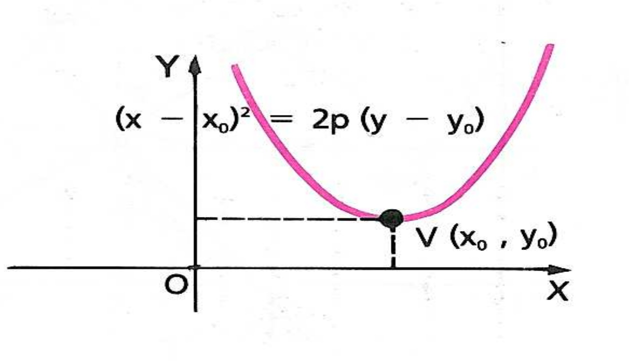


Ecuación de una parábola con vértice en $V(x_0, y_0)$ y directriz vertical:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$



Ecuación de una parábola con vértice en $V(x_0, y_0)$ y directriz horizontal:



$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al origen es el triple que la distancia a la recta r: 6x – y + 4 = 0.

2. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos A(-4, 0) y B(4, 0) es 40. Identifica la figura resultante.

3. En los siguientes casos, averigua si la ecuación propuesta corresponde a una circunferencia y en caso afirmativo, halla su centro y su radio:
   $a) 2x^2+3y^2+6x-12y-48=0$
   $b) 2x^2+2y^2-x+3y+3=0$
   $c) x^2+y^2+y=0$
   $d) 3x^2+3y^2-2x+3y-6=0$

4. Halla la ecuación de la circunferencia:
   a. De diámetro AB siendo A(-1,5) y B(3,-7).
   b. Que pasa por el punto P(0,-4) y cuyo centro es C(-2,1).
   c. Que pasa por P(3,1), Q(-1,2) y cuyo radio es 3.
   d. Que pasa por los puntos (2,-1), (0,5) y (-2,2).
   e. Concéntrica con $2x^2+2y^2-3x+4y-5=0$ y con radio $\sqrt{3}$.
   f. Que pasa por P(3,1) , Q(-1, 2) y cuyo centro está en la recta x – 2y + 1=0.
   g. Cuyo centro es el punto C(1,-5) y es tangente a la recta 3x – 4y +1 =0.

5. Averigua la posición de los puntos (3,1), (4,1) y (-3,-1) respecto de la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y+1=0$

6. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya potencia respecto de la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y+1=0$, es igual a 5? ¿Qué representa la ecuación que se obtiene?

7. Calcula el eje radical de las circunferencias $2x^2+2y^2-9=0$ y $x^2+y^2-2x-2y-2=0$

8. Estudia la posición relativa de las circunferencias:
   $a)\ x^2+y^2+2x+4y+1=0$ y $x^2+y^2+2x-2y+1=0$
   $b) x^2+y^2+2x+4y+1=0$ y $x^2+y^2-4x+2y-4=0$
   $c) x^2+y^2-2x-2y-2=0$ y $x^2+y^2+2x-8y+8=0$

9. Estudia la posición relativa de:
   $a) x^2+y^2+2x+4y+1=0 \;\; y \;\; x-2y-2=0$
   $b) x^2+y^2-2x+6y=0 \;\; y \;\; x+3y-2=0$
   $c) x^2+y^2-2x-8y+13=0 \;\; y \;\; 2x-3y+6=0$

10. Halla las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-2x=0$ por el punto (0,2).

11. Halla las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+3x-2y-3=0$ por el punto (0,-1).

12. Calcula las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=20$ paralelas a la recta x – 2y = 1.

13. Averigua los semiejes, vértices, focos y excentricidad de las siguientes elipses:

$a)\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$

$b) 25x^2+9y^2=225$

$c) x^2+4y^2=9$

14. Averigua la ecuación de la elipse, sabiendo que:

a. Su distancia focal es 16 y su excentricidad $\dfrac{4}{5}$.
b. Su semieje mayor es 9 y pasa por P(6,4).
c. $e=\dfrac{1}{2}$ y pasa por P(1,3).
d. El eje menor mide 10 y pasa por P(8,3).
e. Pasa por $P\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\right)$ y $Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.

15. Halla la ecuación de la elipse de F(1,1) y F´(-1,1) y eje mayor de longitud 4.

16. Halla el valor de k de modo que la recta x – y + k = 0 sea tangente a la elipse $x^2+2y^2=4$
.

17. Averigua la posición relativa de la recta 2x + y - 1 =0 y la elipse $2x^2+y^2=0$

18. Averigua los semiejes, vértices, focos y excentricidad de las siguientes hipérbolas:

$a)\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$

$b) x^2-4y^2=9$

$c) 16y^2-9x^2=1$

19. Averigua la ecuación de la hipérbola en los siguientes casos:

a. Su distancia focal es 30 y su eje real mide 24.
b. Su eje real mide 12 y pasa por P(-10,4).
c. Uno de sus focos es F(7,0) y su excentricidad es $\dfrac{7}{6}$.
d. Pasa por P(5,2) y por $Q\left(9,3\sqrt{2}\right)$.
e. Pasa por $P\left(8\sqrt{2},15\right)$ y su excentricidad es $\dfrac{17}{8}$
f. Pasa por $P\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},1\right)$ y una de sus asíntotas es la recta y = 2x.

20. Halla el ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

21. Escribe la ecuación de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 8$ referida a sus asíntotas.

22. Halla el vértice, el foco, el eje y la directriz de las siguientes parábolas:

$a) y^2 = -8x$

$b) y^2 + 6y - 8x - 31 = 0$

$c) x^2 - 4x - 4y = 0$

$d) 2x^2 + 2x + y - 1 = 0$

23. Escribe la ecuación de la parábola en los siguientes casos:

   a. Su directriz es x =4 y su foco es F(2,-1).
   b. Su directriz es el eje de ordenadas y su vértice el punto V(4,3).
   c. Su foco es el punto F(1,3) y su vértice V(1,-5).
   d. Su directriz es la recta 3x + 4y = 0 y su foco el punto F(2,3).

24. Averigua la posición relativa de la recta 4x + 2y -11 =0 y la parábola $y^2 - 6y + 4x + 5 = 0$.

25. Halla los puntos que pertenecen a la parábola $x = y^2 - 5y + 6$ y equidistan de los puntos P(7,4) y Q(-3,-2).

AUTOEVALUACIÓN 3

1. Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (2, -3) y que es tangente a la recta 3x - 4y + 5 = 0.

$$\left(25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y - 204 = 0\right)$$

2. Estudia la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ y la recta r: 2 x + y = 1

(Son secantes)

3. Halla el lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia a A(2, 0) sea el doble de la distancia a B(-1, 0). Identifica la figura resultante.

$$\left((x+2)^2 + y^2 = 4 \qquad \text{Es una circunferencia}\right)$$

4. Halla la ecuación de la hipérbola de focos F1(5, 0), F2(–5, 0) y cuya constante es 6 (2a=6).

$$\left(16x^2 - 9y^2 = 144\right)$$

5. Halla la ecuación de la parábola de foco F (–1, 0) y directriz r: x = 1.

$$\left(y^2 = -4x\right)$$

6. ¿Para qué valor de b la recta y = x + b es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?

$$\left(b = \pm\sqrt{2}\right)$$

7. Halla la ecuación de la elipse cuyo eje mayor, que está sobre el eje X, es igual a 10 y pasa por el punto (3, 3).

$$\left(\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{225}=1\right)$$

8. Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto (3, 1) y tiene sus focos en (4, 0) y (– 4,0).

$$\left(\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{2}=1\right)$$

9. Halla la ecuación de la hipérbola que tiene como asíntotas $y=\pm 3x$ y pasa por el punto (2,1)

$$\left(\frac{9x^2}{35}-\frac{y^2}{35}=1\right)$$

10. Halla la ecuación de la parábola que tiene como directriz y = 3 y vértice V(0,0) .

$$\left(x^2=-12y\right)$$