# MATEMÁTICAS II
## 2º BACHARELATO

**Profesoras:**

**Trinidad Pazos Celis**
**Ana I. Valdés Fernández**

2014-15

**BLOQUE: ANÁLISIS**

# 1. LÍMITES DE FUNCIONES.CONTINUIDAD

## ➢ Conceptos preliminares

## ➢ Definición de función real de variable real

Dado un subconjunto *A* de números reales, una función *f* real de variable real definida sobre *A*, es una aplicación que relaciona cada valor *x* de *A* con un único valor real, llamado imagen de *x*.

$$\begin{array}{rcl} f : A & \rightarrow & \Re \\ x & \rightarrow & y = f(x) \end{array} \qquad x \text{ v. independiente; } \; y \text{ v. dependiente}$$

- Dominio de definición de una función

Es el subconjunto de los números reales donde la variable independiente *x* toma valores.
El dominio de una función contiene todos los números reales que permiten realizar las operaciones que caracterizan a *f*.

$$\text{Dom (f)}=\{ x\in\Re \,/\, \exists \text{ f(x)} \in \Re\} \qquad D(f)\subset A$$

- Recorrido de una función

Es el subconjunto de los números reales de forma $f(x)$ cuando *x* recorre todos los valores del dominio.

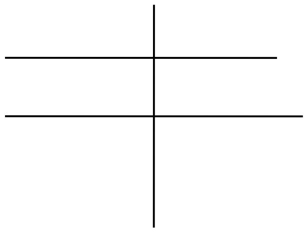
$$\text{Imf}(f) = \{f(x) / x \in D(f)\}$$

- Grafo de una función

Es la representación de la función en el plano cartesiano.

## ➢ Funciones elementales

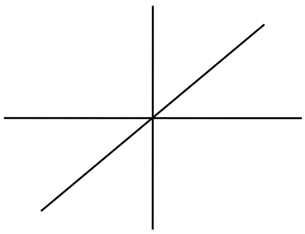
**Constante**: su expresión es: $f(x) = a$ .
Dominio: R.
Gráfica: recta horizontal que pasa por (0,a).



**Lineal**: su expresión es: $f(x) = mx$ donde m es la pendiente.
Dominio: R.
Gráfica: es una recta que pasa por el origen.

$m > 0 \rightarrow crece$

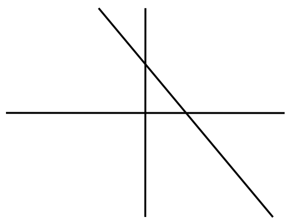
$m < 0 \rightarrow decrece$



**Afín**: su expresión es: $f(x) = mx + n$ donde *m* es la pendiente y *n* es la ordenada en el origen. Dominio: R. Gráfica: es una recta que no pasa por el origen.

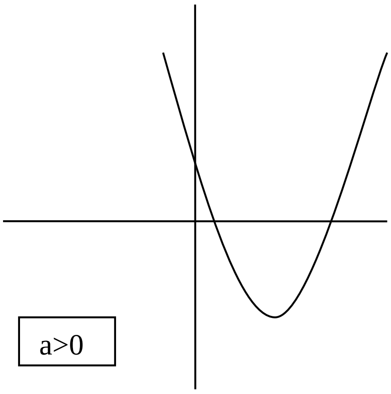
$m > 0 \rightarrow crece$

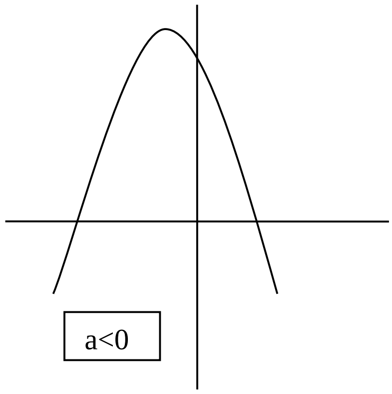
$m < 0 \rightarrow decrece$



**Cuadrática**: es $f(x) = ax^2 + bx + c; (a \neq 0)$. Dominio: R.

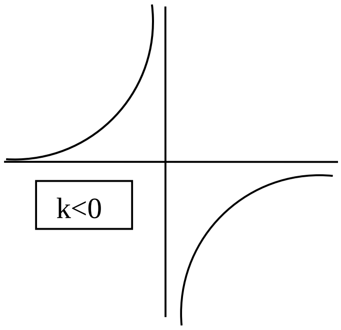
Gráfica: una parábola de eje vertical, de vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

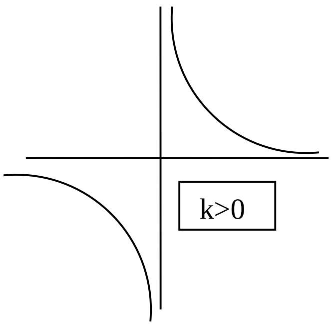



**Proporcionalidad inversa**: es $f(x) = \frac{k}{x}$, siendo k un número real no nulo.

Dominio: $D = R - \{0\}$
Gráfica: hipérbola equilátera.
Decreciente si $k > 0$
Creciente si $k < 0$
Es simétrica respecto al origen

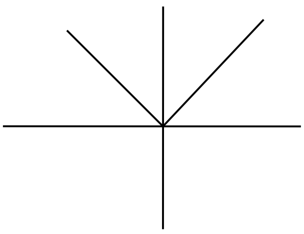


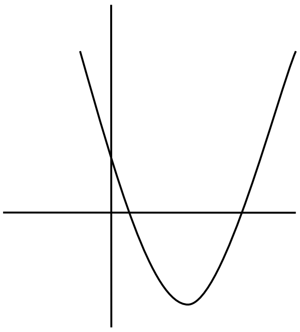

Definidas a trozos:
Son varias "fórmulas", cada una de las cuales rige el comportamiento de la función en un cierto tramo.
Se representa cada tramo, prestando atención a su comportamiento en los puntos de empalme.

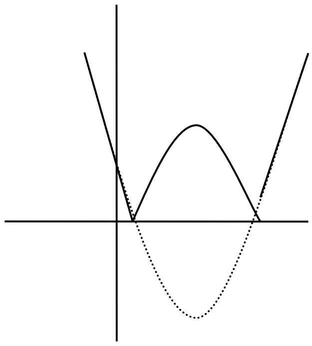
Función valor absoluto

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & si \quad x < 0 \\ x, & si \quad x \geq 0 \end{cases};$$



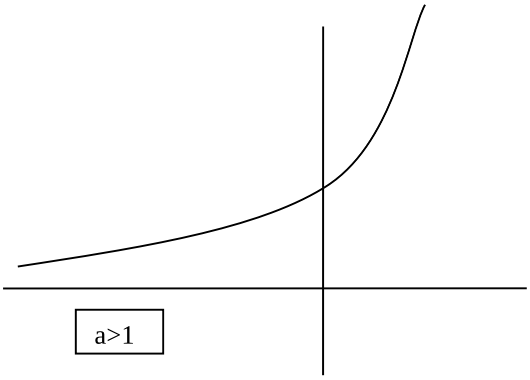
Valor absoluto de una función: $y = \left| f(x) \right| = \begin{cases} -f(x), & \textit{cuando} \quad f(x) < 0 \\ f(x), & \textit{cuando} \quad f(x) \geq 0 \end{cases}$

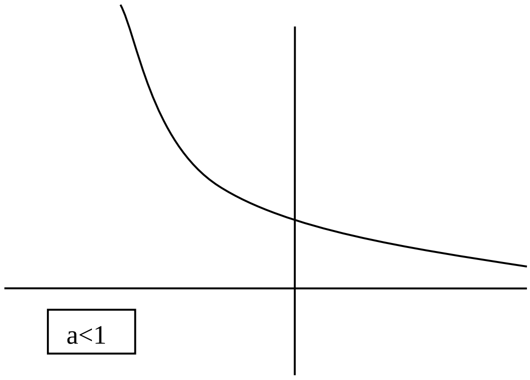




**Exponenciales:**

$f(x) = a^x, x \in R$ de base $0 < a \neq 1$. Dominio R. Las gráficas de estas funciones tienen una forma característica y se deben distinguir dos casos: $a > 1$ creciente y $0 < a < 1$ decreciente. Ambas pasan por el punto (0,1)




Ejercicio: Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $2^{-x} = 4$ b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112$ c) $9^x - 6 \cdot 3^{x+1} = -81$ d) $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500$

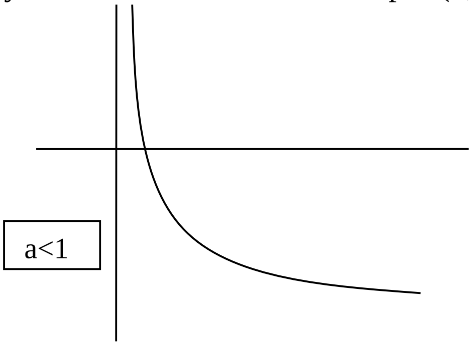
**Definición de logaritmo**: $\boxed{\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x; \quad 0 < a \neq 1}$

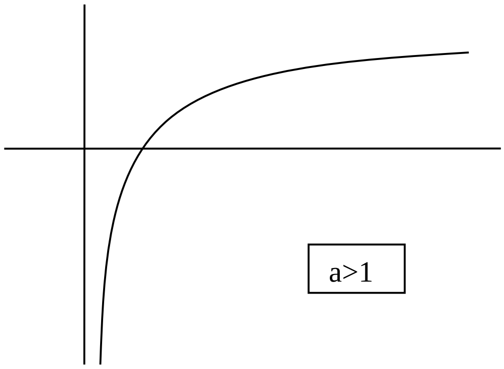
Propiedades:

$$\boxed{\begin{aligned} &\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \\ &\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \\ &\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x \end{aligned}}$$

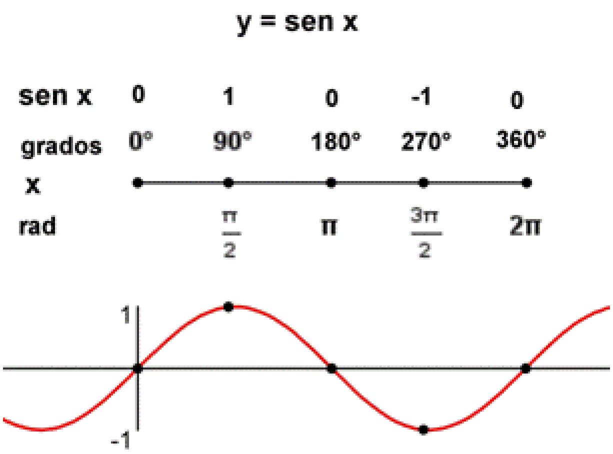
$$\boxed{\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}}$$

**Función logarítmica**: es $f(x)=\log_a x$ de base $a>0 y \neq 1$. Su dominio es $R^+$. Es la inversa de la función exponencial de la misma base y, por tanto, sus representaciones gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del 1[er] y 3[er] cuadrante. Igualmente distinguiremos dos casos: $a>1$ creciente y $0<a<1$ decreciente. Pasa por (1,0).

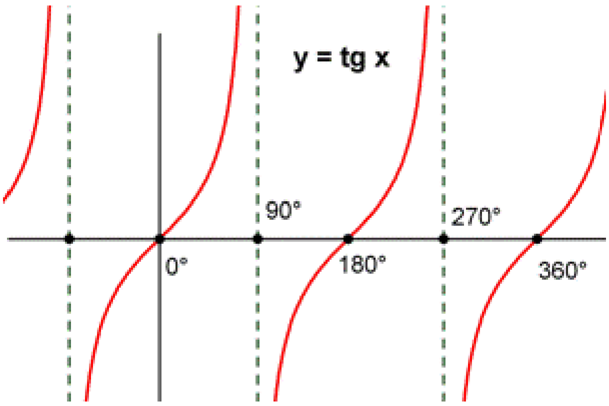



**Trigonométricas**: función seno y función coseno $f(x)=senx$ y $f(x)=\cos x$. Su dominio es R. Son periódicas de período $2\pi$ .




La función tangente $f(x)=tgx$. Es periódica de período $\pi$. Su dominio es $R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\}; k \in Z$




**Composición de funciones:**
Es una operación propia de las funciones. Se representa por el símbolo " $\circ$ " se calcula en orden inverso a cómo actúan.

$$\boxed{(g\circ f)(x)=g(f(x))}$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

La composición de funciones no es conmutativa.

## ➢ Límite de una función en un punto

Se dice que un número real L es el límite de una función $y=f(x)$ en el punto *a* si al tomar valores de *x* cada vez más próximos a *a*, los valores de las imágenes $f(x)$ están también más próximas a $L$ . Lo escribiremos $\lim_{x\to a} f(x)=L$ .La definición formal es:

$$\boxed{\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0/ \quad x\in(a-\delta,a+\delta), x\neq a \Rightarrow f(x)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)}$$

- Límites laterales

El tipo de tendencia de una función puede ser diferente cuando *x* se aproxima a *a* con valores mayores o menores que *a* (por la derecha o por la izquierda de *a*).

Se representan $\lim\limits_{x \to a^-} f(x); \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

*Ejemplo:* $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Cuando los límites laterales no coinciden, la función no tiene límite en ese punto.

- Cálculo de límites de funciones

En la práctica, para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, hacemos la sustitución de *x* por *a* y efectuamos las operaciones indicadas, igual que con las sucesiones.

**Operaciones**

$$\lim_{x \to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \textit{siendo} \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \to a}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)};\ f(x) > 0$$

**Límites de funciones en el infinito**

El cálculo de límites de funciones es igual que el de sucesiones, sólo hay que tener en cuenta que en las funciones la variable *x* puede tender a un número ó a $+\infty$ y a $-\infty$. Por lo tanto, sólo hemos de tener en cuenta la regla de los signos. Las indeterminaciones que se presentan son del mismo tipo que para las sucesiones:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\infty - \infty$ | $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ | $\frac{0}{0}$ | $0 \cdot (\pm\infty)$ | $0^0$ | $(+\infty)^0$ | $1^\infty$ |

**Operaciones con expresiones infinitas.**

Sumas

$(+\infty) + a = +\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + a = -\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$-(-\infty) = +\infty$

Productos

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) \cdot \infty = -\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Si $a > 0$ $\begin{cases} (+\infty) \cdot a = +\infty \\ (-\infty) \cdot a = -\infty \end{cases}$

Si $a < 0$ $\begin{cases} (+\infty) \cdot a = -\infty \\ (-\infty) \cdot a = +\infty \end{cases}$

Cocientes

$\frac{a}{\pm\infty} = 0$

$\frac{a}{0} = \pm\infty$ (hay que hallar los límites laterales)

$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$

$\frac{0}{\pm\infty} = 0$

$\frac{\infty}{a}\begin{cases} a > 0 & \infty \\ a < 0 & -\infty \end{cases}$

$\frac{-\infty}{a}\begin{cases} a > 0 & -\infty \\ a < 0 & \infty \end{cases}$

Potencias

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

$(+\infty)^{-\infty} = 0$

Si a > 0, $(+\infty)^{a} = +\infty$

Si a < 0, $(+\infty)^{a} = 0$

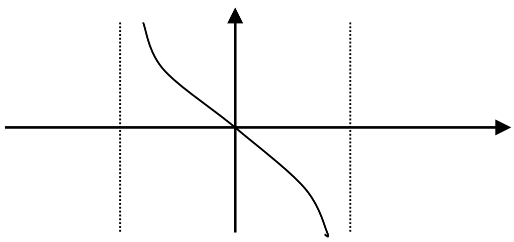
Si a ≠ 0, $a^{0} = 1$

Si a > 1 $\begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$

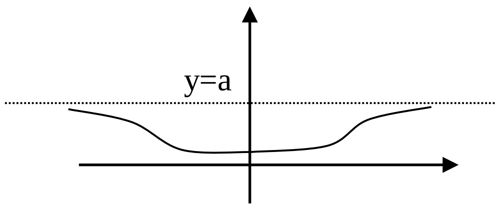
Si 0<a<1 $\begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$

- Asíntotas

Las asíntotas son rectas a las que se aproxima infinitamente la gráfica de la función. Pueden ser de tres tipos:



a) **Asíntotas verticales**. Son rectas de la forma $x = a$ (*a* es un número), y se dan cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, o cuando alguno de los límites laterales da $\pm\infty$. Para encontrarlas se comprueba en puntos que no están en el dominio (o en puntos en los que cambia la expresión de la función en funciones a trozos).




b) **Asíntotas horizontales**. Son rectas de la forma $y = a$ (*a* es un número), y se dan cuando $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$. (Sólo puede haber una para cada lado de la gráfica y no tienen porqué coincidir).

c) **Asíntotas oblicuas**. Son rectas de la forma $y = mx + n$ (*m* y *n* son números). Si la función ya tiene asíntotas horizontales no puede tener oblicuas. Se da por la derecha cuando $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ en este caso se obtiene $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$.(La asíntota por el lado izquierdo se halla con $x \to -\infty$)

La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales u oblicuas, pero nunca a las verticales.

## Función continua en un punto

Una función *f* es **continua en un punto** *a* si cumple las tres condiciones siguientes:

a) Existe el límite (finito) de la función $f(x)$ en $x = a$.

b) La función está definida en $x = a$; es decir, existe $f(a)$.

c) Los dos valores anteriores coinciden.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Si una función no es continua en un punto *a*, diremos que es **discontinua** en dicho punto.

- Continuidad lateral.

Una función es **continua por la derecha en un punto** *a* si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

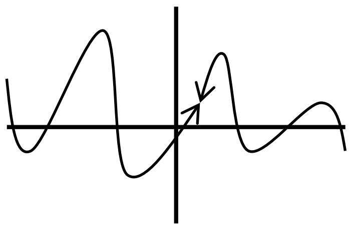
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

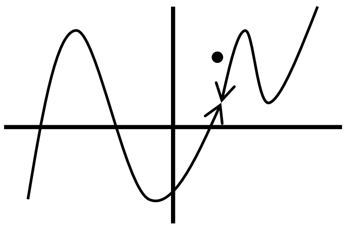
Una función es **continua por la izquierda en un punto** *a* si existe el límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

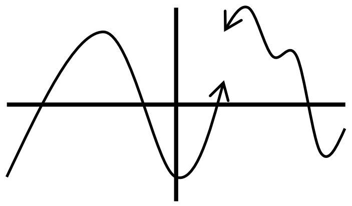
- Tipos de discontinuidades

a) Una función tiene una discontinuidad evitable en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo (o este no existe).
El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama valor verdadero de la función en el mismo.

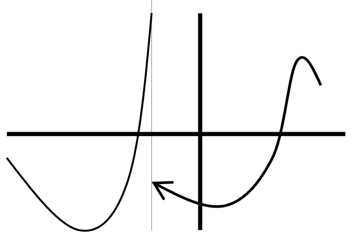


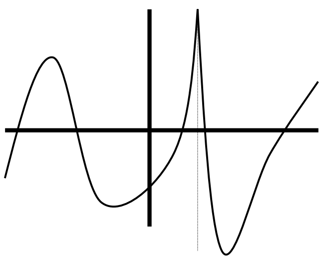


b) Una función tiene una discontinuidad de salto en un punto cuando existen los límites laterales (finitos) en él y son distintos.



c) Una función tiene una discontinuidad infinita en un punto si alguno de los límites laterales es infinito (o menos infinito).





## Continuidad en un intervalo

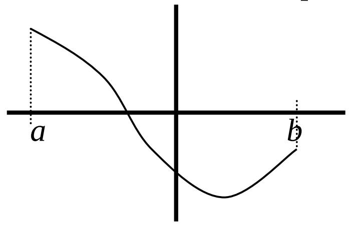
Una función es **continua en un intervalo abierto** $(a,b)$ si lo es en cada uno de sus puntos.
Una función es **continua en un intervalo cerrado** $[a,b]$ si lo es todos los puntos de $(a,b)$ y además es continua por la derecha en *a* y por la izquierda en *b*.

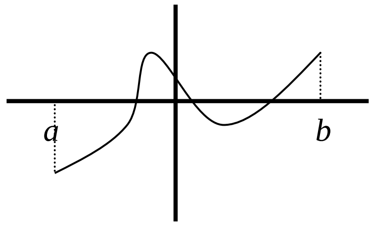
## Teorema de Bolzano

"Si una función es continua en un intervalo $[a,b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto interior *c* del intervalo en el que $f(c) = 0$."

- Interpretación geométrica del Teorema de Bolzano

Si una gráfica continua pasa de ser positiva a ser negativa (o viceversa), entonces atraviesa el eje de abscisas en al menos un punto.



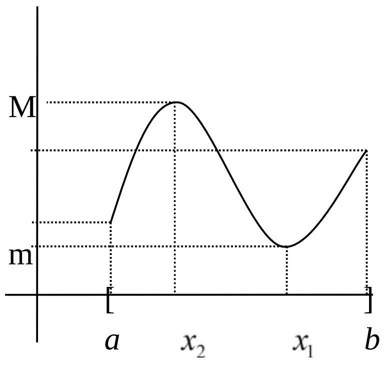

El Teorema de Bolzano es muy práctico para probar que determinadas ecuaciones poseen solución.

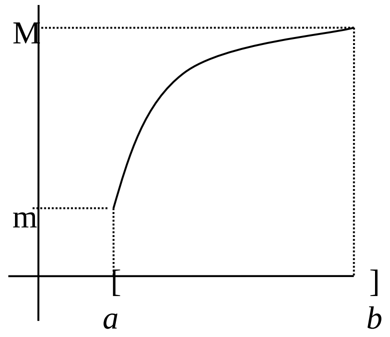
## Teorema de Weierstrass

"Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m en ese intervalo".

- Interpretación geométrica del Teorema de Weierstrass

Si una función es continua en $[a,b]$, los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ pueden unirse por medio de una curva continua. Así, se obtienen dos puntos $x_1$ y $x_2$ del intervalo $[a,b]$ en los que la función toma, respectivamente, el menor y el mayor valor posible dentro de ese intervalo.



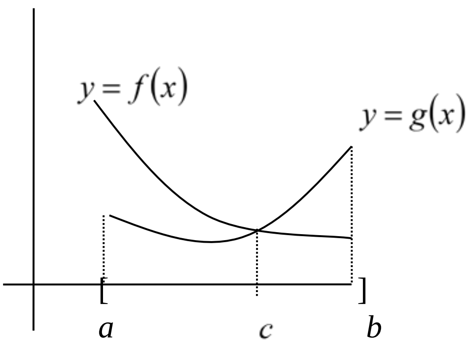




**Consecuencias de los teoremas**

a) Si una función *f* es continua en un intervalo [*a*,*b*] y *k* es un número comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe algún *c* en (*a*,*b*) tal que $f(c) = k$.

b) Si una función es continua en el intervalo (*a*,*b*), la función toma en ese intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

c) Si dos funciones *f* y *g* son continuas en un intervalo [*a*,*b*]; $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$ o viceversa, entonces existe algún *c* en *(a,b)* tal que $f(c) = g(c)$.



## EJERCICIOS

1) Calcula el dominio:

a) $f(x)=x^3-3x+4$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-36}$

c) $f(x)=\sqrt{x}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{3x+6}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4-16}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

h) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$

j) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+3}}$

k) $f(x)=\ln(3x-5)$

l) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x-4}}$

m) $f(x)=\dfrac{x^2-5}{\sqrt{x^2-1}}$

2) Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & si \quad x<0\\ x^2+1 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}4x^2+4 \text{ si } 0\leq x\leq 2\\ -\dfrac{5}{2}x+25 \text{ si } 2<x\leq 8\end{cases}$

c) $y=\left|-x^2+8x\right|$

3) El número $y$ de miles de socios de un club de fútbol, a lo largo de los últimos 12 años viene dado por la función $y=f(t)=\begin{cases}t^2-4t+5 & \text{si } 0\leq t\leq 5\\ 10 & \text{si } 5<t\leq 7\\ -t+17 & \text{si } 7<t\leq 12\end{cases}$ .

a) ¿En qué intervalos de tiempo creció o disminuyó el número de socios?
b) ¿Durante cuánto tiempo se superaron los 5000 asociados?

4) Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+2}+2^{x-1}=\dfrac{9}{2}$ $\quad\{x=0\}$

b) $2^{2x}-7\cdot 2^x=8$ $\quad\{x=3\}$

c) $2^{x-2}-1=0$ $\quad\{x=2\}$

d) $3^{2x}-6\cdot 3^{x-1}=3$ $\quad\{x=1\}$

e) $2^{2x}-11\cdot 2^x+24=0$ $\quad\left\{\begin{array}{l}x=3\\ x=\log_2 3\end{array}\right\}$

f) $3^{2x}-\dfrac{11}{3}\cdot 3^{x+1}+18=0$ $\quad\left\{\begin{array}{l}x=2\\ x=\log_3 2=0'63093\end{array}\right\}$

5) Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8$

b) $\log_3 81$

c) $\log_{1/2} 32$

d) $\log_3 243$

e) $\log_2 \dfrac{1}{4}$

f) $\log 1000$

6) Calcula $x$ en las siguientes expresiones:

a) $\log_x 36=2$

b) $\log_7 x=-2$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}=x$

7) Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $f(x)=e^x$ c) $f(x)=\log_{1/3} x$

8) Representa gráficamente las siguiente función: $y=|senx|$

9) Calcula la composición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x+1$ y $g(x)=1-x$

b) $f(x)=2x-1$ y $g(x)=\frac{1}{x+1}$

c) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ y $g(x)=\frac{x^2}{x-2}$

d) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x}$ y $g(x)=\sqrt{x-5}$

e) $f(x)=\frac{x^2+3}{2x^2-3x}$ y $g(x)=\sqrt{x^2+1}$

10) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\left(-x^2+6x-8\right)$ $\{-8\}$

b) $\lim_{x\to 2}\left(3+2x-\sqrt{5x-1}\right)$ $\{4\}$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-10x+4}{2x^2-7x-14}$ $\{1\}$

d) $\lim_{x\to 1}\ln\left(e^{x+1}\right)$ $\{2\}$

11) Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log 10x=\log(x-1)+2$ $\left\{x=\frac{10}{9}\right\}$

b) $2(\log x)^2-9\log x+10=0$ $\left\{x=100; x=10^{\frac{5}{2}}\right\}$

c) $\log(x-16)+\log(x+5)=2$ $\{x=20\}$

12) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{x^2-1}$ $\{0\}$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(2x^4-x\right)$ $\{+\infty\}$

c) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3+2x-1}{x^2-1}$ $\{-\infty\}$

d) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3+2x-1}{x^5-1}$ $\{0\}$

e) $\lim_{x\to -\infty}\frac{-3x^3+2x-1}{x^3-1}$ $\{-3\}$

f) $\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x^3+2x-1}{x^2-1}$ $\{+\infty\}$

13) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}-\frac{x^2+1}{x}\right)$ $\{0\}$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{5x+1}{x^2-3}\cdot\frac{x^2-4}{4x}\right)$ $\left\{\frac{5}{4}\right\}$

c) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+5}{x^2}\div\frac{-2x+6}{2x^3+1}\right)$ $\{+\infty\}$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{3x^2+5}\right)$ $\{-\infty\}$

14) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$ $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$ $\{2\}$

c) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{2x+6}-4}$ $\{4\}$

d) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+5}{2x-5}\right)^{3x-1}$ $\{e^{15}\}$

e) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{5-x^2}{3-x^2}\right)^{\frac{3x^2+1}{2}}$ $\{e^{-3}\}$

f) $\lim_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{x}{x-3}}$ $\{e^9\}$

g) $\lim_{x\to 0}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{x^3}}$ $\{+\infty\}$

15) Dibuja el recinto limitado por las curvas: $y = e^{x+2}$ ; $y = e^{-x}$ ; $x = 0$ .

16) Considera la función $f(x) = \dfrac{ax+8}{bx+6}$. Obtén los valores de $a$ y $b$ para que las rectas $x = 2$ e $y = -4$ sean, respectivamente, la asíntota vertical y horizontal de la función. $\{a = 12; b = -3\}$

17) Considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9-mx^2}{3-2x} & \text{si } x \neq \dfrac{3}{2} \\ 1 & \text{si } x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Deduce el valor de $m$ para que la función tenga límite finito en el punto $x = \dfrac{3}{2}$ y calcula su valor. $\{m = 4; \lim = 6\}$

18) Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2}{x^2+1}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^5+2x^2-5}{x^4-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

f) $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

19) Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \\ x+2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \quad x \neq 3 \\ 0 & si \quad x = 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2-x+1 & se \quad x < 0 \\ |x-1| & se \quad x \geq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = 2x + \dfrac{|x|}{x}$

g) $f(x) = \ln(x+7)$

h) $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & si \quad x < 0 \\ 3^{x^2-1} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-x}{x-1} & si \quad x > 1 \end{cases}$

20) Calcula $a$ y $b$ para que sean continuas en R las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \quad x \leq 0 \\ x+2a & si \quad x > 0 \end{cases}$ $\left\{a = \dfrac{1}{2}\right\}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+bx-6}{x-2}$ {si $g(2)$ está definida y vale 5; $b = 1$}

c) $h(x) = \begin{cases} 1+senx & si \quad x \leq 0 \\ a+2x & si \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x^2} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ $\{a = 1; b = 3\}$

d) $r(x) = \begin{cases} Lx & se \quad 0 < x < 1 \\ ax^2+b & se \quad 1 \leq x \end{cases}$

21) Determina $f(-1)$ para que la función $f(x)=3+(x+1)\cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x+1}$ sea continua en R. $\{f(-1)=3\}$

22) Demuestra que las ecuaciones siguientes tienen al menos una raíz real, y localiza un intervalo donde se encuentre:
a) $2-x=\ln x$ b) $x=3+\operatorname{sen} x$ c) $e^{-x}=x-2$

23) ¿Se puede afirmar utilizando el teorema de Bolzano que las funciones $f(x)=\dfrac{5}{x-3}$ y $g(x)=x^3+x^2-7x+1$, cortan al eje de abscisas en algún punto de los intervalos [2,4] y [-1,0] respectivamente?

24) Halla $a$ y $b$ de forma que sea aplicable el teorema de Bolzano a la función $f(x)=\begin{cases}\cos x & si \quad -\pi\le x\le 0\\ a+x^2 & si \quad 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & si \quad 1\le x\le \pi\end{cases}$. Halla el punto del interior del intervalo $[-\pi,\pi]$, al que hace mención dicho teorema. $\left\{a=1; b=2; c=-\dfrac{\pi}{2}\right\}$

25) Prueba que la función $f(x)=\dfrac{5}{2+\operatorname{sen} x}$ alcanza el valor 2 en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, y resuélvase, de ser posible.

26) La función $y=tgx$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

27) Utiliza el teorema de Bolzano para demostrar que la ecuación $x^3+x^2-7x+1=0$ tiene una solución en el intervalo [0,1].

28) Razona la respuesta correcta. Si $f(x)$ es continua en [5,8] y además $f(5)=1$; $f(8)=3$, entonces:
a) Todos los valores de $f$ están en el intervalo [1,3].
b) Existe un valor $c$ del intervalo (5,8) tal que $f(c)=1'4$.
c) La función se anula en un punto.

29) Se puede afirmar que la ecuación $sen2x+2x-1=0$ tiene al menos una raíz real?. Si es así, halla un intervalo en el cual se encuentre dicha raíz.

30) Si $f$ es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y además, el signo de $f(a)$ y el de $f(b)$ coinciden, ¿es posible que $f$ tenga algún cero en ese intervalo?

31) Determina los valores de $a$ y $b$ para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} senx+3 & si \quad -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{\cos x}{a} & si \quad 0 < x \le \pi \\ \cos x + b & si \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$. Indica el punto $c \in (-\pi, 2\pi)$ en el que la función se anula. $\left\{a = 1/3; b = -2; c = \pi/2\right\}$

32) Calcula el valor de $k$ para que la siguiente tenga una discontinuidad infinita en $x=-2$.

$f(x)=\dfrac{3x^2+4x-k}{2x+4}$ $\{k \ne 4\}$

33) Comprueba que la función $f(x)=3tg^2 x+1$ alcanza el valor 2 en el intervalo $(0, \pi/4)$ y calcula el valor $c$ de ese intervalo para que $f(c)=2$. $\{c=\pi/6\}$

34) Dada la función $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$. Estudia su continuidad y calcula sus asíntotas.

{Continua en $R-\{-1\}$; asíntotas: vertical $x=-1$; oblicua $y=x-2$ }

35) Explica por qué puede asegurarse que existe algún $x$, $0 \le x \le \pi$, tal que: $\dfrac{5}{2+\cos x}=4$

## SELECTIVIDAD:

***(Galicia, junio 2008)***

*Enunciado del teorema de Weierstrass. Si una función f(x) es continua en [a,b] y es estrictamente decreciente en ese intervalo, ¿dónde alcanza la función el máximo y el mínimo absoluto?*

***(Galicia, septiembre 2009)***

*Enuncia e interpreta geométricamente el teorema de Bolzano. Dada la función $f(x)=e^x+3x\ln(1+x^2)$, justifica si podemos asegurar que su gráfica corta al eje OX en algún punto del intervalo [-1,0].*

***(Galicia, junio 2010)***

*Define de función continua en un punto. ¿Cuándo se dice que una discontinuidad es evitable? ¿Para qué valores de k, la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$ es continua en todos los puntos de la recta real?*

***(Galicia, septiembre 2011)***

*Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de la función $f(x)=3sen\left(\dfrac{x}{2}\right)-\cos(x^2)$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $(0,\pi)$. Razona la respuesta.*

***(Galicia, junio 2014)***

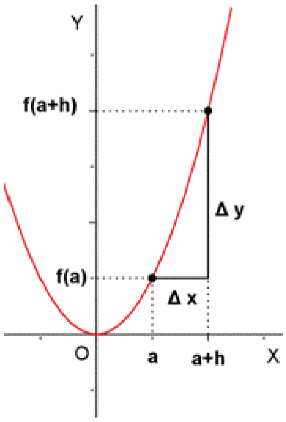
*Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ en los puntos $x=0$ y $x=2$?*

## 2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

### ➢ Definición de tasa de variación media.

Se define la tasa de variación media de una función en un intervalo $[a, a+h]$ como el cociente entre el incremento que experimenta la función en ese intervalo $\Delta f = f(a+h) - f(a)$, y la amplitud del intervalo, *h*.

$$T.V.M._{[a,a+h]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$




Ejemplo: La velocidad media de un móvil (variación de espacio con respecto al tiempo).
La variación de temperatura en el interior de la Tierra con respecto a la profundidad.

**Interpretación física**

El concepto de derivada de una función surgió al intentar determinar la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento. Veamos como:

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}}$$

La velocidad media de un intervalo $[t_0, t_0 + h]$ viene dado por:

$$V_m = \frac{e(t_0+h) - e(t_0)}{h}$$ siendo *e(t)* el espacio recorrido en el tiempo *t*.

Si hacemos que *h* sea suficientemente pequeño, tendremos la velocidad en el instante $t_0$ .

$$V = \lim_{h \to 0} \frac{e(t_0+h) - e(t_0)}{h}$$

### ➢ Definición de tasa de variación instantánea o derivada en un punto.

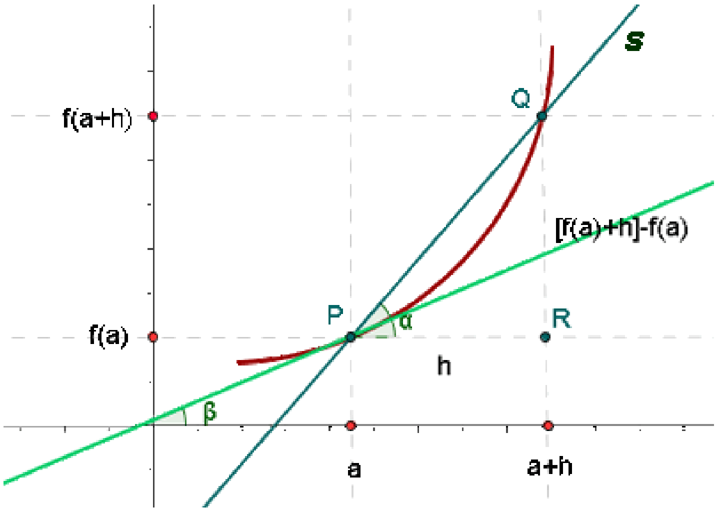
Se llama derivada de la función *f* en el punto *a* al siguiente límite, si es que existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si el límite existe se dice que la función es derivable en el punto *a*. La derivada de una función en un punto es un número real.

- ## Interpretación geométrica de la derivada.

"La derivada de una función *f* en un punto *a* es igual a la pendiente de la recta tangente a la función *f* en ese punto *a*."




Demostración:

Si consideramos la recta *s* que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, vemos que tiene por pendiente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, pero si *h* se acerca a 0, esta recta se acerca a la recta tangente, por tanto:

$$\text{pendiente}_{\text{recta tangente}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

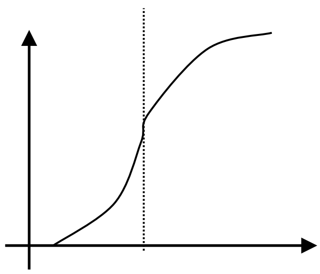
**Nota:** Si la función crece, la pendiente de la recta tangente en un punto *a* es positiva, por tanto $f'(a)$ es positivo; en cambio, si la función decrece, la pendiente de la recta tangente en ese punto es negativa, por tanto $f'(a)$ es negativo.

Como consecuencia, si el punto *a* es un máximo o mínimo relativo entonces $f'(a) = 0$.

Consecuencias:

1º) Si una función es derivable en x =a entonces existe recta tangente a la gráfica en x =a.

2º) El contrario no es cierto siempre: puede existir recta tangente en x =a y no ser derivable la función en x =a.



- ### Derivadas laterales.

Se llama <u>derivada por la izquierda</u> de la función *f* en el punto *a* al siguiente límite, si es que existe:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

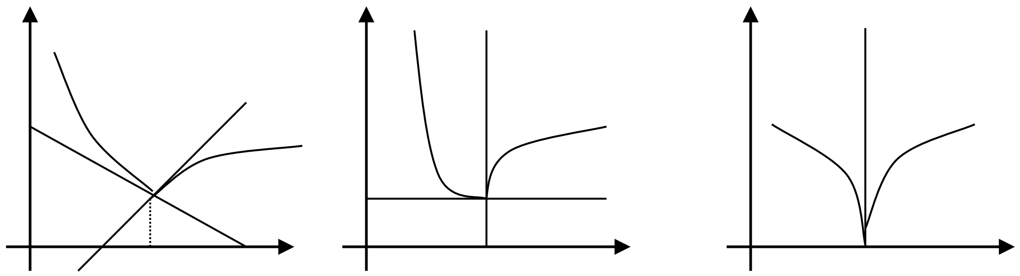
Análogamente, se llama <u>derivada por la derecha</u> de la función *f* en el punto *a* al siguiente límite, si es que existe:

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Evidentemente, una función es derivable en un punto si, y sólo si, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales coinciden.

<u>Nota:</u> Dada una función continua en x =a, si las derivadas laterales existen, pero no son iguales, la gráfica de la función presenta en x =a un *punto* ***anguloso***. Gráficamente, quiere decir que la recta tangente que se obtiene como límite del cociente incremental de la función es diferente a ambos lados del punto de abscisa x =a.
También puede ocurrir que una de las derivadas laterales en x =a exista y la otra sea infinita. En este caso, el punto de abscisa x =a también es un punto anguloso.

Si las dos derivadas laterales son infinitas y de distinto signo, siendo f continua en a, entonces el punto se denomina de ***retroceso***.



## ➢ Reglas de derivación.

Aplicando la definición de derivada, se obtienen las derivadas de las funciones elementales:

| **DERIVADAS DE LAS OPERACIONES** | | |
|---|---|---|
| **Suma** | $D\left[f(x)\pm g(x)\right]=f'(x)\pm g'(x)$ | |
| **Producto por un nº** | $D\left[k.f(x)\right]=k.f'(x)$ | |
| **Producto** | $D\left[f(x).g(x)\right]=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$ | |
| **Cociente** | $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ | |
| **Regla de la cadena** | $D\left\{f\left[g(x)\right]\right\}=f'\left[g(x)\right].g'(x)$ | |
| **FUNCIÓN** | **FORMA SIMPLE** | **FORMA COMPUESTA** |
| **Potencia** | $D\left(x^k\right)=k.x^{k-1}$ | $D\left(f(x)^k\right)=k.f(x)^{k-1}.f'(x)$ |
| **Exponenciales** | $D\left(e^x\right)=e^x$<br>$D\left(a^x\right)=a^x.\ln a$ | $D\left(e^{f(x)}\right)=e^{f(x)}.f'(x)$<br>$D\left(a^{f(x)}\right)=a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$ |
| **Logarítmicas** | $D(\ln x)=\dfrac{1}{x}$<br>$D(\log_a x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$ | $D(\ln f(x))=\dfrac{1}{f(x)}.f'(x)$<br>$D(\log_a x)=\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{\ln a}\cdot f'(x)$ |
| **Trigonométricas** | $D(senx)=\cos x$<br>$D(\cos x)=-senx$<br>$D(tgx)=1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $D(senf(x))=\cos f(x)\cdot f'(x)$<br>$D(\cos f(x))=-senf(x)\cdot f'(x)$<br>$D(tgf(x))=\left[1+tg^2 f(x)\right]\cdot f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)$ |
| **Funciones arco** | $D(arcsenx)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$<br>$D(\arccos x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$<br>$D(arctgx)=\dfrac{1}{1+x^2}$ | $D(arcsenf(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$<br>$D(\arccos f(x))=\dfrac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$<br>$D(arctgf(x))=\dfrac{1}{1+f(x)^2}\cdot f'(x)$ |

**Derivación potencial-exponencial**

Una función potencial-exponencial es del tipo $a(x)^{b(x)}$, y está definida cuando $a$ toma valores estrictamente positivos. Si $a$ y $b$ son derivables, entonces $a(x)^{b(x)}$ también es derivable.

Veamos cómo se deriva: $f(x)=\left(x^2+1\right)^{senx}$

En primer lugar llamamos $y$ a esta función y tomamos logaritmos neperianos en la igualdad $y=\left(x^2+1\right)^{senx}$

$$\ln y = \ln\left(\left(x^2+1\right)^{senx}\right) = senx \cdot \ln\left(x^2+1\right)$$

Derivando

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln\left(x^2+1\right) + senx \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

Despejando $y'$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln\left(x^2+1\right) + senx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right) = \left(x^2+1\right)^{senx} \cdot \left(\cos x \cdot \ln\left(x^2+1\right) + senx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right)$$

**Derivación implícita.**
Cuando tenemos una igualdad en dos variables *x* e *y* en la que sabemos que *y* representa una función de *x*, podemos derivar implícitamente ambos miembros y, si después es posible despejar $y'$, obtendríamos una expresión de la derivada de *y* aunque no conozcamos esta función:
<u>Ejemplo</u>: La curva $xy + \ln y = 2$ pasa por el punto (2,1), ¿cuál es la tangente a la curva en ese punto?
Derivamos ambos miembros y después despejamos:

$$y + xy' + \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow y^2 + xyy' + y' = 0 \Rightarrow y^2 + \left(xy+1\right)y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y^2}{xy+1}$$

La pendiente de la tangente será $y'_{(2,1)} = \frac{-1^2}{2\cdot 1+1} = -\frac{1}{3}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x-2)$$

## ➢ <u>Ecuación de la recta tangente en un punto.</u>

La ecuación punto-pendiente de una recta es: $y - y_0 = m(x - x_0)$.
Dado que $m = f'(a)$ en el punto $\left(a, f(a)\right)$, tenemos que la ecuación de la recta tangente en ese punto es: $\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$

## ➢ <u>Ecuación de la normal.</u>

La recta normal de una función en un punto dado es aquella que es perpendicular a la recta tangente a la gráfica en dicho punto.
La pendiente de la recta normal está dada por $m' = -\frac{1}{m}$, entonces:

La ecuación de la normal será: $\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)}$

## ➢ <u>Relación entre continuidad y derivabilidad.</u>

"Si una función es derivable en un punto *a*, entonces es continua en ese punto." (El recíproco no es cierto).

<u>Demostración:</u>

Hay que probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, que es lo mismo que $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Como la función es derivable en *a*, existe $f'(a)$:

$$\lim_{h \to 0}\left(f(a+h) - f(a)\right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right) = \lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot \lim_{h \to 0} h = f'(a)\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{h \to 0}\left(f(a+h) - f(a)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

## ➢ <u>Función derivada. Derivadas de orden superior.</u>

Si una función $f(x)$ es derivable en todos sus puntos se puede definir una nueva función $f'(x)$, que le hace corresponder a cada punto su derivada, a esta función se le llama <u>función derivada</u> de $f(x)$.

Si a su vez la función $f'(x)$ es derivable en el punto *a*, entonces a esta derivada se le llama <u>derivada segunda</u> de $f(x)$ en *a*.

Si una función $f(x)$ es derivable dos veces en todos sus puntos se define una nueva función $f''(x)$, que le hace corresponder a cada punto su derivada segunda, a esta función se le llama <u>función derivada segunda</u> de $f(x)$.

Repitiendo el proceso se pueden obtener las derivadas sucesivas $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$, etc.

## EJERCICIOS

1) Calcula las derivadas de las siguientes funciones en el punto que se indica utilizando la definición:

a) $f(x)=\dfrac{-1}{x+1}$ en $x=2$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ en $x=-1$

2) Comprueba que la función $f(x)=|x|$ no es derivable en 0.

3) Deriva simplificando el resultado:

a) $y=\left(2x^2-3x+1\right)^3$

b) $y=\dfrac{2x}{(x^2+3)^3}$

c) $y=x^2\cdot senx$

d) $y=2^x\cdot\ln\left(x+1\right)$

e) $y=\dfrac{xe^{3x}}{\ln x}$

f) $y=\left(tg^2x+1\right)\cos x$

g) $y=x^2e^x\,2^{3x}$

h) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$

i) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

j) $y=\ln\left(\dfrac{senx}{x}\right)$

k) $y=\left(1-e^{-x}\right)\sqrt{x^2+\cos^2 x}$

l) $y=x\cdot\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

m) $y=\arccos\left(senx\right)$

n) $y=\cot g^3\left(3x^3\right)$

o) $y=\ln\left(tg\left(arcsenx\right)\right)$

p) $y=e^{tgx}+arctgx^2$

q) $y=3x+\sqrt{\cos(2x+1)}$

r) $y=\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\sqrt[3]{x^2-1}\right)$

s) $y=\dfrac{1+x^m}{1-x^m}$

t) $y=e^{3x}\cdot\sqrt{x^2+1}$

4) Calcula la función derivada:

a) $f(x)=(2x+1)^{\sqrt{x}}$

b) $f(x)=(\ln x)^{x^2+1}$

c) $f(x)=x^{x^2}$

d) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

e) $f(x)=\sqrt[x]{x\cos x}$

5) Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ en el punto de abscisa 2.

6) Halla los puntos en los que las rectas tangentes a la curva $y=3x^4+4x^3-12x^2+20$ son paralelas al eje de abscisas.

7) Deriva y simplifica :

a) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-4}$ $\left\{y'=\dfrac{x^2-2}{\sqrt{x^2-4}}\right\}$

b) $y=\ln\dfrac{senx+\cos x}{senx-\cos x}$ $\left\{y'=2\sec 2x\right\}$

c) $y=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}$ $\left\{y'=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right\}$

d) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\left\{y'=\dfrac{1}{1-x^2}\right\}$

e) $y=\ln \mathrm{tg}x$ $\left\{y'=\dfrac{1}{\mathrm{sen}x\cdot\cos x}\right\}$

f) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1-e^x}$ $\left\{y'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\right\}$

g) $y=\ln\left(senx\right)-x\cdot\cot gx\left\{y'=\dfrac{x}{sen^2x}\right\}$

i) $y=\dfrac{\text{tg}x-1}{\text{tg}x+1}\quad\left\{y'=\dfrac{2}{1+sen2x}\right\}$

h) $y=\text{arctg}\dfrac{\text{a}+x}{1-ax}\quad\left\{y\acute{}=\dfrac{1}{1+x^2}\right\}$

j) $y=\text{arcsen}\dfrac{1\text{-}x^2}{1+x^2}\quad\left\{y'=\dfrac{-2}{1+x^2}\right\}$

8) Usa la derivación logarítmica:

a) $y=x^{\sqrt[3]{x}}\qquad\left\{y'=x^{\sqrt[3]{x}}\left(\dfrac{\ln x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)\right\}$

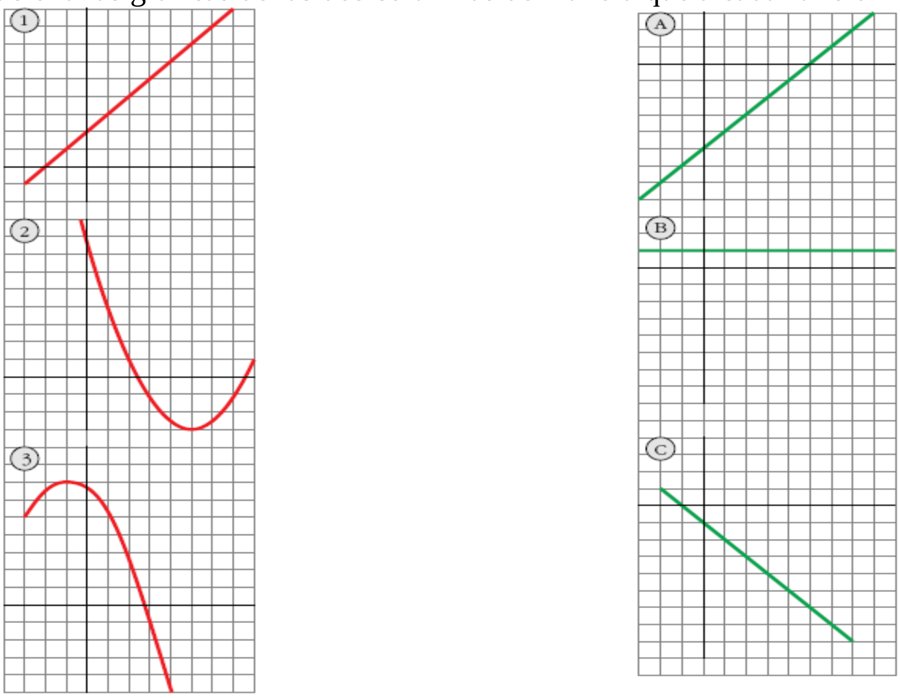
b) $y=\left(2x\right)^{\ln x}\qquad\left\{y'=\left(2x\right)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln 2x+\ln x}{x}\right)\right\}$

c) $y=\left(sen2x\right)^{x^2}\qquad\left\{y'=\left(sen2x\right)^{x^2}\left(2x\cdot\ln\left(sen2x\right)+\dfrac{2x^2\cdot\cos 2x}{sen2x}\right)\right\}$

d) $y=x^{x^2\cdot e^x}\qquad\left\{y'=x^{x^2\cdot e^x}\left(2xe^x\ln x+x^2e^x\ln x+xe^x\right)\right\}$

9) Halla el valor de *y*’ en el punto *x*=1, *y*=1, siendo $x^y\cdot y^x=1$

10) Relaciona las gráficas de las dos columnas de manera que a cada función le asignes su derivada.




11) Obtén *k* en la función $f\left(x\right)=\dfrac{kx+1}{2x+1}$ sabiendo que la pendiente de la recta tangente a su gráfica en $x_0=-1$ es -1.

12) Halla las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte de ésta con el eje de abscisas. $\{x-3y=2;\quad 3x+y=6\}$

13) Dada la función $f(x)=x^2+bx+c$, halla *b* y *c* para que la curva sea tangente a la recta $y=2x$ en el punto $P(2,4)$. $\{b=-2;c=4\}$

14) Dada la parábola de ecuación $y=x^2-2x+5$, halla la ecuación de la recta tangente que es paralela a la recta que une los puntos de dicha parábola de abscisas 1 y 3.

15) Estudia la derivabilidad de la función: $f(x)=\begin{cases} x^3\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & si \quad x\neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$

16) Calcula *a* y *b* para que sea derivable en R la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & (x\le 2) \\ x^2-bx-4 & (x>2) \end{cases}$

$\{a=2;b=-7\}$

17) Determina los puntos de la curva $y=x^3$, en los que su tangente es paralela a la recta $y=3x+14$.

$\{x=\pm 1\}$

18) Determina los valores del parámetro *a*, para que las tangentes a la curva $y=ax^3-a^2x^2+7x-18$ en los puntos de abscisas $x=1$ y $x=2$ sean paralelas. $\left\{a=0 \text{ ó } a=\dfrac{9}{2}\right\}$

19) Demuestra que la recta $y=-x+4$ es tangente a la curva $y=x^3-6x^2+8x$. Calcula el punto de tangencia, y estudia si la recta dada corta a la curva en otro punto distinto al de tangencia.

{*Punto de tangencia* (1,3);*la corta en* (4,0)}

20) Sea $f: R\to R$ la función dada por: $f(x)=\left|8-x^2\right|$. Dibuja la gráfica. Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x=-2$.

$\left\{(-2,4);\left(2-2\sqrt{6},20-8\sqrt{6}\right);\left(2+2\sqrt{6},20+8\sqrt{6}\right)\right\}$

21) Se sabe que la función $f:[0,5]\to R$, dada por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen *a*, *b* y *c*? $\left\{a=\dfrac{-3}{2};b=\dfrac{1}{2};c=-2\right\}$

22) Sean las funciones $f(x)=\ln x-b$, $g(x)=a\sqrt{x}+b$

a) Determina *a* y *b* para que ambas funciones sean tangentes entre sí al pasar por $x=1$.

$\{a=2;b=-1\}$

b) Determina en qué puntos se anula cada una de estas funciones. $\{f\to x=e^{-1};g\to x=1/4\}$

c) Determina cual es el dominio de la función producto $h(x)=f(x)g(x)$. $\{D(h)=(0,+\infty)\}$

23) Hallar los valores de *a*, *b* y *c* para que las gráficas de las funciones $f\left(x\right)=x^2+ax+b$ y $g\left(x\right)=x^3+c$ pasen por el punto $\left(1,2\right)$ y en este punto tengan la misma tangente. $\left\{a=1;b=0;c=1\right\}$

24) Dada la función *f* definida por: $f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & si \quad x\le -1 \\ ax^3+bx & si \quad -1<x<2 \\ 11x-16 & si \quad 2\le x \end{cases}$. Se pide:

a) Hallar $a$ y *b* para que la función sea continua en todo *x* real. $\left\{a=1;b=-1\right\}$

b) Analiza su derivabilidad. {Derivable en todo R, salvo en *x*=-1}

25) Dada la función: $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-5x+m & si \quad x\le 1 \\ -x^2+nx & si \quad x>1 \end{cases}$ se pide calcular los valores de los parámetros *m* y *n* para que sea continua y derivable en el intervalo $\left[-20,20\right]$. $\left\{m=2;n=-1\right\}$

26) Determina, si es que existen, los valores de *a* y *b* para los que la siguiente función es derivable en el punto $x=3$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad |x|\le 3 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x|>3 \end{cases}$$

a) ¿En qué punto la derivada de $y=(\ln x-1)\cdot x$ es 1?

b) ¿Hay algún punto en la curva $y=e^{2x}$ de tangente horizontal?

## SELECTIVIDAD:

***(Galicia, junio 2008)***

*a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.*

*b) Calcula los valores de a y b para que la función* $f(x)=\begin{cases} ax+b & si\, x<-1 \\ x^2-4x & si\, x\ge -1 \end{cases}$ *sea continua y derivable en x = –1.* $\{\, a=-6;b=-1\}$

***(Galicia, septiembre 2010)***

*Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.*

***(Galicia, junio 2012)***

*Determina los valores de a para que la función* $f(x)=\begin{cases} a-x^2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si \quad x>1 \end{cases}$ *sea continua. ¿Es derivable en x = 1 para algún valor de a?* {*continua para* $a=-1$ *ó* $a=2$ *no es derivable para ningún valor de a*}

***(Galicia, junio 2014)***

*Dada la función* $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ *calcula los valores de a, b, c sabiendo que* $x=\dfrac{1}{2}$ *es una asíntota vertical y que* $y=5x-6$ *es la recta tangente a su gráfica en el punto correspondiente a* $x=1$*. Para los valores de a, b, c calculados, ¿posee* $f\left(x\right)$ *más asíntotas?*

## 3. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS AL ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES LOCALES Y GLOBALES DE UNA FUNCIÓN

- Definición de función creciente y decreciente

Diremos que $f(x)$ es creciente en $a$ si existe un entorno de $a$ tal que para dos puntos cualesquiera del mismo de la forma $a-h, a+h\ (h>0)$ se verifica:

$$f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$$

Diremos que $f(x)$ es decreciente en $a$ si existe un entorno de $a$ tal que para dos puntos cualesquiera del mismo de la forma $a-h, a+h\ (h>0)$ se verifica:

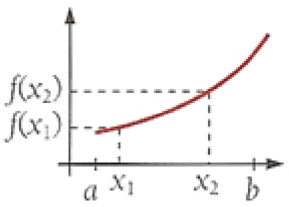
$$f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$$

Se dice que una función $f$ es creciente en un intervalo $(a,b)$, si es creciente en todos los puntos de ese intervalo, o intuitivamente, si se cumple:

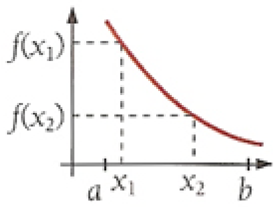
$$\forall x_1, x_2 \in (a,b) / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Una función $f$ es decreciente en un intervalo $(a,b)$, si es decreciente en todos los puntos de ese intervalo, o también si:

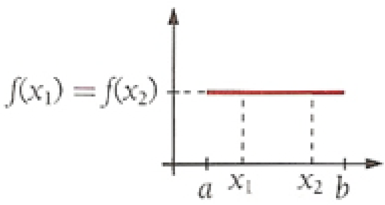
$$\forall x_1, x_2 \in (a,b) / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



Creciente



Decreciente



Constante

Proposición:

$f$ derivable y creciente en $a \Rightarrow f'(a) \geq 0$

$f$ derivable y decreciente en $a \Rightarrow f'(a) \leq 0$

Demostración:

$f$ creciente en $a \Rightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$

Por lo tanto, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$

Análogamente, se demostraría que si $f$ es decreciente en a, entonces $f'(a) \leq 0$.

Proposición:

$f$ derivable en $a$ y $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $a$.

$f$ derivable en $a$ y $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $a$.

Demostración:

Sabemos que $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h} > 0$ y por lo tanto existe un entorno de $a$ en que $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$

Por lo tanto, $f$ es creciente en $a$.

Análogamente el segundo apartado.

## Definición de extremos relativos y absolutos.

Se dice que un punto *a* es un <u>máximo relativo</u> de la función *f* si existe un intervalo abierto *I* que contiene a *a* tal que $f(x) \le f(a) \quad \forall x \in I$.

Se dice que un punto *a* es un <u>mínimo relativo</u> de la función *f* si existe un intervalo abierto *I* que contiene a *a* tal que $f(x) \ge f(a) \quad \forall x \in I$.

Se dice que un punto *a* es un <u>máximo absoluto</u> de la función $f$ si $f(x) \le f(a) \quad \forall x \in D(f)$.

Se dice que un punto *a* es un <u>mínimo absoluto</u> de la función $f$ si $f(x) \ge f(a) \quad \forall x \in D(f)$.

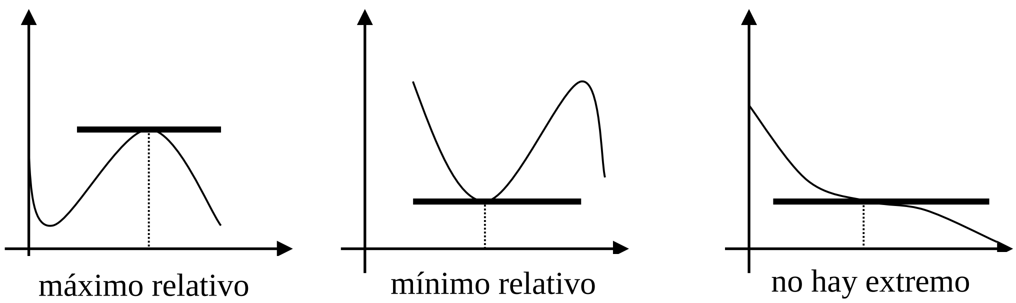
## Criterios para el cálculo de extremos relativos.

**Teorema.**

"Si *f* es una función derivable y *a* es un máximo o mínimo relativo entonces $f'(a) = 0$"

El enunciado recíproco no es cierto. Así, por ejemplo la función $f(x) = x^3$, verifica que $f'(0) = 0$ y, sin embargo, en $x = 0$ no tiene extremo (es creciente).

El teorema anterior nos permite hallar los puntos candidatos a máximos o mínimos en un intervalo abierto. Estos puntos son las raíces o ceros de la ecuación $f'(x) = 0$.




Obtenidos estos puntos, los siguientes criterios precisan si en ellos existe máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas.

- <u>Criterio 1. Variación del signo de la derivada primera en el entorno del punto.</u>

Sea $x = a$ un punto donde la función puede alcanzar un máximo o un mínimo relativo.

- Si a la izquierda de $x = a$ es $f' > 0$ (función creciente) y a la derecha $f' < 0$ (función decreciente), entonces la función alcanza un <u>máximo relativo</u> en ese punto.
- Si a la izquierda de $x = a$ es $f' < 0$ (función decreciente) y a la derecha $f' > 0$ (función creciente), entonces la función alcanza un <u>mínimo relativo</u> en ese punto.

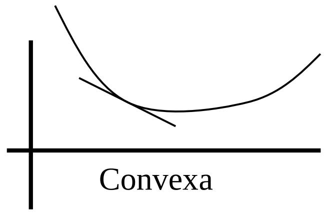
- <u>Criterio 2. Valor de la derivada segunda en el punto.</u>

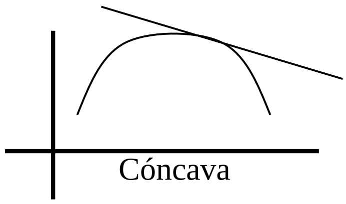
Si *f* es una función dos veces derivable en el punto $a$ y además, $f'(a) = 0$. En $x = a$ la función puede alcanzar un máximo o un mínimo,

- Si $f''(a) > 0$, entonces la función alcanza un mínimo relativo en $x = a$.
- Si $f''(a) < 0$, entonces la función alcanza un máximo relativo en $x = a$.

## ➢ Concavidad y convexidad.

Se dice que una función *f* es convexa en un intervalo si en cualquier punto de ese intervalo la recta tangente a la gráfica está por debajo de ella.
Se dice que es cóncava si la recta tangente está por encima de la gráfica.




**Teorema.**
"Si una función *f* es dos veces derivable en el intervalo abierto (*a*,*b*), se cumple que si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ entonces la función es convexa, y si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$ entonces es cóncava."

### o Puntos de inflexión.

Los puntos donde la función pasa de cóncava a convexa o viceversa se llaman puntos de inflexión.

**Teorema**
"Si *f* es una función dos veces derivable y *a* es un punto de inflexión entonces $f''(a) = 0$."

## ➢ Criterio para el cálculo de puntos de inflexión

- Si en la función se anula la derivada segunda en $x = a$, y esta cambia de signo de la izquierda a la derecha entonces es un punto de inflexión. Si la derivada segunda no cambia de signo no lo es.
- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow x = a$ es punto de inflexión.

## ➢ Problemas de optimización.

El cálculo de máximos y mínimos mediante derivadas permite resolver de una manera sencilla y rápida muchos problemas que aparecen tanto en matemáticas como en otras disciplinas científicas. Son problemas en los que se trata de optimizar una función. Por ejemplo, minimizar los costes de una producción, buscar la forma adecuada para comercializar un producto, etc.

Para resolverlos seguiremos el esquema general:

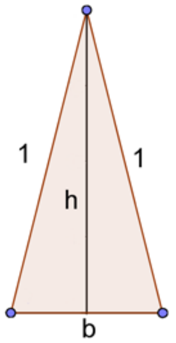
1) Mediante los datos del problema se plantea la función que hay que maximizar o minimizar. La mayoría de las veces tiene dos variables.
2) Si la función tiene más de una variable hay que relacionar las variables mediante ecuaciones a fin de conseguir expresar la función inicial planteada (punto 1) en función de una sola variable.
3) Se hallan los máximos y mínimos de esta función.
4) Se interpretan los resultados obtenidos rechazando aquellos que por la naturaleza del problema no sean posibles.

Ejemplos:

1.-De todos los triángulos isósceles con lados iguales de longitud 1m, cuál es el que tiene área máxima?

En primer lugar consideramos la función a optimizar, en este caso el área:

A = $\dfrac{b\cdot h}{2}$ , vemos que se trata de una función en dos variables, por lo tanto tenemos que encontrar una relación entre ambas variables que nos permita reducir la función a optimizar a una única variable.




Teniendo en cuenta los datos del problema:

$$h^2+\frac{b^2}{4}=1$$

Despejando h:

$$h=\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}$$

Sustituyendo en la expresión del área:

$$A=\frac{b\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}}{2}=\frac{1}{2}\left(b\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}\right)$$

Para hallar el valor máximo de esta función, calculamos la derivada:

$$A'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}+b\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}}\cdot\left(\frac{-2b}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{2b^2}{4}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}}$$

Igualamos la derivada a 0: $A'=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{b^2}{2}=0\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{2}$

Se comprueba fácilmente que $b=\sqrt{2}$ es el máximo de la función.

Por lo tanto el triángulo de área máxima es el de base $b=\sqrt{2}$ y altura $h=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ , y ese área es de 0,5m$^2$

2.- Una hoja de papel publicitario, de forma rectangular, debe llevar una zona impresa de 128 cm$^2$, y los márgenes deben ser de 1 cm para la superior y la inferior, y de 2 cm para las laterales. ¿Cuáles serán las dimensiones del rectángulo de papel de menor área donde se puede imprimir la hoja?

Llamamos *x* e *y* a las dimensiones. La función a minimizar es $A=x\cdot y$
Buscamos la relación entre ambas variables:
La zona impresa tiene un área de $(x-2)(y-4)=xy-2y-4x+8=128cm^2$

Despejamos *y* en función de *x*:

$$y(x-2)-4x=120 \Rightarrow y=\frac{4x+120}{x-2}$$

Sustituyendo en la expresión del área:

$$A=x\cdot\frac{4x+120}{x-2}=\frac{4x^2+120x}{x-2}=4\cdot\frac{x^2+30x}{x-2}$$

Derivando:

$$A'=4\cdot\frac{(2x+30)(x-2)-(x^2+30x)}{(x-2)^2}=4\cdot\frac{x^2-4x-60}{(x-2)^2}$$

$$A''=4\cdot\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-60)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4}=4\cdot\frac{128}{(x-2)^3}$$

Al igualar $A'=0$, obtenemos las soluciones $x=-6$ y $x=10$, la primera no es válida y la segunda, sustituida en la segunda derivada, da claramente un valor positivo, por lo tanto $x=10$ es el valor en que se alcanza el mínimo. La solución es $x=10$ cm e *y* = 20cm y el área mínima es 200 $\text{cm}^2$.

## ➢ Enunciado de la Regla de l'Hôpital

Si *f* y *g* son dos funciones derivables, se cumple que:

1) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ y existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y además $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y además $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(*a* puede ser $\infty, -\infty$ o un número)

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{2x^2+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x}{4x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{4}=2$

**Nota:** La Regla de l'Hôpital sirve para hallar límites con indeterminaciones del tipo (0/0) y ($\infty/\infty$). Hay otros tipos de indeterminaciones como ($0\cdot\infty$), ($\infty-\infty$) que se reducen a uno de los anteriores transformando adecuadamente las expresiones.

Las indeterminaciones de tipo exponencial como $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ se resuelven considerando sus logaritmos.

$$a) \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x\cdot\tan x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan x+x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos x\cdot senx+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos xsenx}{-sen^2x+\cos^2 x+1}=\left(\frac{0}{2}\right)=0$$

$$b) \lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=(0\cdot-\infty)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

$$c) \lim_{x\to 0}(senx)^x=0^0$$

Llamamos L= $\lim_{x\to 0}(senx)^x$. Aplicando logaritmos:

$$\ln L=\ln\left(\lim_{x\to 0}(senx)^x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left((senx)^x\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\ln(senx)\right)=(0\cdot\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(senx)}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{senx}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{-senx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x-x^2senx}{-\cos x}=\frac{0}{-1}=0$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}(senx)^x=e^0=1$

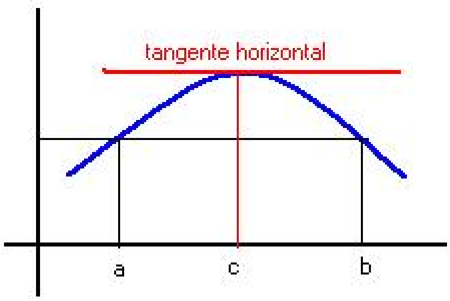
## ➢ Teorema de Rolle

- Enunciado

"Si una función *f* es continua en el intervalo cerrado [*a*,*b*], derivable en el abierto (*a*,*b*) y $f(a)=f(b)$, entonces existe un punto *c* del intervalo (*a*,*b*) tal que $f'(c)=0$"

- Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

Si una función es continua en el intervalo cerrado [*a*,*b*], derivable en el abierto (*a*,*b*) y $f(a)=f(b)$, entonces existe un punto *c* en el interior del intervalo (*a*,*b*) en el cual la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente cero, es decir, es paralela al eje de abscisas.



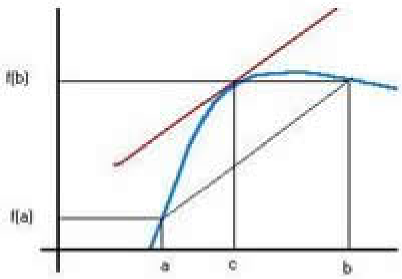

El Teorema de Rolle se suele utilizar en combinación con el Teorema de Bolzano para estimar o incluso conocer con exactitud el número de soluciones de una ecuación.

## ➢ Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (o de los Incrementos Finitos)

Enunciado

"Si una función es continua en el intervalo cerrado [*a*,*b*] y derivable en el abierto (*a*,*b*), entonces existe un punto *c* del intervalo (*a*,*b*) tal que $f(b)-f(a)=f'(c)\left(b-a\right)$, o lo que es lo mismo, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$„

- Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial




Si una función es continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el abierto (a,b), entonces en algún punto del interior del intervalo la tangente a la gráfica es paralela a la cuerda, recta que une a los puntos $\left(a,f(a)\right)$ y $\left(b,f(b)\right)$, ya que la pendiente de esta recta es $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

## 4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para representar gráficamente una función vamos a seguir los siguientes pasos:

1) Dominio.
Es el conjunto de puntos en los que está definida la función (el conjunto de puntos que tienen imagen). Hay que tener en cuenta que los denominadores no pueden ser cero, no existen raíces de índice par de números negativos, no existen logarítmos de cero ni de números negativos, etc.

2) Simetrías.
Una función es simétrica par si $f(-x) = f(x)$.
Una función es simétrica impar si $f(-x) = -f(x)$
Si una función tiene alguna de estas simetrías podemos estudiarla sólo para la parte positiva del eje de abscisas y después se amplía a la parte negativa.

3) Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
Con el eje de abscisas serán los puntos donde $f(x) = 0$.
Con el eje de ordenadas será el punto $(0, f(0))$.

4) Asíntotas.
Las asíntotas son rectas a las que se aproxima infinitamente la gráfica de la función. Pueden ser de tres tipos:
   a) Asíntotas verticales. Son rectas de la forma $x = a$, y se dan cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, o cuando alguno de los límites laterales da $\pm\infty$. Para encontrarlas se comprueba en puntos que no están en el dominio (o en puntos en los que cambia la expresión de la función en funciones a trozos).
   b) Asíntotas horizontales. Son rectas de la forma $y = a$ ($a$ es un número), y se dan cuando $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$. (Sólo puede haber una para cada lado de la gráfica y no tienen porqué coincidir).
   c) Asíntotas oblicuas. Son rectas de la forma $y = mx + n$ ($m$ y $n$ son números), si la función ya tiene asíntotas horizontales no puede tener oblicuas, se da por la derecha cuando $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, en este caso se obtiene $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$. (La asíntota por el lado izquierdo se halla con $x \to -\infty$)

La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales u oblicuas, pero nunca a las verticales.

5) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
Se calculan las raíces de la derivada de la función (nos darán los posibles máximos o mínimos). En los intervalos abiertos que hay entre estos puntos (teniendo en cuenta el dominio), la derivada será positiva o negativa.
Los intervalos donde la derivada es positiva son los intervalos de crecimiento, los que tienen derivada negativa nos dan los intervalos de decrecimiento.
Un punto donde la derivada es cero será máximo si antes de él la función crece y después de él decrece, y será mínimo si antes la función decrece y después crece; (si antes y después crece, o si antes y después decrece, no es ni máximo ni mínimo).

6) Convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.
Se calculan las raíces de la derivada segunda de la función (nos darán los posibles puntos de inflexión). En los intervalos abiertos que hay entre estos puntos (teniendo en cuenta el dominio), la derivada segunda será positiva o negativa.
Donde sea positiva la función es convexa y donde sea negativa cóncava.

Un punto donde la derivada segunda es cero será de inflexión si antes de él la función es convexa y después cóncava, o viceversa.

7) Finalmente, se hace la representación gráfica teniendo en cuenta todos los pasos anteriores.

**Ejemplo de representación gráfica.**

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2-9}$$

1) Dominio.
Los puntos que anulan el denominador (3 y –3) no pertenecen al dominio, por tanto:
$D=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

2) Simetrías.
$f(-x)=\frac{e^{-x}}{(-x)^2-9}=\frac{e^{-x}}{x^2-9}$, como no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, no es simétrica ni par ni impar.

3) Cortes con el eje X.
$y=0\Rightarrow\frac{e^x}{x^2-9}=0\Rightarrow e^x=0\Rightarrow$ no tiene solución, no corta al eje X.
Corte con el eje Y.
$x=0\Rightarrow\frac{e^0}{0^2-9}=-\frac{1}{9}\Rightarrow$ lo corta en el punto $\left(0,-\frac{1}{9}\right)$

4) Asíntotas verticales. Buscamos en los puntos que no están en el dominio.
$\lim_{x\to-3}\frac{e^x}{x^2-9}=\pm\infty\Rightarrow x=-3$ es asíntota vertical
$\lim_{x\to3}\frac{e^x}{x^2-9}=\pm\infty\Rightarrow x=3$ es asíntota vertical
Asíntotas horizontales. Vamos a necesitar aplicar l'Hôpital.
$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty\Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal por la derecha
$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2-9}=0\Rightarrow y=0$ es asíntota horizontal por la izquierda
Asíntotas oblicuas. Por la izquierda no tiene pues ya la tiene horizontal.
$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3-9x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\infty\Rightarrow$ no tiene asíntota oblicua por la derecha.

5) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y Mínimos.
$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2-2x-9\right)}{\left(x^2-9\right)^2}=0\Rightarrow x^2-2x-9=0\Rightarrow x_1=1+\sqrt{10}, x_2=1-\sqrt{10}$ son los posibles máximos o mínimos.

| intervalos | $(-\infty,-3)$ | $(-3,1-\sqrt{10})$ | $(1-\sqrt{10},3)$ | $(3,1+\sqrt{10})$ | $(1+\sqrt{10},\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | - | - | + |
| | crece | crece | decrece | decrece | crece |

Crece en $(-\infty,-3)\cup(-3,1-\sqrt{10})\cup(1+\sqrt{10},\infty)$

Decrece en $(1-\sqrt{10},3)\cup(3,1+\sqrt{10})$

Hay un máximo en $x=1-\sqrt{10}\Rightarrow(1-\sqrt{10},-0'03)$

Hay un mínimo en $x=1+\sqrt{10}\Rightarrow(1+\sqrt{10},7'7)$

6) Convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.

$$f''(x)=\frac{e^x\left(x^4-4x^3-12x^2+36x+99\right)}{\left(x^2-9\right)^3}=0\Rightarrow x^4-4x^3-12x^2+36x+99=0\Rightarrow$$

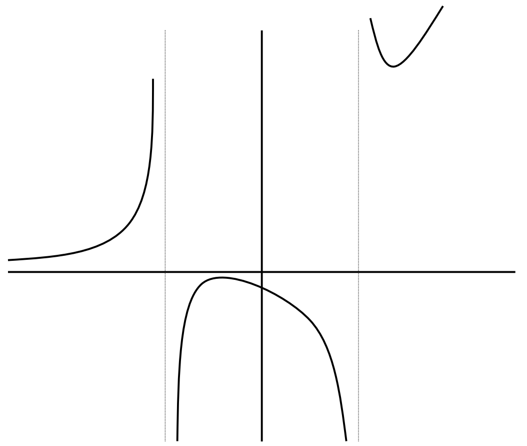
no tiene solución, por tanto no hay puntos de inflexión.

| intervalos | $(-\infty,-3)$ | $(-3,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | - | + |
| | convexa | cóncava | convexa |

Es convexa en $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

Es cóncava en $(-3,3)$

7) Representación gráfica.



## EJERCICIOS

1) Obtén los intervalos de monotonía y extremos relativos de las funciones:
   a) $f(x)=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$
   b) $f(x)=x\cdot e^{x^{2}-3x}$
   c) $f(x)=x^{2}-\ln x^{2}$

2) ¿Puede tener algún extremo relativo la función $y=2x+\cos x$?

3) Halla los intervalos de concavidad y convexidad (curvatura), y los puntos de inflexión de las funciones:
   a) $f(x)=\left(x-1\right)\cdot e^{-x}$ b) $f(x)=x\cdot|x|$

4) Obtén los parámetros *a* y *b* para que la función $y=x^{2}+ax+b$ alcance un mínimo en el punto P(-1,2).

5) La curva dada por $y=x^{2}+ax+b$ pasa por el punto P(-2,1) y alcanza un extremo relativo en $x=-3$. Halla *a* y *b*.

6) La función $f\left(x\right)=x^{3}+ax^{2}+bx+c$, tiene un punto de derivada nula en (1,1), que no es un extremo relativo. Razona el valor de a, b y c. $\{a=-3; b=3; c=0\}$

7) Halla los parámetros para que la función $f\left(x\right)=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$ tenga un máximo en el punto $M\left(-2,21\right)$ y un mínimo en el punto $m\left(-1,6\right)$.

8) Determina los parámetros para que la función $f\left(x\right)=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$ tenga un punto de inflexión en $P\left(-2,6\right)$ con tangente en ese punto paralela a la recta $8x+7y+10=0$, y que tome además el valor –2 para *x*=0.

9) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^{3}-6x^{2}+16x-11$ en su punto de inflexión.

10) Halla *b. c* y *d* para que $f\left(x\right)=x^{3}+bx^{2}+cx+d$ tenga un punto de inflexión en $x=3$, pase por P(0,1) y alcance un extremo en $x=-3$.

11) Calcula el valor de *a* (número real) para que la gráfica de la función $f(x)=ax^{2}+\dfrac{1}{x^{2}}$ tenga un punto de inflexión en $\mathrm{P}\left(1, f(1)\right)$, y obtén la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto. $\{a=-3\}$

12) Halla los extremos absolutos de la función $f(x)=x^{3}-6x^{2}+10$ en el intervalo $\left[-1,7\right]$.

13) Encuentra una función cuadrática f que verifique las siguientes condiciones:
   a) $f''(3)=4$
   b) tiene un extremo relativo en $x=1/4$
   c) su gráfica pasa por $P(1,6)$.

14) La curva $y=x^3+\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma$ corta al eje de abscisas en x=1 y tiene un punto de inflexión en (3,2). Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje OX.

15) Determina los puntos de la curva $y=3x^2-5x+12$ en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas. Escribe las ecuaciones de esas tangentes.

16) Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por $y=\left|x^2+2x-3\right|$

17) Determina la función polinómica $ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que tiene como derivada segunda $x-1$ y que tiene un mínimo relativo en el punto $\left(4,-\frac{1}{3}\right)$. $\left\{P(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+13\right\}$

18) Dada la función $f(x)=x^x-2^x+x-1$, demuestra que existen $\alpha,\beta\in(1,2)$ tales que $f(\alpha)=0$ y $f'(\beta)=2$ . Di que teoremas utilizas.

*Problemas de optimización*

19) Determina dos números reales positivos de los cuales sabes que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo. {x=5;y=5}

20) Calcula la longitud que deben tener los lados de un terreno rectangular de 400 m$^2$ de área si queremos que el perímetro de su contorno sea el mínimo posible.

21) Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base? Recuerda: $V_{cono}=\frac{\pi}{3}R^2h$

22) Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8dm$^3$. Calcula las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima. {x=2;y=2}

23) Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30cm, ¿cuál es el de área máxima?

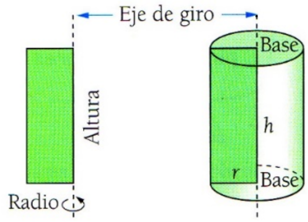
24) Se quiere construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54cm$^2$. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

(Recuerda: $V_{cilindro}=A_{base}\cdot altura=\pi R^2h;\ A_{total}=2\pi Rh+2\pi R^2$ )

25) Un alambre de 1 m de longitud se divide en dos trozos y con ellos se construye un cuadrado y un círculo respectivamente. Calcula la longitud que tiene que tener cada trozo para que la suma de las áreas sea mínima.

26) Divide un segmento de 60 cm en dos partes tal que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas sea mínima.

27) Determina la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60cm que, que al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, gire un cilindro de volumen máximo.




28) Dada la función $f:[1,e]\rightarrow \Re$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, determina cuales de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.

29) De todas las rectas que pasan por (1,2) encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.

30) Entre todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia de 10cm de diámetro, ¿cuál es el de área máxima?

31) Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80cm$^3$. Para la tapa y para la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Determina las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

32) Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 Km. y 5 Km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 Km/h y caminar a 5 Km/h, ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible?

33) De entre todos los rectángulos de área la unidad, hallar las dimensiones de aquel que tiene mínimo el producto de sus diagonales.

34) Determina el punto de la gráfica que a cada número le hace corresponder su doble y cuya distancia al punto (6,3) es mínima. ¿Cuál es esa distancia?

35) ¿Qué dimensiones debe tener un paragüero con forma de prisma cuadrado de 20dm$^3$ de volumen, para que en su fabricación se gaste la menor cantidad posible de material?

36) De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de 5cm de radio, halla las dimensiones del que tiene mayor área.

37) Considérense las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=-e^{-x}$

Para cada recta *r* perpendicular al eje X, sean A y B los puntos de corte de dicha recta con las gráficas *f* y *g* respectivamente. Determínese la recta *r* para la cual el segmento AB es de longitud mínima.

38) De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$, determina el que tiene mayor área.

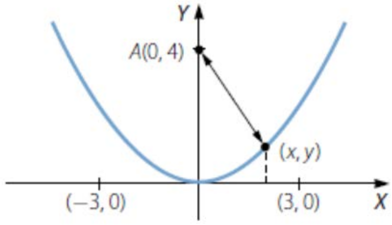
39) Un río describe la curva $y=\frac{1}{4}x^2$ con $x\in[-3,3]$.

En el punto A(0,4) hay un pueblo.

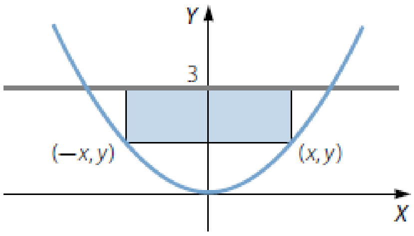
a) Expresa la función distancia entre un punto cualquiera del río y el pueblo en función de la abscisa x.

b) ¿Cuáles son los puntos de este tramo del río que están más alejados y más cercanos al pueblo (Sugerencia: estudia los máximos y mínimos del cuadrado de la función hallada en el apartado anterior)

c) ¿Hay algún punto del río que esté a una distancia menor que 2 del pueblo?




40) Considérese el recinto limitado por la curva y = $x^2$ y la recta y = 3. De entre los rectángulos situados como el de la figura, determinar el que tiene área máxima.




41) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ $\{1\}$

b) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x}{x^4}$ $\{\infty;0\}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}$ $\{2\}$

d) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)$ $\{0\}$

e) $\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}$ $\{1/6\}$

f) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{bx}$ $\{a/b\}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\{0\}$

h) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{2x}$ $\left\{\frac{\ln a-\ln b}{2}\right\}$

i) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{sen}(a+x)}-e^{\operatorname{sen}a}}{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}a}$ $\{e^{\operatorname{sen}a}\}$

j) $\lim_{x\to0^+}x^2\ln x$ $\{0\}$

k) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ $\{-1/2\}$

l) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x+1\right)$ $\{-1/2\}$

m) $\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$ $\{2\}$

n) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ $\{1/2\}$

o) $\lim_{x\to0}(1-\cos x)^{tgx}$ $\{1\}$

p) $\lim_{x\to0^+}x^x$ $\{1\}$

q) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}$ $\{1\}$

r) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x^2}$ $\left\{e^{-1/2}\right\}$

s) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$ $\{1\}$

t) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x+e^x+e^{2x}}$ $\left\{e^2\right\}$

u) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)\cdot tg\,\dfrac{\pi x}{2}$ $\left\{\dfrac{-4}{\pi}\right\}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\operatorname{sen}x-e^x}{\left(\operatorname{arctg}x\right)^2}$ $\left\{-1/2\right\}$

42) ¿Para qué valores de a y b es $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}+b\right)=0$? $\left\{a=-3;b=9/2\right\}$

43) Estudia la derivabilidad de la función: $h(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x & si \quad x\geq 0\\ x^2 & si \quad -1<x<0\\ -2x-1 & si \quad x\leq -1\end{cases}$

44) Se define la función $f$ del siguiente modo: $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x-1 & si \quad x>1\\ 2x^2+ax+b & si \quad x\leq 1\end{cases}$

Encuentra los valores de $a$ y $b$ para que la función sea continua y pase por el origen de coordenadas.

Demuestra que es derivable en todo R $\left\{a=-3;b=0\right\}$

45) Comprueba que se verifica el teorema de Rolle, para las funciones:

a) $f(x)=x^3-2x^2+x+1$, en $\left[0,1\right]$ $\left\{c=1/3\in\left(0,1\right)\right\}$

b) $f(x)=x^3-12x$, en $\left[0,2\sqrt{3}\right]$ $\left\{c=2\in\left(0,2\sqrt{3}\right)\right\}$

46) Comprueba que la función $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & si \quad x=0\\ x^x & si \quad 0<x\leq 1\end{cases}$ verifica las condiciones del teorema de Rolle y encuentra un punto que verifique la tesis. $\{c=1/e\}$

47) ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a las funciones?:

a) $f(x)=\operatorname{tg}x$, en $\left[0,\pi\right]$

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, en $\left[-1,1\right]$

c) $f(x)=x-x^2$, en $\left[-1,0\right]$

d) $f(x)=x-x^2$, en $\left[0,1\right]$

e) $f(x)=\begin{cases}2x & si \quad 0\leq x\leq 1\\ 3-x & si \quad 1<x\leq 3\end{cases}$ $\left[0,3\right]$

48) Si $f(x)=2+x^3\left(x-2\right)^2$, prueba, sin calcular la derivada, que la ecuación $f'(x)=0$ posee al menos una raíz real positiva menor que 2. Después, calcúlala {intervalo [0,2]; $c=6/5$}

49) Demuestra que la ecuación $e^x=1+x$ tiene únicamente la solución real $x=0$.

50) Prueba que la ecuación $x^3+x^2-1=0$ tiene una y sólo una solución en el intervalo (0,1).

51) Comprueba que la ecuación $2x^3-3x^2-9x+10=0$ tiene una sola solución en el intervalo (2,3).

52) Comprueba que se verifica el teorema del Valor Medio para las funciones y determina el punto en que la recta tangente a la gráfica es paralela a la secante:

a) $f(x) = x^3 - 2x - 2$ en $[1,2]$

b) $f(x) = x - 3\,\text{sen}\, x$ en $[0,\pi]$ $\{c = \pi/2\}$

53) ¿Es aplicable el teorema del Valor Medio a la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad -2 \le x < -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & si \quad -1 \le x \le 0 \end{cases}$, en el intervalo $[-2,0]$? En caso afirmativo, encuentra el punto interior al que hace mención dicho teorema.

54) Si $f(x) = \begin{cases} x+1 & para \quad x \le 0 \\ ax+b & para \quad 0 < x < 1 \\ 3x & para \quad x \ge 1 \end{cases}$, determina *a* y *b* para que sea continua. ¿Se puede aplicar el teorema del Valor Medio a $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$? Justifica la respuesta

{ $a = 2; b = 1$; sí porque es derivable en (0,1)}

55) Halla el punto en el que la recta tangente a la curva $y = 4 - x^2$ es paralela a la cuerda que une los puntos de la gráfica A$(-1, f(-1))$ y B$(2, f(2))$ $\left\{c = \dfrac{1}{2}\right\}$

56) Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} \alpha x - 1 & si \quad x \in [0,2) \\ x^2+3 & si \quad x \in [2,3] \end{cases}$ cumple el teorema del Valor Medio.

Encuentra el valor de $\alpha$ y comprueba todas las hipótesis. ¿Qué punto *c* satisface la tesis? $\{\alpha = 4; c = 13/6\}$

57) Determina *b* y *c* para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2+bx+c & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$,

y utilizando el teorema del valor medio, demostrar que existe un punto $x_0$ del intervalo $(0, e-1)$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{2-e}{(e-1)^2}$ $\{b = -1/2; c = 1\}$

58) Sea *f* una función real definida en todo R. Se conocen sobre *f* los siguientes datos: es derivable en $x = -1$, es discontinua en $x = 0$, es derivable en $(2,\infty)$, $f(3) = 7$, $f(4) = 5$, y $f(5) = 7$.

Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

A) La función *f* es continua en –1.
B) La función *f* es derivable en 0.
C) En el intervalo [10,15] alcanza un máximo y un mínimo.
D) En algún punto entre 3 y 5 la derivada vale 0.
E) En algún punto entre 4 y 5 la derivada vale 2.

59) Dadas las funciones *f* y *g*, dadas por:

$$f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{senx}{x}\right| & si \quad x\neq 0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases};\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{|senx|}{x} & si \quad x\neq 0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$$ ¿son continuas en $x=0$?

60) Representa gráficamente las siguientes funciones, calculando: dominio de definición, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de monotonía y extremos relativos, e intervalos de curvatura y puntos de inflexión:

a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $y=\dfrac{x^2}{2x-2}$

c) $y=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$

d) $y=\dfrac{1-x}{x^2}$

e) $y=\ln\left(x^2-9\right)$

f) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

g) $y=\dfrac{1}{\ln x}$

h) $y=e^{-x^2}$

i) $y=e^x(x-1)$

j) $y=(x-1)\cdot e^{-x}$

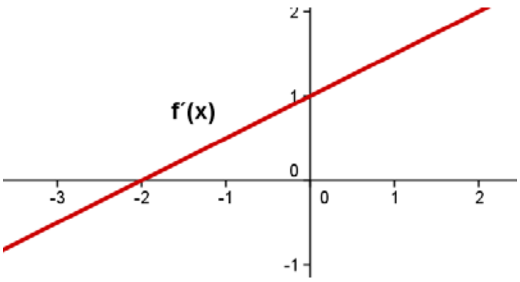
k) $y=x^2\cdot e^{-x}$

l) $y=x\cdot\ln x$

m) $y=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$

n) $y=\sqrt{x^2-x}$

o) $y=\sqrt{\dfrac{9x^3}{x-1}}$




61) La gráfica adjunta corresponde a la función derivada, f´, de una función f.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene máximos o mínimos

b) Estudia la concavidad y convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión?

62) Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demuestra que las curvas $y=\cos x$ e $y=\sqrt{x}$ se cortan en un único punto.

63) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{|x|}$

64) Si una función derivable y positiva $f(x)$ tiene un mínimo local en el punto $x=a$ y la segunda derivada $f''(a)$ no es nula, ¿qué se puede decir del signo de las dos primeras derivadas de $[f(x)]^2$ en ese punto?

65) Se considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por: $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \text{si } x\neq 0\\ \lambda, & \text{si } x=0\end{cases}$$

d) Calcula el valor de $\lambda$ para el cual $f$ es derivable en $x=0$ .

e) Calcula $f''(0)$ para ese valor de $\lambda$ .

## SELECTIVIDAD

***(Galicia, junio 2008)***

*Calcula el valor de m para que:* $\lim_{x\to 0}\dfrac{mx^2-1+\cos x}{sen\left(x^2\right)}=0$ $\left\{m=\dfrac{1}{2}\right\}$

***(Galicia, septiembre 2008)***

**A.** *Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.*

**B.** *Sea* $f(x)=e^x\left(2x-1\right)$. *Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.*

$\left\{\left(-1/2,-2.e^{-1/2}\right)\ mínimo;\ recta\ \tan gente\ \ x-y=1\right\}$

**C.** *Calcula a, b, c, para que* $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si\ \ x\le 0 \\ x+\ln\left(1+x^2\right) & si\ \ x>0\end{cases}$ *sea continua y derivable en R y tenga un extremo relativo en x = -2. (Nota: ln = logaritmo neperiano).*

$\left\{a=1/4,b=1,c=0\right\}$

**D.** *Sea* $g(x)=x\left(x-1\right),\ 0\le x\le 2$. *Razona si g(x) tiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo [0,2]. En caso afirmativo calcúlalos.* $\left\{\max(2,2);\min\left(1/2,-1/4\right)\right\}$

***(Galicia, junio 2009)***

**A.** *Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función* $g(x)=2x^3-3x^2$.

**B.** *Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial.*

**C.** *Calcula un punto de la gráfica de la función* $g(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ *en el que la recta tangente sea paralela al eje OX; escribe la ecuación de esa recta tangente. Calcula las asíntotas, si las tiene, de g(x).*

**D.** *Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función* $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$ *en x = 0?*

***(Galicia, septiembre 2009)***

**A.** *a) Calcula los valores de a e b para que la función* $f(x)=\begin{cases} ax+b & si\ \ x\le 0 \\ sen(2x)+1 & si\ \ x>0\end{cases}$ *sea continua y derivable en x = 0.* $\{\ b=1;a=2\ \}$

*b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f\left(x\right)=\left(1+x^2\right)e^{-x}$ *en el punto de abscisa x = 0.* {*x*+*y*=1}

**B.** *Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función* $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

***(Galicia, junio 2010)***

**A.** *Dibuja la gráfica* $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$*, estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.*

**B.** *Determina los valores a, b, c, d para que la función* $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *tenga un máximo relativo en el punto (0,4) y un mínimo relativo en el punto (2,0).*

$\{a=1, b=-3, c=0, d=4\}$

***(Galicia, septiembre 2010)***

**A.** *Calcula:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)}$

**B.** *Dibuja la gráfica* $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$*, estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad*

***(Galicia, junio 2011)***

**A.** *Enuncia el teorema de Rolle. Calcula el valor de k para que la función* $f\left(x\right)=x^3-kx+10$ *cumpla la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-2, 0] y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule la derivada de f(x).*

**B.** *Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $g(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ *(Nota: ln=logaritmo neperiano)*

**C.** *En una circunferencia de radio 10 cm, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias (región sombreada)? {los diámetros son 10u}*

**E.** *Define función derivable en un punto. Calcula, si existen, los valores de a y b, para que sea derivable la función* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{e^x} & si\ x<0\\ x^2+ax+b & si\ x\geq 0\end{cases}$ $\{a=-2; b=1\}$

***(Galicia, septiembre 2011)***

**A.** *Calcula los valores de a, b, c sabiendo que* $y=ax^2+bx+1$ *y* $y=x^3+c$*, tienen la misma recta tangente en el punto (1,2).*

**B.** *Calcula los extremos relativos de la función* $f\left(x\right)=x^4-8x^2+1$*. Calcula también el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo [-3,3].*

**D.** *Calcula los valores de a y b para que la función f(x)=* $f\left(x\right)=ax^2+bx\ln x$ *tenga un punto de inflexión en el punto (1,2). Para estos valores de a y b, calcula el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). (Nota: ln=logaritmo neperiano)*

***(Galicia, junio 2012)***

**A.** *Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial*

**B.** *a) Enuncia el teorema de Bolzano. Probar que la función* $f(x) = x^3 + 2x - 4$ *corta al eje OX en algún punto del intervalo [ 1,2]. ¿Puede cortarlo en más de un punto?*

*b) Calcula* $\lim_{x \to 0} \left( \frac{x+2}{x^2 + x + 2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

***(Islas Baleares, 2010)***

*Se considera la función y = f(x) definida en el intervalo* $[0, \pi]$ *de la forma siguiente:*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{senx} & si \quad 0 < x < \pi \\ 0 & si \quad x = \pi \end{cases}$$

*a) Estudie la continuidad*
*b) Dibuje la función en un entorno de x= 0 y de x =* $\pi$

***(Galicia, septiembre 2012)***

**A.** *Calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$

**B.** *a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.*

*b) Si* $c > 2$*, calcula los valores de a,b,c para que la función f(x) =* $\begin{cases} x^2 + ax + b & si \quad x < 2 \\ x + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

*cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,c].*

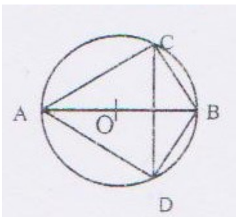
***(Galicia, junio 2013)***

**A.** *a) Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Tiene la ecuación* $x^3 + 2x - 2 = 0$ *alguna solución en el intervalo (0,1)? ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?*

*b) Calcula los valores de a y b para que* $\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$

**B.** *Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función* $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ .

**C.** *En una circunferencia de centro O y radio 10 cm. se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?*




**D.** *Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función* $f(x) = x^3 + ax - 1$ *en el intervalo [0,1]. Para este valor de a, calcula un punto* $c \in (0,1)$ *en el que la recta tangente a la gráfica de f(x) sea paralela al eje OX.*

***(Galicia, septiembre 2013)***

**A.** *Calcula:* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{xe^{x}}$

**B.** *Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de* $f(x)=\frac{2x+1}{e^{x^2}}$

***(Galicia, junio 2014)***

**A.** *Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)=2x^3-6x^2+1$ *en su punto de inflexión.*

**B.** *Calcula* $\lim_{x\to 1} \frac{ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}$ *(Nota: ln = logaritmo neperiano)*

**C.** *Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. ¿Se puede aplicar, en el intervalo [0,1], este teorema a la función* $f(x)=\frac{1}{2-x}$*? En caso afirmativo, calcula el punto al que hace referencia el teorema.*

# EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DE LÍMITES

**1)** Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot\left[1+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x+1}{x^2-16}-\dfrac{x}{x-4}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-1}\right)^{2x+1}$

**2)** Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+x+1}{10x^3+x^2+4x}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+6x+8}{x^3+4x^2+4x}$

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{64+x^3}{64+16x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{\pi x^3+ex^2-x+458}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{45x^2+1000}{x^4}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{5}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x}+1}$

**3)** Resuelve, indicando la indeterminación:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{x+2}{x+1}\cdot(x^3+1)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x^4-1)\cdot(x-1)^{-1}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{x+1}-x\right]$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2+x^3}\right)$

**4)** Calcula los siguientes límites, usando cambio de variable si es necesario.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e}{(e^x)^3-e^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{(e^x)^3-e^3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{3^x-1}$

**5)** Calcula los límites relacionados con el número e.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+(x-2)\right)^{\frac{1}{-x^2+4}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{3x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+3}\right)^{x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x}\right)^{\frac{3x^2}{x+1}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

## 5. PRIMITIVAS DE UNA FUNCIÓN

### ➢ Definición

Se llama <u>primitiva</u> de una función *f* a cualquier función *F* que tenga por derivada la función *f*, es decir $F'(x) = f(x)$.

- Teorema

Todas las primitivas de una función se diferencian en una constante. (Por tanto las primitivas de una misma función tienen gráficas paralelas).

### ➢ Definición de integral indefinida

Se llama <u>integral indefinida</u> de una función *f* al conjunto de todas sus primitivas, y se representa $\int f(x)dx$.

Sea *F* una cualquiera de las primitivas de *f*, entonces:

$\int f(x)dx = F(x) + C$ (al número real *C* se le llama constante de integración)

### ➢ Propiedades lineales

Como consecuencia de las propiedades de derivación:

a) $\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

b) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ (esta relación permite introducir constantes dentro del signo de integración o sacarlas fuera, según convenga)

### ➢ Cálculo de integrales inmediatas

Teniendo en cuenta que la integración es el proceso recíproco de la derivación, llega con utilizar la tabla de derivadas para obtener:

| | |
|---|---|
| $\int kdx = kx + C$ | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$ |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$ | $\int e^x dx = e^x + C$ |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$ |
| $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$ | $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$ |
| $\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$ | $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\cos x + C$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$ | $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$ |

EJEMPLOS:

- $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{2/3}dx = \dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$
- $\int x\,sen\,(x^2+5)dx = \dfrac{1}{2}\int 2x\,sen\,(x^2+5)dx = -\dfrac{1}{2}\cos(x^2+5) + C$
- $\int \dfrac{x^2}{1+x^6}dx = \dfrac{1}{3}\int \dfrac{3x^2}{1+(x^3)^2}dx = \dfrac{1}{3}arctx(x^3) + C$

## ➢ Cálculo de primitivas

### o Integrales casi inmediatas y/o ajuste de la constante.

Una integral casi inmediata es del tipo $\int f(u(x))u'(x)\,dx$ donde *f(x)* es una función integrable inmediatamente y *u(x)* es una función derivable. En esta situación, si *F(x)* es una primitiva de *f(x)* entonces podemos resolver la integral casi inmediata así:

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

La razón de esta igualdad reside en la regla de la cadena del cálculo diferencial. Al ser *F* una primitiva de *f*, tenemos que *F´=f*, entonces:

$$\left(F\left(u(x)\right)\right)' = \left(F\circ u\right)'(x) = F'(u(x))\cdot u'(x) = f(u(x))\cdot u'(x)$$

Por tanto *F(u(x))* es una primitiva de $f(u(x))\cdot u'(x)$

EJEMPLOS:

- $\int \dfrac{Lx}{x}dx = \int Lx\cdot\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{(Lx)^2}{2} + C$
- $\int e^{senx}\cdot\cos x dx = e^{senx} + C$
- $\int \dfrac{3x^2}{x^3+1} = \int \dfrac{1}{x^3+1}\cdot 3x^2dx = L\left|x^3+1\right| + C$

En muchas ocasiones hay que introducir constantes de ajuste antes de aplicar esta técnica. Esto ocurre cuando tenemos que resolver una integral del tipo $\int h(x)dx$ y sabemos que, para una cierta constante k, la integral $\int k\cdot h(x)dx$ es casi inmediata, entonces podemos escribir: $\int h(x)dx = \dfrac{1}{k}\int k\cdot h(x)dx$

(Si en una integral multiplicamos dentro del integrando por un número distinto de 0 multiplicamos fuera de la integral por su inverso, la expresión obtenida es igual a la integral inicial)

- <u>Método de integración por partes.</u>

Se basa en la derivada del producto de funciones:

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

integrando:

$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx \Rightarrow \int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$ Haciendo $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$, se obtiene:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

A la hora de aplicar esta fórmula, hay que elegir u y dv en el integrando (lo que exige intuición y entrenamiento), si la nueva integral es más complicada que la de partida hay que cambiar de elección.

<u>EJEMPLOS:</u>

- $\int 2x\cos xdx = 2xsenx - \int 2senxdx = 2xsenx + 2\cos x + C$

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

$dv = \cos xdx \Rightarrow v = senx$

- $\int \ln xdx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

- $\int x^2\cos xdx = x^2 senx - \int 2xsenxdx = x^2 senx - \left(-2x\cos x - \int -2\cos xdx\right) = x^2 senx + 2x\cos x - 2senx + C$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$ $\qquad$ $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

$dv = \cos x \Rightarrow v = senx$ $\qquad$ $dv = senx \Rightarrow v = -\cos x$

En algunos casos hay que aplicar este método varias veces. Ej: $\int x^2\cdot e^x dx$

A veces vuelve a aparecer en el segundo miembro la integral de partida, en este caso se despeja. Ej: $\int e^x\cdot senxdx$

- <u>Método de cambio de variable.</u>

Se basa en la regla de la cadena:

Se utiliza cuando dentro de la integral aparece la derivada de alguna función que está también dentro de la integral; es decir, cuando la integral tiene una forma como:

$\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)dx$

Haciendo el cambio de variable: $t = u(x)$, tenemos que $dt = u'(x)dx$, por tanto la integral quedará:

$$\int f(t)dt$$

De esta manera la integral resulta más fácil de resolver. Una vez resuelta hay que deshacer el cambio $t = u(x)$.

EJEMPLOS:

- $\int \cos(x^2)\cdot xdx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\cdot 2xdx = \frac{1}{2}sen\left(x^2\right)+C$
- $\int \frac{5x}{x^2+5}dx = 5\int \frac{x}{x^2+5}dx = 5\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}dx = \frac{5}{2}\ln\left(x^2+5\right)+C$
- $\int \frac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = arctx\sqrt{x}+C$

Ej: $\int \frac{x}{x^2+3}dx$ ; $\int \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ; $\int 5sen^4x\cdot\cos xdx$

- Integración de funciones racionales.

Las integrales a resolver son de la forma:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si el grado de $P$ es mayor o igual que el de $Q$, se hace la división y quedaría:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, donde $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el resto. Por tanto:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$, además $\int C(x)dx$ es fácil de integrar pues es la integral de un polinomio.

Nos queda por integrar $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$, que es una función racional, pero ahora el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

La integración de estas funciones depende del tipo de raíces del denominador. Veamos los siguientes casos:

**El denominador sólo tiene raíces reales sencillas**:

Si $Q(x)$ tiene $n$ raíces reales sencillas $a_1, a_2, ..., a_n$, se puede descomponer como:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot...\cdot(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_n}{x-a_n}$$

Siendo $A_i$ constantes que se hallan haciendo las sumas del último miembro e igualando el numerador obtenido con el numerador del principio. Para despejar estas constantes lo más rápido es darle valores a las "$x$" (preferentemente las raíces $a_i$).

La integral quedará descompuesta de la manera:

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}dx + ... + \int \frac{A_n}{x-a_n}dx$$

donde cada sumando es fácil de integrar puesto que: $\int \frac{A_i}{x-a_i}dx = A_i \ln|x-a_i|+C$

Ej: $\int \frac{3}{-5x+4}dx$; $\int \frac{5x+5}{2x^2+3x-2}dx$

**El denominador tiene raíces reales, pero algunas múltiples:**
Si el denominador tiene una raíz múltiple, al descomponerlo ésta da lugar a tantas fracciones como su orden de multiplicidad:
Si, por ejemplo, $x_1$ es raíz real simple, $x_2$ es raíz real doble y $x_3$ es raíz real triple.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_2)}+\frac{A_3}{(x-x_2)^2}+\frac{A_4}{x-x_3}+\frac{A_5}{(x-x_3)^2}+\frac{A_6}{(x-x_3)^3}$$

donde los $A_i$ son constantes que hay que determinar.

Ej: $\int\frac{-7}{(3x-2)^5}dx$ ; $\int\frac{3x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

**El denominador tiene raíces complejas simples**:
Si en el denominador aparece un factor cuadrático irreducible tipo $ax^2+b$ (que no tiene raíces reales), en la descomposición le corresponde una fracción de la forma $\frac{Mx+N}{ax^2+b}$, siendo $M$ y $N$ constantes a determinar.

Tenemos que calcular una integral del tipo: $\int\frac{Mx+N}{ax^2+b}dx$

Esta integral se descompone en dos: una de tipo neperiano y otra de tipo arco tangente. Para la primera integral, se hace que en el numerador aparezca la derivada del denominador manejando las constantes y luego la segunda integral queda de la forma $\int\frac{K}{ax^2+b}dx$ .

Ejemplo:

$$\int\frac{2x+1}{4x^2+9}dx=\int\frac{2x}{4x^2+9}dx+\int\frac{1}{4x^2+9}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4\cdot 2x}{4x^2+9}dx+\frac{1}{9}\int\frac{1}{\frac{4x^2}{9}+\frac{9}{9}}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|4x^2+9\right|+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\int\frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}dx=\frac{1}{4}\ln\left|4x^2+9\right|+\frac{1}{6}arctg\left(\frac{2x}{3}\right)+C$$

## EJERCICIOS

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

1) $\int (1-x)\sqrt{x}dx$

2) $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx$

3) $\int \frac{x^2}{\left(x^3+2\right)^3}dx$

4) $\int \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}dx$

5) $\int x\operatorname{cotg} x^2dx$

6) $\int (1+\operatorname{tg} x)^2\, dx$

7) $\int e^{3\cos 2x}\operatorname{sen} 2xdx$

8) $\int \frac{1}{\operatorname{cosec} x-\operatorname{cotg} x}dx$

9) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$

10) $\int (\cos x-\operatorname{sen} x)^2\, dx$

11) $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

12) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

14) $\int \sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}dx$

15) $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+2}dx$

16) $\int \operatorname{sen} x\cos xdx$

17) $\int \frac{1}{4+x^2}dx$

18) $\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}dx$

19) $\int \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{sen} x}{\cos x}dx$

20) $\int x\operatorname{sen} xdx$

21) $\int x^3\ln xdx$

22) $\int \ln(1-x)dx$

23) $\int x^2\cos xdx$

24) $\int \frac{x^2-2x+5}{e^x}dx$

25) $\int \frac{x}{e^x}dx$

26) $\int x^2e^xdx$

27) $\int \operatorname{arctg} xdx$

28) $\int (\ln x)^2\, dx$

29) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

30) $\int \operatorname{arcsen} xdx$

31) $\int x\operatorname{arctg} xdx$

32) $\int e^x\operatorname{sen} xdx$

33) $\int x^2\operatorname{arctg} xdx$

34) $\int \operatorname{sen}^2 xdx$

35) $\int \cos^3 xdx$

36) $\int \cos^3 x\operatorname{sen} xdx$

37) $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}dx$

38) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

39) $\int \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2\left(1-x^3\right)}dx$

40) $\int \frac{e^{\operatorname{cotg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}dx$

41) $\int \frac{5x}{1+x^4}dx$

42) $\int \frac{1}{3+x^2}dx$

43) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

44) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$

45) $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

46) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$

47) $\int x\cdot\sqrt{x-1}\,dx$

48) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

49) $\int \frac{1-e^x}{e^{2x}}dx$

50) $\int \frac{2^x}{1+4^x}dx$

51) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$

52) $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

53) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$

54) $\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4}dx$

55) $\int \frac{x-3}{x^3-4x^2+4x}dx$

56) $\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}dx$

57) $\int \frac{1}{x\cdot(x-1)^2}dx$

58) $\int \frac{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx$

59) $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}dx$

60) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}dx$

61) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

62) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

63) $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx$

64) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

65) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

66) $\int \operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^3 x\,dx$

67) $\int \cos^5 x\,dx$

68) $\int \cos^4 x\,dx$

69) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} dx$

70) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$

71) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\operatorname{sen} x} dx$

72) $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} dx$

73) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$
$x = \operatorname{sen} t$

74) $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$
$x = \sqrt{3}\operatorname{sen} t$

75) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx$
$x = \sec t$

76) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$
$x = \operatorname{tg} t$

77) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
$\ln x = t$

78) $\int e^{\operatorname{arcsen} x} dx$
$\operatorname{arcsen} x = t$

79) $\int x \cdot \operatorname{arcsen} x\,dx$
$x = \operatorname{sen} t$

80) Hallar la función definida en todo número real que verifica las dos condiciones siguientes:

a) $f'(x) = x^2 e^x$

b) Su gráfica pasa por $(0,2)$. $\{f(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)\}$

## CUESTIONES:

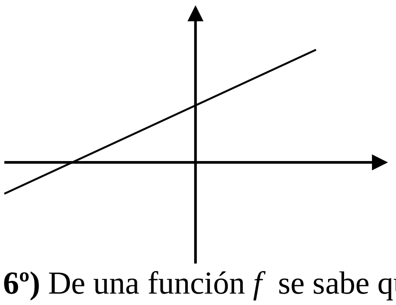
**1º)** La función $f(x) = 4x - 6$ tiene infinitas primitivas. ¿Cuál de éstas toma el valor 4 para $x = 1$?

**2º)** Calcula una primitiva de la función $f(x) = 3^{-x}$ que se anule cuando $x = 0$.

**3º)** Obtén la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquier punto viene dada por la función $f(x) = xe^{2x}$. Obtén la curva de dicha familia que pasa por A(0, 2).

**4º)** De una función sabemos estos datos: *y*''=8, *y*'(0)=0, *y*(0)=5. ¿Se puede calcular la función *y*? Razona la respuesta.

**5º)** La gráfica corresponde a la función $f'(x)$ primera derivada de una cierta función *f*.



a) Estudia el crecimiento e decrecimiento de *f*.
b) Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de *f*.
c) Obtén la ecuación de *f*'.
d) Obtén la expresión de la función *f* que pase por el punto (2, -4) y dibújala.

**6º)** De una función *f* se sabe que su gráfica pasa por (0, 0) y que su derivada es:
$f'(x) = \begin{cases} 2x & se \quad x < 1 \\ 2 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$. Halla la función *f* y representarla.

**7º)** Halla *f* si sabemos que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

**8º)** Halla un polinomio que tiene como derivada $x^2 + x - 6$ y tal que el valor de su máximo sea tres veces mayor que el de su mínimo.

**9º)** Un alumno escribe que una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $F(x) = \log x$. ¿Es correcta la contestación?

## SOLUCIONES:

1) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+C$

2) $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$

3) $\frac{-1}{6\left(x^3+2\right)^2}+C$

4) $2\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+C$

5) $\frac{1}{2}\ln senx^2=-\frac{1}{4}\ln\left|1+\cot g^2x^2\right|+C$

6) $tgx+\ln\left|1+tg^2x\right|=tgx-2\ln\left|\cos x\right|+C$

7) $-\frac{1}{6}e^{3\cos 2x}+C$

8) $\ln\left|1-\cos x\right|+C$

9) $\frac{-2}{3}\sqrt{1-x^3}+C$

10) $x+\cos^2 x+C$

11) $-\sqrt{1-x^2}+3arcsenx+C$

12) $x-arctgx+C$

13) $\frac{1}{3}arcsen3x+C$

14) $-\cos x+senx+C$

15) $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-6x+2\right|+C$

16) $\frac{1}{2}sen^2x+C$

17) $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C$

18) $-\ln\left|1-senx\right|+C$

19) $\frac{1}{\cos x}-\ln\left|\cos x\right|+C$

20) $senx-x\cos x+C$

21) $\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$

22) $x\ln\left|1-x\right|-x-\ln\left|1-x\right|+C$

23) $x^2senx-2senx+2x\cos x+C$

24) $-e^{-x}x^2-5e^{-x}+C$

25) $-e^{-x}x-e^{-x}+C$

26) $e^xx^2-2e^xx+2e^x+C$

27) $xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$

28) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$

29) $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

30) $xarcsenx+\sqrt{1-x^2}+C$

31) $\frac{1}{2}x^2arctgx+\frac{1}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+C$

32) $-\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^xsenx+C$

33) $\frac{1}{3}x^3arctgx+\frac{1}{6}\ln\left|1+x^2\right|-\frac{1}{6}x^2+C$

34) $\frac{-1}{2}\cos xsenx+\frac{1}{2}x+C$

35) $\frac{1}{3}\cos^2 xsenx+\frac{2}{3}senx+C$

36) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

37) $\ln\left|arctgx\right|+C$

38) $2sen\sqrt{x}+C$

39) $\frac{1}{3}\cot g\left(1-x^3\right)+C$

40) $-e^{\cot gx}+C$

41) $\frac{5}{2}arctgx^2+C$

42) $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C$

43) $arcsen\frac{x}{3}+C$

44) $arcsen\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

45) $\frac{1}{2}arcsen\frac{2x}{3}+C$

46) $-2\sqrt{2-x}+C$

47) $\frac{2}{3}\sqrt{\left(x-1\right)^3}+\frac{2}{5}\sqrt{\left(x-1\right)^5}+C$

48) $\ln\left|\ln x\right|+C$

49) $\frac{-1}{2e^{2x}}+\frac{1}{e^x}+C$

50) $\frac{arctg2^x}{\ln 2}+C$

51) $\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right|+C$

52) $x+\dfrac{x^2}{2}+\ln|x|-\dfrac{1}{3}\ln|x+1|-\dfrac{2}{3}\ln|x-2|+C$

53) $-\ln|x+2|+2\ln|x-1|+C$

54) $5x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{65}{3}\ln|x-4|-\dfrac{2}{3}\ln|x-1|+C$

55) $\dfrac{1}{2(x-2)}-\dfrac{3}{4}\ln|x|+\dfrac{3}{4}\ln|x-2|+C$

56) $x-2\ln|x+1|-\dfrac{1}{x+1}+C$

57) $\ln|x|-\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+C$

58) $\dfrac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\dfrac{3}{2}arctgx+C$

59) $2\ln|x-1|+\dfrac{1}{x-1}-\ln\left|x^2+1\right|-arctgx+C$

60) $2\sqrt{x+1}-2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C$

61) $x-\ln\left|e^x+1\right|+C$

62) $\ln\left|\sqrt{1+e^x}-1\right|-\ln\left|\sqrt{1+e^x}+1\right|+C$

63) $\left[\dfrac{\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}{3}-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]+C$

64) $2\sqrt[6]{x^3}+3\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$

65) $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\sqrt{x+4}-2\right|-2\ln\left|\sqrt{x+4}+2\right|+C$

66) $\dfrac{sen^3x}{3}-\dfrac{sen^5x}{5}+C$

67) $senx-\dfrac{2sen^3x}{3}+\dfrac{sen^5x}{5}+C$

68) $\dfrac{3x}{8}+\dfrac{sen2x}{4}+\dfrac{sen4x}{32}+C$

69) $\dfrac{tg^3x}{3}+C$

70) $-\cot gx-x+C$

71) $senx-\dfrac{sen^2x}{2}+C$

72) $\dfrac{1}{2}\ln|1+tgx|-\dfrac{1}{4}\ln\left|1+tg^2x\right|+\dfrac{1}{2}x+C$

73) $\dfrac{1}{2}arcsenx+\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$

74) $\dfrac{3}{2}arcsen\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{x}{2}\sqrt{3-x^2}+C$

75) $\dfrac{1}{2}\left(\arccos\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)+C$

76) $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

77) $\dfrac{x\left[sen|\ln x|-\cos|\ln x|\right]}{2}+C$

78) $\dfrac{e^{arcsenx}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{2}+C$

79) $\dfrac{x^2}{2}arcsenx-\dfrac{1}{4}arcsenx+\dfrac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$

## SELECTIVIDAD

***(Galicia, junio 2008)***

*Calcule:* $\int \frac{x+5}{x^2+4x+3}dx$ $\left\{2\ln|x+1|-\ln|x+3|+C\right\}$

***(Galicia, septiembre 2010)***

*Calcule:* $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$ $\left\{\frac{x^2}{2}\ln|x^2+1|-\frac{x^2}{2}+\frac{\ln|x^2+1|}{2}+C\right\}$

***(Galicia, junio 2011)***

**A.** *Define integral indefinida de una función. Calcula* $\int x^2\cos x dx$

$\left\{x^2 senx+2x\cos x-2senx+C\right\}$

**B.** *Define primitiva e integral indefinida de una función*

***(Galicia, septiembre 2012)***

a) *De una función derivable f(x) sabemos que pasa por el punto* $(0,1)$ *y que su derivada es* $f'(x)=xe^{2x}$. *Calcula f(x) y la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto correspondiente a* $x=0$.
b) *Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral.*

***(Galicia, junio 2013)***

*Calcula* $\int \frac{x^3+3}{x^2-x}dx$

## 6. INTEGRAL DEFINIDA

- Sumas superiores e inferiores de Riemann de una función asociada a una partición

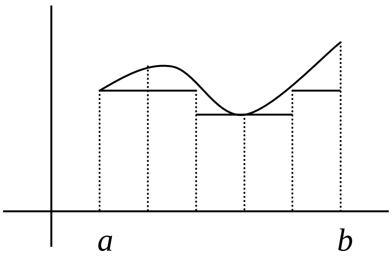
Se llama partición de un intervalo $\left[a,b\right]$ a un conjunto ordenado y finito de números reales $P=\left\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\right\}$ tales que $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$.

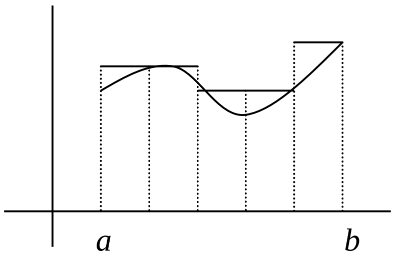
La partición divide el intervalo $\left[a,b\right]$ en *n* intervalos más pequeños:

$\left[x_0,x_1\right],\left[x_1,x_2\right],...,\left[x_{i-1},x_i\right],...,\left[x_{n-1},x_n\right]$

Sea $f\left(x\right)$ una función continua y positiva en el intervalo $\left[a,b\right]$, vamos a intentar calcular el área comprendida entre la gráfica de esta función, el eje OX, y entre *a* y *b*.

Por ser *f* continua en $\left[a,b\right]$ también lo es en cada intervalo $\left[x_{i-1},x_i\right]$ y por tanto alcanza un mínimo $m_i$ y un máximo $M_i$ en cada uno de ellos.




Se llama suma inferior de Riemann de *f* asociada a la partición *P* al número real:

$$I\left(f,P\right)=\left(x_1-x_0\right)\cdot m_1+...+\left(x_i-x_{i-1}\right)\cdot m_i+...+\left(x_n-x_{n-1}\right)\cdot m_n=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)\cdot m_i$$

Esta suma corresponde al área de los rectángulos inferiores o inscritos a la gráfica de la función; es una aproximación por defecto del área que buscamos.

Se llama suma superior de Riemann de *f* asociada a la partición *P* al número real:

$$S\left(f,P\right)=\left(x_1-x_0\right)\cdot M_1+...+\left(x_i-x_{i-1}\right)\cdot M_i+...+\left(x_n-x_{n-1}\right)\cdot M_n=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)\cdot M_i$$

Esta suma corresponde al área de los rectángulos superiores o circunscritos a la gráfica de la función; es una aproximación por exceso del área que buscamos.

Si en la partición aumentamos el número de puntos los intervalos se hacen más pequeños, y tanto la suma inferior como superior de Riemann se aproximan más al área buscada. Por tanto:

$\lim_{n\to\infty} I\left(f,P_n\right)=\lim_{n\to\infty} S\left(f,P_n\right)$ y este número será el área.

- Integral definida

Se llama integral definida de la función *f* en $\left[a,b\right]$ al límite:

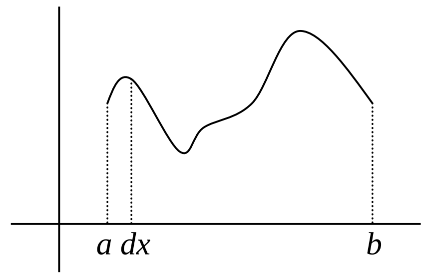
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} I\left(f,P_n\right)=\lim_{n\to\infty} S\left(f,P_n\right)$$

Los números *a* y *b* se llaman límites inferior y superior de integración, respectivamente.

La función *f* recibe el nombre de integrando.

## ➢ Interpretación geométrica de la integral definida

El cálculo de los valores mínimo y máximo de *f* en cada subintervalo no siempre es fácil, por lo que en la práctica se toma el valor de *f* en un punto cualquiera de ese subintervalo.




*dx* representa la longitud de cada subintervalo, cuando el número de ellos, *n*, tiende a infinito.
$f(x)dx$ representa el área de rectángulos en los que *dx* sería la base y $f(x)$ la altura.
Cuando *x* se "desplaza" de *a* a *b*, se van obteniendo esos rectángulos y la integral, se "encarga" de sumar sus áreas.

## ➢ Propiedades de la integral definida

a) $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

b) $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, siendo $a < c < b$

d) $\int_a^a f(x)dx = 0$

e) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

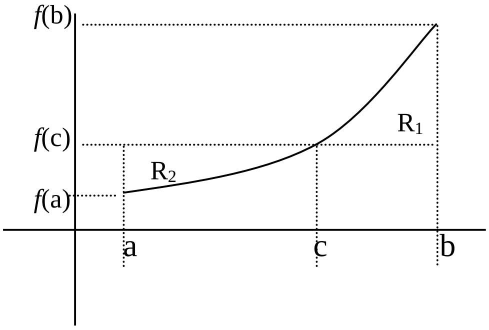
## ➢ Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

"Si *f* es una función continua en $[a,b]$, existe al menos un punto *c* del intervalo $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$"

### o Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

El área limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual al área del rectángulo de base (*b*-*a*) y altura $f(c)$, siendo *c* un determinado punto de $[a,b]$.

$f(c)$ recibe el nombre de altura media o valor medio de $f(x)$ en $[a,b]$.




En este ejemplo, llegaría con tomar c de manera que las áreas residuales $R_1$ y $R_2$ fueran iguales.

## ➢ Teorema Fundamental del Cálculo Integral

"Sea *f* continua en $[a,b]$, entonces la función de área $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es derivable en $(a,b)$ y además, $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a,b)$"

## ➢ Regla de Barrow

"Si f es continua en $[a,b]$ y G es una primitiva de f, entonces: $\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$"

## ➢ Cálculo de áreas planas limitadas por funciones

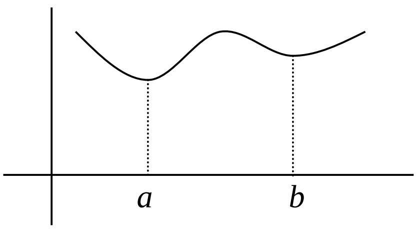
1) **Cálculo de áreas limitadas por una función y el eje X.**

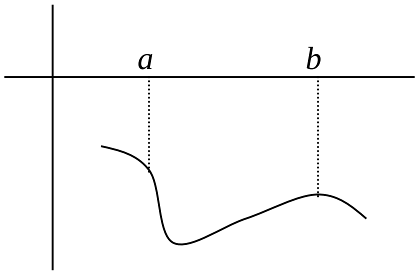
a) Si la función *f* es positiva en $[a,b]$:

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

b) Si la función *f* es negativa en $[a,b]$:

$$A=-\int_a^b f(x)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$




EJEMPLO: Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4$,el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.

1.- Obtenemos los ceros de *f*: $\quad -x^2+4=0\Rightarrow x=\pm2$

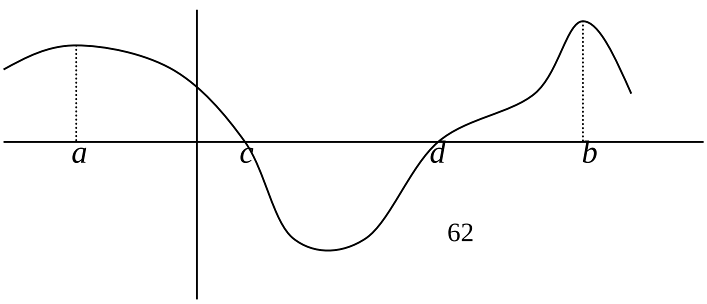
2.- No existe ningún cero de *f* en (0, 2) por lo que:

$$A=\left|\int_0^2(-x^2+4)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2\right|=\left|\left(-\frac{2^3}{3}+8\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+0\right)\right|=\frac{16}{3} \text{ Por tanto, } A=\frac{16}{3}\text{u}^2.$$

c) Si la función *f* no tiene signo constante en $[a,b]$:

En este caso es necesario calcular el área de todos los recintos que se forman entre la función y el eje X. Para ello primero se hallan los puntos de corte de la función con el eje X que están entre *a* y *b*, en el ejemplo *c* y *d*:

$$A=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^d f(x)dx\right|+\left|\int_d^b f(x)dx\right|$$



EJEMPLO:

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + x + 6$ el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 4$.

1.- Obtenemos los ceros de *f*: $-x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2; x = 3$

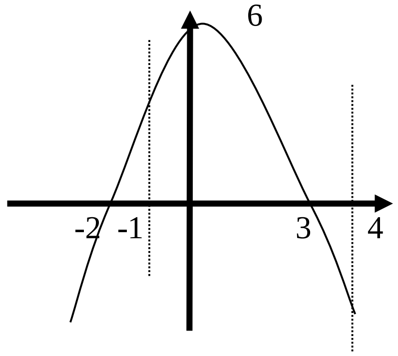
2.- En este caso 3 $\in$(-1, 4) y determina dos subintervalos, [-1, 3] e [3,4]. Por lo tanto, el área será:

$$A = \left|\int_{-1}^{3} (-x^2 + x + 6)dx\right| + \left|\int_{3}^{4} (-x^2 + x + 6)dx\right| =$$

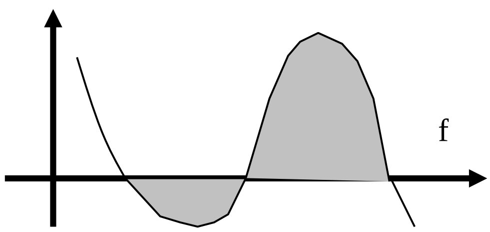
$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{3}\right| + \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{3}^{4}\right| = \frac{56}{3} + \frac{17}{6} = \frac{129}{6}$$

Por lo tanto, $A = \dfrac{43}{2}$ u$^2$.

Si te fijas en la gráfica de *f*, podemos comprobar que cambia de signo en el intervalo [-1, 4].




En caso de que precisemos calcular el área limitada por la gráfica de una función *f* y el eje de abscisas, sin especificar las rectas $x = a$ y $x = b$, deberemos entender que la región de la que queremos calcular el área es la determinada por los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje *x*.



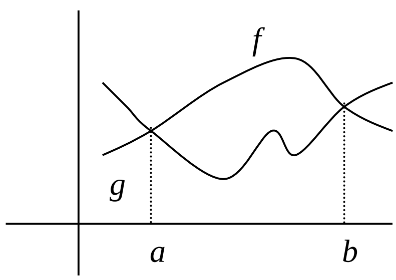

2) **Cálculo de áreas limitadas por dos funciones:**

Primero es necesario hallar los puntos de corte entre las dos funciones, por ejemplo *a* y *b*:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(f - g\right)(x)dx$$

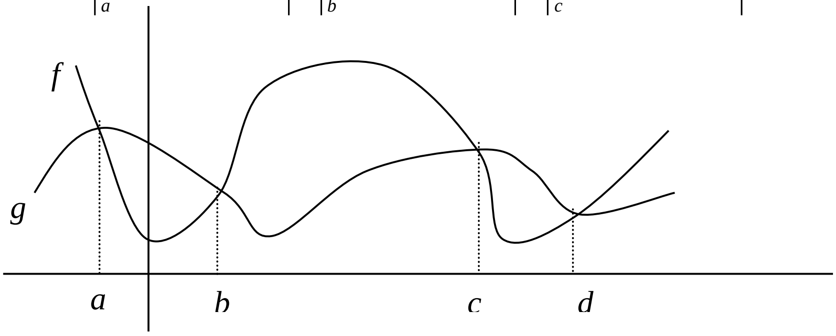
Si no queremos comprobar cuál de las dos funciones va por encima, podemos utilizar el valor absoluto:

$$A = \left|\int_a^b \left(f - g\right)(x)dx\right|$$



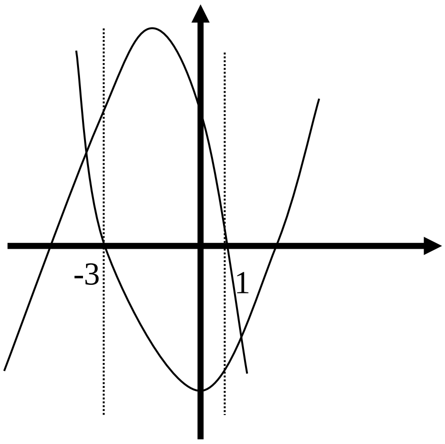

Si las gráficas se cortan en más de dos puntos, se calcula independientemente el área de cada región. Por ejemplo si se cortan en cuatro puntos *a*, *b*, c y *d*:

$$A=\left|\int_a^b (f-g)(x)dx\right|+\left|\int_b^c (f-g)(x)dx\right|+\left|\int_c^d (f-g)(x)dx\right|$$




EJEMPLO: Calcular el área limitada por las gráficas de $f(x)=-x^2-4x+5$ y $g(x)=x^2-x-6$ entre las abscisas –3 e 1.

Representamos las funciones:



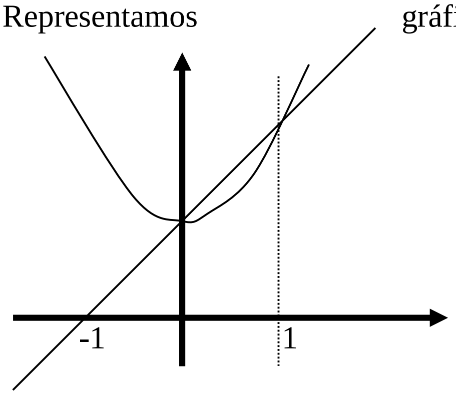

La gráfica de $f$ está situada encima de $g$. Por tanto:

$$A=\int_{-3}^{1}(f(x)-g(x))\,dx=$$
$$=\int_{-3}^{1}\left[(-x^2-4x+5)-(x^2-x-6)\right]dx=$$
$$=\int_{-3}^{1}(-2x^2-3x+11)\,dx=\frac{112}{3}\Rightarrow$$
$$A=\frac{112}{3}u^2$$

En caso de que nos pidan calcular el área limitada por las gráficas de dos funciones, sin especificar las rectas $x=a$ y $x=b$, suponemos que la región de la que queremos calcular el área es la definida por los puntos de corte de ambas gráficas.

EJEMPLO: Calcular el área limitada por las gráficas das funciones $f(x)=x+1$ y $g(x)=x^2+1$.

Representamos gráficamente el recinto descrito:




Igualamos las funciones para calcular el punto de corte:

$$x+1=x^2+1\Rightarrow x=0; x=1$$

Por tanto:

$$A=\int_0^1(f(x)-g(x))\,dx=\int_0^1((x+1)-(x^2+1))\,dx=\int_0^1(-x^2+x)\,dx=\frac{1}{6}\Rightarrow A=\frac{1}{6}u^2$$

## EJERCICIOS

1) Calcula:

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x^2+x}$ $\quad \left\{\ln\frac{6}{5}\right\}$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln x\, dx$ $\quad \left\{\frac{3e^4+1}{16}\right\}$

2) Calcula sin deshacer el cambio: $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+x+1}$ $\quad \{\ln 4\}$.

3) Comprueba el teorema del valor medio del cálculo integral, para:

a) $f(x)=1+2\cos x \ en \ [-\pi,\pi]$ $\quad \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$

b) $f(x)=sen^2(x) \ en \ [0,\pi]$ $\quad \left\{\frac{\pi}{4} y \frac{3\pi}{4}\right\}$

c) $f: x\in[0,3]\to f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad \left\{\frac{115}{81}\right\}$

d) $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$ $\quad \left\{e^{\frac{1}{e-1}}\right\}$

4) ¿Es aplicable el teorema del valor medio del cálculo integral a la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ en el intervalo [0,1]? En caso afirmativo, comprueba su verificación. $\quad \{c \cong 0'46\}$

5) Comprueba la siguiente igualdad y calcula el valor de *c*.

$$\int_0^x \frac{\cos t}{2\operatorname{sen} t+3}dt=\frac{1}{2}\ln|2\operatorname{sen} x+3|+c \qquad \left\{c=-\ln\sqrt{3}\right\}$$

6) Dada $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt,\quad (x\geq 1)$, calcula $F'(\pi)$ y $F''(\pi)$. $\quad \left\{F'(\pi)=0; F''(\pi)=\frac{-1}{\pi}\right\}$

7) Sea $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^2-4t+3}{e^t}dt$. Calcula sus extremos relativos e intervalos de monotonía.

8) Calcula el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4x$ y el eje de abscisas. $\quad \left\{\frac{32}{3}\right\}$

9) Área del recinto limitado por las dos parábolas de ecuaciones $y=x^2-2x$, e $y=-x^2+4x$. $\quad \{9\}$

10) Calcula el área limitada por la curva $y=x^2-5$ y la recta $y=2x+3$. Representa gráficamente esta área. $\quad \{36\}$

11) Área delimitada por las gráficas de las parábolas $y=x^2$, e $y=\sqrt{x}$. $\quad \left\{\frac{1}{3}\right\}$

12) Calcula el área de la región del semiplano $y\geq 0$ limitada por la curva $y=\ln x$, su tangente en $x=1$ y la recta $x=3$. $\quad \{4-\ln 27\}$

13) Área encerrada entre la curva $y=e^x$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1. $\quad \left\{\frac{3-e}{2}\right\}$

14) Área comprendida entre la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y las tangentes a ésta en los puntos de abscisas 0 y π. $\left\{\dfrac{\pi^2 - 8}{4}\right\}$

15) Calcula el área del recinto limitado por la parábola $2y^2 = x - 2$, el eje de abscisas y la tangente a la parábola paralela a la recta $2y = x - 3$. Hacer un dibujo del recinto descrito. $\left\{\dfrac{1}{12}\right\}$

16) Calcula $a$ y $b$ para que la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$ tenga una tangente horizontal en el punto $(-2,-6)$, y determina el área limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. $\{a = b = 2; area = 5 + 8\ln 2\}$

17) Utiliza el cálculo integral para obtener la fórmula que expresa el área de un triángulo en función de una base y su correspondiente altura. (Indicación: supóngase que los vértices del triángulo son los puntos (0,0), (b,0) y (a,h), con a, b y h positivo, y razónese separadamente los casos a=b, a<b y a>b).

18) Comprueba la verificación de la tesis del teorema del valor medio del cálculo integral para la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ en el intervalo $[-2, e-3]$.

19) Calcula el área del recinto delimitado por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, el eje X y la recta $x = \dfrac{1}{2}$. $\left\{-\dfrac{\ln(3/4)}{2}\right\}$

20) Halla el área de la región del plano limitada por las rectas $x = \dfrac{-1}{3}$, $x = \dfrac{1}{3}$, el eje X y la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{3x}$. $\left\{\dfrac{2}{9} - \dfrac{2}{9}e^{-1} = \dfrac{2(1 - e^{-1})}{9}\right\}$

21) Dada la función $f(x) = x \cdot \sqrt{3 - 2x}$, determina su campo de definición y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Calcula el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de *f* y el eje OX. $\left\{\dfrac{3\sqrt{3}}{5}\right\}$

22) Obtén el área de la región del plano acotada por las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y las gráficas de las funciones $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $g(x) = -e^x$. $\left\{\dfrac{3e^{\pi} - 1}{2}\right\}$

23) Teniendo en cuenta que $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ toma valores positivos y negativos, halla el valor de $k$ de forma que el área de la región limitada por el eje OX, las rectas $x = -1; x = 2$ y la curva *f(x)* quede dividida por OX en dos partes iguales.

24) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determina *a, b* y *c* de forma que $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$, $f(0) = 0$ y $f(1) = 4$.

25) Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = b$, donde $b$ es un número del intervalo (0,1). Ambas curvas se cortan en un punto ($a$,$b$) de abscisa positiva. Halla $b$ sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = a$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = a$ hasta $x = 1$.

## SELECTIVIDAD:

***(Galicia, junio 2008)***

*Calcula el área del recinto limitado por las parábolas* $y = x^2 - 4x$; $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ $\{16u^2\}$

***(Galicia, septiembre 2008)***

**A.** *Calcula:* $\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx$ $\{3-e\}$

**B.** *Definición de primitiva de una función. Enunciado de la regla de Barrow.*

***(Galicia, junio 2009)***

**A.** *Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de* $g(x) = 2x^3 - 3x^2$ *y la recta* $y = 2x$. $\left\{\frac{131}{32}u^2\right\}$

**B.** *Calcula:* $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$; *(Nota: ln = logaritmo neperiano* $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

***(Galicia, septiembre 2009)***

**A.** *Calcula el área del recinto limitado por el eje OX y la parábola* $y = \frac{x^2}{4} - x$. $\left\{\frac{8}{3}u^2\right\}$

**B.** *Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo integral.*

***(Galicia, junio 2010)***

**A.** *Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Sabiendo que* $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, *con f una función continua en todos los puntos de la recta real, calcula f(2).* $\{f(2) = 16\}$

**B.** *Calcula* $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$ $\{\ln 2\}$

**C.** *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la recta* $x + y = 7$ *y la gráfica de la parábola* $f(x) = x^2 + 5$. *(Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y concavidad o convexidad)* $\left\{\frac{27}{6}u^2\right\}$

***(Galicia, septiembre 2010)***

**A.** *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de* $y = -x^2 + 1$ *y las rectas tangentes a esta parábola en los puntos de corte de la parábola con el eje OX (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad)*

**B.** *Enuncia e interpreta geométricamente el teorema fundamental del cálculo integral.*

**(Galicia, junio 2011)**

*Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola* $f(x) = x^2 - 2x + 1$ *su recta tangente en el punto (3,4) y el eje OX (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad)* $\left\{ \frac{2}{3} u^2 \right\}$

**(Galicia, septiembre 2011)**

**A.** *Enuncia la regla de Barrow. Calcula* $\int_1^e \left( \frac{1}{x} - \ln x \right) dx$

**B.** *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola* $f(x) = -3x^2 + 3$ *y la recta* $y = -9$ *( Nota: para el dibujo de las gráficas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad y convexidad)*

**(Galicia, junio 2012)**

**A.** *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola* $y = 3x - x^2$ *y su recta normal en el punto* (3,0) *(Nota; para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad y convexidad* $\left\{ A = \frac{500}{81} u^2 \right\}$

**B.** *Calcula* $\int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} dx$ $\left\{ 5 - \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{3}{2} \ln 2 \right\}$

**(Galicia, septiembre 2012)**

**A**. *Calcula* $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx$

**B.** *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola* $y = -x^2 + 2x + 3$, *la recta tangente en el punto donde la parábola tiene un extremo y la tangente a la parábola en el punto en el que la tangente es paralela a la recta y = 4x. (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad)*

**(Galicia, junio 2013)**

*Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de* $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ *y la bisectriz del primer cuadrante. (Nota: para el dibujo de la gráfica de f(x), es suficiente utilizar el apartado anterior y calcular los puntos de corte con los ejes)*

***(Galicia, septiembre 2013)***

**A.** *Si f(x) es una función continua en el intervalo* $[1,4]$ *tal que* $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$ *y* $\int_1^4 f(x)\,dx = -4$

*¿Cuál es el valor de* $\int_2^4 5f(x)\,dx$ *? Enuncia las propiedades de la integral definida que utilices.*

**B.** *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola* $f(x) = -x^2 + 9x$*, y las rectas* $y = 20;\ x - y + 15 = 0$*. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad)*

**C.** *a) Define primitiva de una función y enuncia la regla de Barrow.*

*b) Calcula* $\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx$

***(Galicia, junio 2014)***

**A.** *Calcula:* $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

**B.** *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola* $f(x) = -x^2$ *y la recta normal a la gráfica de f(x) en el punto correspondiente a* $x = 1$*. (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y concavidad o convexidad).*

## BLOQUE: ÁLGEBRA

# 1. MATRICES

### Definición y elementos de una matriz

Cualquier conjunto de números dispuestos en m filas y n columnas de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1j} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2j} & ..... & a_{2n} \\ \multicolumn{6}{c}{.......................................} \\ a_{i1} & a_{i2} & ..... & a_{ij} & ..... & a_{in} \\ \multicolumn{6}{c}{.......................................} \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mj} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama matriz m x n. (o de dimensión m x n)

Ej: $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz 2 x 3

También se puede denotar $A=\left(a_{ij}\right)_{m\,x\,n}$; mientras que $a_{ij}$ representa un elemento de la misma.

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

### Tipos de matrices

- Matriz fila

Tiene sólo una fila. Ej: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

- Matriz columna

Tiene sólo una columna. Ej: $A=\begin{pmatrix} -8 \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

- Matriz rectangular

Tiene diferente número de filas que de columnas.

- Matriz nula

Una matriz se dice que es nula si todos sus elementos son 0. Se representa por O y se llama también matriz cero.

Ej: $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Matriz traspuesta

Dada una matriz A, se llama traspuesta de A, y se denota por $A^t$, a la matriz que se obtiene intercambiando filas por columnas.

Ej: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ $A^t=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$

- Matriz simétrica

Es la que coincide con su traspuesta. $A=A^t$ Ej: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$

- Matriz antisimétrica

Si su opuesta coincide con su traspuesta.

Ej: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ $-A=A^t$

- Matriz cuadrada

Una matriz n x n se dice que es una matriz cuadrada de orden n (tiene igual número de filas que de columnas).

Ej: $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 0\\ 7 & 5 & 8\end{pmatrix}$ es una matriz de orden 3

En una matriz cuadrada los elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ (elementos de la forma $a_{ii}$) forman la diagonal principal, y los elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, ..., a_{n1}$ (elementos $a_{ij}$ con $i+j=n+1$) forman la diagonal secundaria.

Ej: En el ejemplo anterior la diagonal principal es 4, 3, 8; y la diagonal secundaria es 5,3,7.

Dentro de las matrices cuadradas también se pueden distinguir las siguientes:

- Matriz diagonal, si $\forall i \neq j; a_{ij}=0$ (los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos)

Ej: $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

- Matriz unidad, o matriz identidad, es una matriz con los elementos de la diagonal principal iguales a 1. Se representa con I o Id.

Ej: $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

- Matriz triangular superior, si $a_{ij}=0$, siempre que $i>j$ (los términos por debajo de la diagonal principal son nulos).

Ej: $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$

- Matriz <u>triangular inferior</u>, si $a_{ij}=0$, siempre que $i<j$ (los términos por encima de la diagonal principal son nulos).

Ej: A=$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

### ➢ <u>Suma de matrices.</u>

La suma de dos matrices A=$\left(a_{ij}\right)$ y B=$\left(b_{ij}\right)$ de la misma dimensión es otra matriz de esa dimensión que se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar, A+B=$\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$

Ej: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 10 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

- <u>Propiedades.</u>

a) Asociativa.
b) Conmutativa.
c) Elemento neutro: la matriz nula.
d) Elemento simétrico: la matriz opuesta (la formada por los elementos opuestos)

### ➢ <u>Producto de una matriz por un escalar.</u>

El producto de un escalar $k\in\mathbb{R}$ por una matriz A=$\left(a_{ij}\right)$ es otra matriz de la misma dimensión que A que se obtiene multiplicando sus elementos por *k*, *k*A=$\left(k\cdot a_{ij}\right)$.

Ej: $2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

- <u>Propiedades.</u>

a) *k*(A+B)=*k*A+*k*B
b) (*k*+*h*)A=*k*A+*h*A
c) *k*(*h*A)=(*kh*)A
d) 1 A=A

**Nota.**

El conjunto de matrices de la misma dimensión con la suma y el producto por un escalar $\left(A_{mxn},+,\cdot\right)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

### ➢ <u>Producto de matrices.</u>

Dadas dos matrices A y B, sólo se puede hacer el producto AB si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

El producto de la matriz A=$\left(a_{ij}\right)$de dimensión m x n por la matriz B=$\left(b_{ij}\right)$ de dimensión n x p es otra matriz C=$\left(c_{ij}\right)$ de dimensión m x p, tal que cada elemento $c_{ij}$ se obtiene multiplicando escalarmente la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Ej: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 10 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

- Propiedades.

a) Asociativa: A(BC)=(AB)C
b) Distributiva respecto de la suma: A(B+C)=AB+AC
c) Sólo las matrices cuadradas tienen elemento neutro: la matriz unidad.

**Notas.**
El producto de matrices NO cumple, en general, la propiedad conmutativa.
El producto de matrices sólo es una operación interna con las matrices cuadradas.

**Potencias de una matriz cuadrada:** $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n}$

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

$$\begin{cases} A^0 = I \\ A^1 = A \\ A^2 = A \cdot A \\ A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 (asociativa) \\ \ldots \\ A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1} \end{cases}$$

**Propiedades de la traspuesta de una matriz:**

$$\begin{cases} \left(A^t\right)^t = A \\ (A+B)^t = A^t + B^t \\ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \quad \text{(orden cambiado)} \\ (kA)^t = kA^t \end{cases}$$

## EJERCICIOS

1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Halla. $4A-3B+C/2$

2) Determina dos matrices cuadradas, X e Y, de orden 2 tales que: $X-2Y=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ y $2X+Y=\begin{pmatrix}9 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

3) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$, calcula el producto ABC de las dos formas posibles.

4) Dadas $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, halla AB. ¿Conmutan A y B cualesquiera que sean *a* y *b*? Da una fórmula para $A^n$.

5) Si A y B son matrices cuadradas de la misma dimensión e I es la matriz unidad correspondiente, saca factor común: $AB-3A^2B+5AB^2$.

6) Escribe ejemplos (si no es posible explica por qué) de:
a) Una matriz simétrica de orden 3.
b) Una matriz simétrica de dimensión 2 x 3.
c) Una matriz antisimétrica de orden 3 no nula.
d) Una matriz a la vez simétrica y antisimétrica.
e) Una matriz triangular superior de dimensión 3 x 4.
f) Una matriz a la vez triangular superior e inferior.

7) Dada la matriz $J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Halla las potencias de J hasta obtener la matriz nula. Sea A una matriz cualquiera de orden 4. Describe el efecto que tiene sobre A la multiplicación JA. ¿Cuántas veces es necesario repetir el proceso para obtener la matriz nula?

8) Determina la matriz X, de modo que $2A+3X=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$\left\{X=\begin{pmatrix}-1 & 4/3\\ -1 & 4/3\end{pmatrix}\right\}$

9) Calcula X si $\mathrm{aX}+\mathrm{bI}=\mathrm{O}$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

10) Si $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 4 & -3\\ 5 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. Calcula:

a) $A^2C$ $\left\{\begin{pmatrix} 70 & 8 & 20 & 39 \\ -3 & -21 & 58 & -15 \\ 22 & 30 & -68 & 24 \end{pmatrix}\right\}$ b) $A(B+C)$ $\left\{\begin{pmatrix} -2 & 20 & -10 & 19 \\ 23 & 9 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

c) $A(2B-3C)$ $\left\{\begin{pmatrix} 41 & -5 & 30 & -37 \\ -34 & 8 & 28 & 23 \\ 8 & 20 & -44 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

11) Dada $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Determina todas las matrices X que conmutan con A.

12) Halla las matrices A que verifican $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\left\{A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

13) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Halla:

a) $(A+B)^t$ $\left\{\begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right\}$ b) $A^t+B^t$ $\left\{\begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right\}$

c) $(AB)^t$ $\left\{\begin{pmatrix} 6 & 17 & 19 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix}\right\}$ d) $B^t A^t$ $\left\{\begin{pmatrix} 6 & 17 & 19 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix}\right\}$

e) $(BA)^t$ $\left\{\begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -3 & -1 & -3 \\ -4 & 7 & 11 \end{pmatrix}\right\}$ f) $(A^t)^t$ $\{A\}$

14) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, ¿cómo deben ser las constantes *a* y *b* para que se verifique la igualdad $A^2=A$? $\{a=1\, y\ b=0; a=0\ y\ b=1\}$

15) Obtén las matrices que conmutan con $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right\}$

16) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^{350}+A^{32}$. $\left\{A^{350}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 350 & 1 \end{pmatrix}; A^{32}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 32 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

17) Si A es una matriz cuadrada n x n, tal que $A^2=A$, e I es la matriz unidad (n x n), ¿qué matriz es $B^2$, si $B=2A-I$?

18) Dada una matriz A, ¿existe alguna matriz B tal que el producto AB o bien BA sea una matriz fila?

19) Siendo A una matriz de dimensión 2x4, ¿existe una matriz B tal que AB sea una matriz de 3 filas?

20) Calcula $A^{2000}$ siendo A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21) Siendo $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^2,\ A^3,\ ...,A^n$.

## SELECTIVIDAD

***(Galicia, septiembre 2010)***

*Pon un ejemplo de matriz simétrica de orden 3 y otro de matriz antisimétrica de orden 3.*

***(Castilla – La Mancha, junio 2008)***

*Dada la matriz* $A= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *se pide:*

*Encuentra la expresión general de la potencia n-ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de* $A^n$ *donde n es un número natural cualquiera.*

***(Comunidad Valenciana, junio 2008)***

*Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

*Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:*

*Las matrices* $A^2$ *y* $A^3$

*Los números reales* $\alpha$ *y* $\beta$ *para los que se verifica:*

$$\left(I + A\right)^3 = \alpha I + \beta A$$

***(País Vasco, junio 2008)***

*Sean A y M las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

*Encontrar las condiciones que deben cumplir m, n, p y q para que se verifique que el producto de ambas matrices efectuado en las dos formas posibles sea el mismo.*

***(Navarra, junio 2009)***

*Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, *calcula* $A^3$ *y* $A^{38}$

***(Cantabria, junio 2009)***

*Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En el caso de que consideres que la afirmación es falsa pon un ejemplo ilustrativo.*

*Si A y B son dos matrices cuadradas cualquiera, entonces AB = BA*

*Si B es una matriz cuadrada, entonces* $(I+B)^2 = I + 2B + B^2$ *(siendo I la matriz identidad del mismo orden que B)*

***(País Vasco, junio 2009)***

*Obtener las matrices A y B que cumplen las condiciones:*

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad y \qquad 2A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

***(Castilla – La Mancha, junio 2011)***

*Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, se pide:*

*a) Resuelve este sistema matricial:* $\begin{cases} 2X+3Y=A \\ X+Y=B \end{cases}$

*b) Encuentra una fórmula general para* $B^n$*, donde* $n \in N$

***(Extremadura, junio 2011)***

*Calcule las matrices de la forma* $X=\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ *que cumplen la ecuación* $X \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*, donde* $X^t$ *es la matriz traspuesta de X.*

***(Islas Canarias, junio 2011)***

*Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$*:*

*Resolver este sistema* $\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X+4Y=B \end{cases}$

## 2. DETERMINANTES

- Definición de determinante de una matriz cuadrada

Es un número que se asocia a cada matriz cuadrada; depende de sus elementos y de la posición que ocupan en ella. Este número resulta de sumar (o restar) todos los productos que pueden obtenerse tomando un factor y sólo uno de cada fila y un factor y sólo uno de cada columna.

- Determinante de orden 2

Dada la matriz cuadrada de segundo orden $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se llama determinante de $A$ a:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

El determinante de una matriz de orden 2 es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

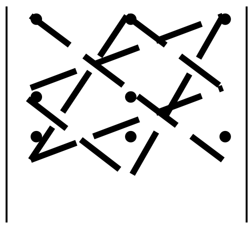
- Determinante de orden 3.

Dada una matriz cuadrada de tercer orden A su determinante es:

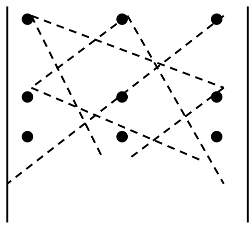
$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

  - Regla de Sarrus.

Para recordar el desarrollo del determinante de orden 3 se puede usar la regla de Sarrus:
Los productos con signo positivo están formados por los elementos de la diagonal principal, y los de las dos diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.
Análogamente se forman los productos con signo negativo pero tomando como referencia la diagonal secundaria.



con signo +



con signo –

- Definición de menor complementario y de adjunto de un elemento

Si en una matriz cuadrada de orden n suprimimos la fila y la columna del elemento $a_{ij}$ se obtiene otra matriz de orden n-1. Al determinante de esta matriz se le llama menor complementario de $a_{ij}$. Lo denotaremos por $\alpha_{ij}$. Se llama adjunto de $a_{ij}$ y se designa por $A_{ij}$ al número $(-1)^{i+j}\,\alpha_{ij}$.

Ej: En la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 & 11 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

el menor complementario de $a_{32}=-1$ es $\alpha_{32}=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}=198$

y su adjunto es $A_{32}=(-1)^{3+2}\,\alpha_{32}=-198$

Se llama matriz adjunta de una matriz cuadrada $A$, y se representa por Adj($A$), a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento $a_{ij}$ por su adjunto correspondiente $A_{ij}$.

## ➢ Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

El determinante de una matriz de orden n es el número que se obtiene al sumar los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

**Definición**

Una fila (o columna) de una matriz se dice que es combinación lineal de otras filas (o columnas) si esa fila (o columna) la podemos obtener como suma de las otras, cada una de ellas multiplicada por un número real.

Si alguna fila (o columna) es combinación lineal de otras filas (o columnas), se dice que el conjunto formado por todas ellas es linealmente dependiente. En caso contrario es linealmente independiente.

## ➢ Propiedades elementales de los determinantes

a) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta. (Esta propiedad permite aceptar para las columnas las propiedades que se demuestren para filas y viceversa).
b) Si una matriz tiene una fila (o columna) de ceros, su determinante es cero.
c) Si cambiamos las dos filas (o columnas) de una matriz, su determinante cambia de signo.
d) Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante es cero.
e) Si multiplicamos cada elemento de una fila (o columna) de una matriz por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese número.
f) Si una matriz tiene dos filas (o columnas) proporcionales, su determinante es cero.
g) Si una fila (o columna) de una matriz es suma de dos, su determinante puede descomponerse en la suma de los determinantes que tienen en esa fila (o columna) los primeros y segundos sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

h) Si a una fila (o columna) de una matriz le sumamos otra fila (o columna) multiplicada por un número, el determinante de la matriz no varía.
i) Si una fila (o columna) de un determinante es combinación lineal de otras filas (o columnas), entonces el valor del determinante es cero. (ver propiedades f y g)
j) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Como consecuencia:

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$\det(A^{-1} \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

**Nota importante.**

Debido a la propiedad i), para que los vectores (fila o columna) de un determinante sean linealmente independientes, una condición necesaria y suficiente es que el determinante sea distinto de cero.

## EJERCICIOS

1) Comprueba el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ 4 & 9 & 16 & 100 \\ 8 & 27 & 64 & 1000 \end{vmatrix} = 672 \qquad \begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & x+z & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = 4xyz$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 3(1+x)(3-x)^3 \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

2) Halla los "valores propios" de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, es decir, los valores de $x$ tales que $|A - x \cdot I| = 0$. $\{x = 0, x = 1, x = 4\}$

3) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$.

4) Enuncia las propiedades de los determinantes que permiten comprobar "sin hacer el desarrollo" que el determinante de esta matriz es nulo: $\begin{pmatrix} a & d & a+pd \\ b & e & b+pe \\ c & f & c+pf \end{pmatrix}$.

5) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$ determina, sin desarrollar, el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d/3 & e/3 & f/3 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & a/5 \\ 2e & f+3d & d/5 \\ 2h & i+3g & g/5 \end{vmatrix}$

6) Se considera la función $f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$ sabiendo que $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$

Determinar a y b.

7) Existe alguna matriz real regular (determinante distinto de cero) A, de orden impar tal que $A^t = -A^3$?

## SELECTIVIDAD

***(Galicia, junio 2009)***

*Sea M una matriz cuadrada de orden 3 con det(M) = -1 y que además verifica* $M^3 + M + I = 0$, *siendo I la matriz unidad de orden 3. Calcula los determinantes de las matrices: M+I y 3M+3I.*

$$\{|M+I| = 1; |3M+3I| = 27\}$$

***(Galicia, septiembre 2010)***

*Sea M una matriz simétrica de orden 3, con det(M) = -1. Calcula, razonando la respuesta, el determinante de M+ $M^t$, siendo $M^t$ la matriz traspuesta de M.*

$$\{|M+M^t| = -8\}$$

***(Galicia, junio 2011)***

*Sean C1, C2, C3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3 con det(M) = 4. Calcula, enunciando las propiedades de determinantes que utilices, el determinante de la matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, - C2, 2C1 - C3, C2 + C3.* $\{8\}$

***(Madrid, junio2008)***

*Dada la siguiente matriz de orden n:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

*se pide:*

*a) Calcular el determinante de la matriz* $A_2$

*b) Calcular el determinante de la matriz* $A_3$

*c) Calcular el determinante de* $A_5$

## 3. APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

### ➢ Definición

Se llama rango de una matriz al número de filas o columnas linealmente independientes.

**Propiedad**

El rango de una matriz es el orden del mayor determinante distinto de cero que se puede formar con las filas y columnas de la matriz. Es decir, es el máximo orden de los menores no nulos. Esto se basa en dos resultados recíprocos:

-Si dos vectores fila o columna de una matriz cuadrada son linealmente dependientes, su determinante es cero.

-Si el determinante de una matriz cuadrada es cero, sus filas y columnas son linealmente dependientes.

Ej: Si una matriz 4 x 5 tiene rango 3, significa que existen tres vectores fila o columna linealmente independientes, los correspondientes al menor de orden 3 distinto de cero, y los demás son combinación lineal de ellos.

### ➢ Cálculo del rango de una matriz

Dada una matriz, se elige en ella un menor no nulo de orden k. Se llama orlar el menor a formar un determinante de orden k+1 añadiendo una fila y una columna al menor, para así buscar el menor no nulo de orden máximo.

Ej: La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ puede tener como máximo rango 3, pero

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ y orlando $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, por tanto el rango es 2.

También se podía hacer directamente viendo que la segunda fila es suma de las otras dos.

- Transformaciones elementales

Son las transformaciones que podemos realizarle a una matriz sin que su rango varíe. Es fácil comprobar que estas transformaciones no varían el rango usando las propiedades de los determinantes

Si se permutan 2 filas o 2 columnas el rango no varía.

Si se multiplica o divide una línea por un número no nulo el rango no cambia.

Si a una línea de una matriz se le suma o resta otra paralela multiplicada por un número no nulo el rango no varía.

Se pueden suprimir las filas o columnas que sean nulas, las filas o columnas que sean proporcionales a otras, sin que el rango de la matriz varíe.

### ➢ Cálculo del rango por el método de Gauss

El método de Gauss consiste en aplicar transformaciones elementales a una matriz con objeto de conseguir que los elementos que están por debajo de la diagonal principal se anulen (aij = 0, i>j). Para conseguir "triangular" la matriz debemos dejar en la diagonal principal elementos no nulos, salvo que la fila sea nula.

Una vez aplicado este proceso de triangulación, el rango de la matriz es el número de filas no nulas de la matriz obtenida. Esto es consecuencia de las propiedades de los determinantes.

*Ejemplo:* Calcular el rango de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por comodidad, es adecuado que el elemento $a_{11}$ sea 1 o –1. De no ser así, podemos permutar filas o multiplicar toda la fila por un escalar.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 = f_2 - 6f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 = f_3 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 = 3f_3 + 2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las filas nulas podemos eliminarlas, y por tanto queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Concluimos que rg(M)=2.

## ➢ Definición de matriz inversa de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada *A* llamaremos matriz inversa de *A* a otra matriz $A^{-1}$ que cumple:
$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ , siendo *I* la matriz unidad.

Matriz regular (o invertible): Si tiene inversa.

Matriz singular (o no invertible): Si no tiene inversa.

## ➢ **Teorema.** Condición necesaria y suficiente para la existencia de matriz inversa

"Una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero."

**Demostración**:

"$\Rightarrow$" Si la matriz *A* tiene inversa $A^{-1}$ entonces $A \cdot A^{-1} = I$ ,
por tanto $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$ ,
usando la propiedad j) de los determinantes $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$
y por consiguiente $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ y $\det(A) \neq 0$

"$\Leftarrow$" Si el determinante de la matriz A es distinto de cero, se puede calcular la matriz inversa como veremos a continuación.

## ➢ Cálculo de la matriz inversa

"La suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra fila (o columna) distinta es nula."

**Demostración**:

Cojamos la fila i de una matriz cuadrada A y los adjuntos de otra fila j, tenemos que probar que: $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} = 0$

Por otro lado, consideremos el determinante donde la fila j ha sido sustituida por la fila i, y desarrollémoslo por los elemento de la fila j:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ fila\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots a_{in}A_{jn}$$

pero por otro lado sabemos que este determinante es cero pues tiene dos filas iguales, entonces $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$

Multipliquemos una matriz cuadrada A por la traspuesta de su adjunta (lo haremos en el caso de una matriz de orden 3, en cualquier otro orden se hace de forma análoga):

$$A \cdot Adj(A)^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

entonces $A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t = I$ , por tanto $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t$ .

Análogamente se demuestra que $A^{-1} \cdot A = I$

*Ejemplo:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; Adj(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

- Propiedades

1) La matriz inversa, si existe, es única.
2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ (involutiva)
3) $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (orden cambiado)

## Cálculo de la matriz inversa utilizando el método de Gauss

Consideremos una matriz cuadrada A de dimensión n y consideremos la siguiente matriz (A/I) donde I es la matriz unidad de dimensión n. El método de Gauss-Jordan consiste en transformar mediante las transformaciones elementales por filas, la matriz (A/I) en otra matriz de la forma (I/B). En caso de conseguirlo, la matriz B es la inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{transformaciones} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$$

Recuerda que las transformaciones elementales son:

- Sumar filas.
- Multiplicar por un escalar no nulo una fila.
- Sumarle a una fila el producto de un escalar por otra fila.

*<u>Ejemplo:</u>* Calculemos la matriz inversa del ejemplo anterior:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 = f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 = 3f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{f_1}{3};\frac{f_2}{-3}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

**Ecuaciones matriciales**

*Veamos, con algunos ejemplos, como se resuelven ecuaciones en las que aparecen matrices:*

*1) Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$*, calcula una matriz X que verifique la igualdad* $AX = B + 2X$

Podemos resolverla de dos formas:

a) La matriz *X* debe ser 2x1 para que se puedan realizar todos los cálculos indicados en la ecuación, por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2a \\ 6+2b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + 2b = -1 + 2a \\ -b = 6 + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 2b = -1 \\ 3b = -6 \end{cases}$$

Así $a = -3$ y $b = -2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

*b) Empleando la matriz inversa:*

*Para despejar* X *tenemos que multiplicar por la inversa de* $A-2I$ *(Ojo: tener en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo)*

$$\begin{aligned} &AX-2X=B \\ &(A-2I)X=B \\ &(A-2I)^{-1}(A-2I)X=(A-2I)^{-1}B \\ &X=(A-2I)^{-1}B \end{aligned}$$

$$A-2I=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},\ (A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$ *por tanto:*

$$X=\begin{pmatrix} -1 & -2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

*3)* *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$. *Hallar una matriz* X *tal que* $AXA^{-1}=B$

*Primero despejamos* X, *multiplicando por* $A^{-1}$ *por la izquierda y por A por la derecha:*

$$A^{-1}AXA^{-1}A=A^{-1}BA \Rightarrow X=A^{-1}BA$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 9/2 \\ -12 & -7 \end{pmatrix}$$

## EJERCICIOS

1) Sean P y Q matrices cuadradas de orden n que tienen inversa, ¿tiene inversa la matriz PQ? Razona la respuesta.

2) Calcula la inversa de la matriz $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) Resuelve la ecuación $AX - B = C$,siendo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

4) Si $A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, halla los valores de *x* para los que *A* tiene inversa. Halla la matriz *Y* de orden 3, que es solución de la ecuación $AY + B = I$ , siendo *A* la matriz anterior para $x = 3$, $I$ la matriz identidad y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, demuestra que $A^3 + I = O$ (*O* es la matriz nula). Justifica que *A* es inversible y obtén $A^{-1}$. Calcula razonadamente $A^{10}$.

6) Resuelve la ecuación matricial $AXB = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7) Resuelve la ecuación matricial $ABX - CX = 2C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8) Calcula *a* y *b* para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$ tenga rango 2. $\{a = b = -3\}$

9) Resuelve $XA - 2B + 3C = D$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

10) ¿Para qué valores del parámetro *k*, la siguiente matriz admite inversa?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$$

11) Siendo $A$ una matriz cuadrada de tercer orden y $A^t$ su traspuesta, demuestra que $A+A^t$ es una matriz simétrica. Obtén la matriz inversa de $\left(A+A^t\right)$, donde $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

12) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, construye la matriz $Y=3A^tA-2I$, y resuelve la ecuación $AX=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

13) ¿Para qué valores del parámetro $k$ tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & k & 0\\ k & 1 & 2\end{pmatrix}$? Calcula la inversa para $k=1$.

14) Sea $A$ una matriz cuadrada de orden 3 diagonal.

a) ¿Qué condiciones deben cumplir los elementos de A para que admita inversa?

b) ¿Y cuáles para que dicha inversa coincida con A?

15) Obtén un vector no nulo $(a,b,c)$ de manera que las matrices siguientes tengan, simultáneamente, rango 2: $\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 0 & b\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 3 & 1 & c\end{pmatrix}$.

16) Supongamos que $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_4$ son las cuatro columnas de una matriz cuadrada *A*, cuyo determinante vale 3. Calcula razonadamente:

a) El determinante de la inversa de *A*.

b) El determinante de la matriz $2A$.

c) El determinante de una matriz cuyas columnas son: $2C_1-C_3$, $C_4$, $5C_3$ y $C_2$.

17) Si el rango de $\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$ es 2, ¿cuál será el rango de la matriz $\begin{pmatrix}a & b & c\\ d-a & e-b & f-c\\ 2a-d & 2b-e & 2c-f\end{pmatrix}$?

18) Sea *A* una matriz cuadrada de orden n y sea $I$ la matriz unidad de orden n. Demuestra que si $A^2+5A=I$, entonces *A* posee inversa.

19) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, calcula $A^{12}+A^{-1}$.

## SELECTIVIDAD

***(Galicia, junio 2008)***

*Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix}-2 & m & 0\\ 0 & 0 & m\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. *Calcula los valores de m para los cuales A tiene inversa*

*Para m = 1, calcula la matriz X tal que* $XA+X-2A=0$

$$\left\{ m\neq 0 y \neq 2 X=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

***(Galicia, septiembre 2008)***

*a) Estudia según los valores de m, el rango de la matriz* $M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -m\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -m & m\end{pmatrix}$

$$\{si\ m\neq 0\Rightarrow rgM=3; si\ m=0\Rightarrow rgM=1\}$$

*b) Para el valor m = 1, resuelve la ecuación matricial* $MX=3A^t$, *siendo* $A=(1,0,1)$ *y A´= matriz traspuesta de A. Para este valor de m, ¿cuánto valdrá el determinante de la matriz* $2M^{21}$ *?*

$$\left\{ X=\begin{pmatrix}0\\ -6\\ -3\end{pmatrix}; \det(2M^{21})=-8\right\}$$

***(Galicia, junio 2009)***

*Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}$, *calcula los rangos de* $A\cdot A^t$ *y* $A^t\cdot A$, *siendo* $A^t$ *la matriz traspuesta de A. Para el valor* $a=1$, *resuelve la ecuación matricial* $A\cdot A^t X=B$, *siendo* $B=\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$

$$\left\{ rg\left(A^t\cdot A\right)=rg\left(A\cdot A^t\right)=2;\ X=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\right\}$$

***(Galicia, septiembre 2009)***

*a) Estudia según los valores de m, el rango de la matriz* $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & m & m+2\\ m & 8 & 12\end{pmatrix}$

$$\{si\ m\neq 4\Rightarrow rgM=3; si\ m=4\Rightarrow rgM=1\}$$

*b) Resuelve la ecuación matricial* $A^2\cdot X=B$, *siendo* $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$. $\left\{ X=\begin{pmatrix}1/4\\ -1/2\end{pmatrix}\right\}$

***(Galicia, junio 2010)***

*Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

*a) Si I es la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que* $A+\lambda I$ *no tiene inversa. Calcula, si existe, la matriz inversa de* $A-2I$ *.*

$$\left\{\lambda=\pm 1; (A-2\mathrm{I})^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & -1/3 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1/3 & -1/3\end{pmatrix}\right\}$$

*b) Calcula la matriz X tal que* $XA+A^t=2X$ *, siendo* $A^t$ *la matriz traspuesta de A.*

$$\left\{X=\begin{pmatrix}-1/3 & -1/3 & 0\\ 1/3 & 5/3 & 1/3\\ 0 & -1/3 & -1/3\end{pmatrix}\right\}$$

***(Galicia, septiembre 2010)***

*Calcula una matriz X simétrica y de rango 1 que verifique* $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\left\{X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

***(Galicia, junio 2011)***

*Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$*, calcula todos los valores de a y b para los que*

$A^{-1}=A^t$ *siendo* $A^t$ *la matriz traspuesta de A.* $\{a=\pm 1; b=0\}$

***(Galicia, septiembre 2011)***

*a) Si A es una matriz tal que* $A^3+I=0$*, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula de orden 3. ¿Cuál es el rango de A? Calcula el determinante de* $A^{30}$ *. Calcula A en el caso de que sea una matriz diagonal verificando la igualdad anterior.*

*b) Dada la matriz* $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$*, calcula una matriz X tal que* $BXB-B=B^{-1}$

***(Galicia, septiembre 2012)***

*a) Calcula, según los valores de a, el rango de* $A=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ a+1 & a & 0\\ 0 & a+1 & a+1\end{pmatrix}$*. Para a = 1, calcula el determinante de la matriz* $2A^t\cdot A^{-1}$

*b) Sea* $B=\begin{pmatrix}-1/2 & x & 0\\ y & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$*. Calcula x e y para que se cumpla que* $B^{-1}=B^t$

*(Nota:* $A^t$*,* $B^t$ *representan la matriz traspuesta de A y B respectivamente).*

***(Galicia, junio 2013)***

*Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, *sean* $B^t$ *la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.*

*a) Estudia, según los valores del parámetro* $\lambda$ *, el rango de* $AB^t+\lambda I$

*b) Calcula la matriz X que verifica:* $AB^tX-X=2B$

***(Galicia, septiembre 2013)***

a) *Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que* $M^2=4M$ *. Determina la matriz X que verifica la ecuación matricial* $(M-2I)^2X=I$ *, siendo I la matriz identidad de orden 2.*

*b) Determina todas las matrices B de la forma* $\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}$ *que verifiquen* $B^2=4B$*. Si alguna es inversible, calcula su inversa.*

***(Galicia, junio 2014)***

*a) Estudia, según los valores de m, el rango de la matriz* $A=\begin{pmatrix}m & 1 & 3\\ 1 & m & 2\\ 1 & m & 3\end{pmatrix}$

*b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m?*

*c) Determina una matriz simétrica X de orden 2 tal que* $X\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ *y el determinante de la matriz 3X sea -9.*

# 4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

## ➢ Definiciones

Se llama ecuación lineal con n incógnitas a una relación del tipo: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$
donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son las incógnitas; $a_1, a_2, ..., a_n$ los coeficientes y b el término independiente.
Los n números reales $(s_1, s_2, ..., s_n)$ son una solución de la ecuación si al sustituirlos por las incógnitas se verifica la ecuación.
Se llama sistema de m ecuaciones con n incógnitas a todo sistema de relaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .......................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde los números reales $a_{ij}$ son los coeficientes del sistema; los números reales $b_i$ son los términos independientes; y $x_i$ son las incógnitas del sistema.
Los n números reales $(s_1, s_2, ..., s_n)$ son una solución del sistema si al sustituirlos por las incógnitas verifican a la vez las m ecuaciones.

## ➢ Sistemas homogéneos

Un sistema se llama homogéneo cuando todos los términos independientes son cero.
Un sistema homogéneo siempre es compatible, pues tiene al menos la solución (0,0,...,0) que se llama solución trivial.

## ➢ Sistemas de ecuaciones equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen exactamente las mismas soluciones.
Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces tienen el mismo número de incógnitas, aunque no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.
A veces, para resolver o estudiar un sistema de ecuaciones conviene encontrar otro sistema equivalente pero más sencillo, para ello se pueden utilizar los criterios de equivalencia:
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número real distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al primero.
- Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo, resulta un sistema equivalente.
- Si en un sistema de ecuaciones una ecuación es combinación lineal de otras, puede suprimirse y el sistema resultante es equivalente al dado.

## ➢ Forma matricial de un sistema

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas también se puede escribir de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Es decir, M·X=B, donde M es la matriz del sistema (de dimensión mxn) y está formada por los coeficientes del sistema, X es la matriz columna formada por las incógnitas y B la matriz columna formada por los términos independientes.

Se llama <u>matriz ampliada del sistema</u> (de dimensión mx(n+1)) a la matriz que resulta de añadirle a la matriz del sistema la columna formada por los términos independientes:

$$M^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

## ➢ <u>Clasificación de los sistemas atendiendo al número de soluciones</u>

- **COMPATIBLES:**
  - **DETERMINADOS** (solución única).Ej: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$
  - **INDETERMINADOS** (infinitas soluciones).Ej: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$
- **INCOMPATIBLES** (no tienen solución). Ej: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$

## 5. DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

### ➢ Enunciado del Teorema de Rouché-Frobenius

"Un sistema de ecuaciones lineales es compatible, si y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes M es igual al rango de la matriz ampliada $M^*$."

### ➢ Discusión de sistemas de ecuaciones lineales

- Si el sistema es compatible, el rango indica el número de ecuaciones linealmente independientes, por lo que se puede prescindir de las ecuaciones linealmente dependientes.
- Si el rango es igual al número de incógnitas, el sistema tiene solución única (compatible determinado).
- Si el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado), en este caso, alguna o algunas de las incógnitas quedarán en función de las demás.

Resumiendo:

- ♦ rango(M) = rango($M^*$) $\Rightarrow$ sistema <u>compatible</u>
  - rango(M) = n sistema <u>compatible determinado</u>
  - rango(M) < n $\Rightarrow$ sistema <u>compatible indeterminado</u>
- ♦ rango(M) $\neq$ rango($M^*$) $\Rightarrow$ sistema <u>incompatible</u>

En el caso particular de los sistemas homogéneos que ya sabemos que siempre son compatibles, según el teorema de Rouché-Frobenius:
- Si rango (M) = n, el sistema es compatible determinado, la solución es la trivial.
- Si rango (M) < n, el sistema es compatible indeterminado.

Algunos sistemas dependen de uno o más parámetros y habrá que estudiar, según los valores de estos parámetros, si el sistema es o no compatible. (Habrá que discutir el rango de la matriz del sistema según los parámetros).

### ➢ Enunciado de la Regla de Cramer

"En el caso de los sistemas que tienen igual número de ecuaciones que de incógnitas y que la matriz de coeficientes tiene determinante distinto de cero, se puede obtener cualquier incógnita $x_i$ como el determinante de la matriz que se obtiene al cambiar la columna i del determinante de la matriz de coeficientes por la columna de los términos independientes, todo ello dividido por el determinante de la matriz de coeficientes".

### ➢ Discusión y resolución por el método de Gauss

Se llama <u>sistema triangular</u> a un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mm}x_m + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Los sistemas triangulares tienen la ventaja de que son más fáciles de resolver.

En un sistema el rango de la matriz de coeficientes siempre es menor o igual que n, por lo que si el número de ecuaciones es mayor que el rango de M podemos eliminar las que son combinación lineal de otras para obtener un sistema equivalente que tiene como mucho tantas ecuaciones como incógnitas.

El <u>método de Gauss</u> consiste en transformar el sistema de ecuaciones en otro equivalente que sea de forma **triangular.** Pasos:

a) Eliminamos las ecuaciones que veamos que son proporcionales a otra.

b) Intercambiamos las ecuaciones y las incógnitas de forma que quede primero la más sencilla y, a poder ser, que tenga un coeficiente que sea divisor de los demás.

c) Por transformaciones sucesivas columna a columna, empezando por la primera, conseguimos ceros en el triángulo inferior; operando por filas.

d) Si nos quedan más incógnitas que ecuaciones, pasamos las incógnitas sobrantes al 2º miembro.

e) Despejamos la incógnita de la última ecuación y volvemos hacia arriba sustituyendo y despejando.

**Ejemplo**:

$\begin{cases} 3x+y-4z=-8 \\ 3x+2y-7z=-9 \\ -7x-3y+z=9 \end{cases}$ Escribo la incógnita y de primera: $\begin{cases} y+3x-4z=-8 \\ 2y+3x-7z=-9 \\ -3y-7x+z=9 \end{cases}$ trabajo con la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & -7 & -9 \\ -3 & -7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ opero por “filas”: $\begin{matrix} F_2{}' = F_2 - 2F_1 \\ F_3{}' = F_3 + 3F_1 \end{matrix}$ obtengo: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -11 & -15 \end{pmatrix}$

$F_3{}' = 3F_3 + 2F_2$ obtengo $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -31 & -31 \end{pmatrix}$ pasando a sistema: $\begin{cases} y+3x-4z=-8 \\ -3x+z=7 \\ -31z=-31 \end{cases}$ lo resolvemos empezando por la última ecuación y hacia arriba sustituyendo:

$$z=1$$
$$-3x+1=7 \Rightarrow x=-2$$
$$y+3(-2)-4.1=-8 \Rightarrow y=2$$

**Discusión**:

Sea un sistema de m ecuaciones y n incógnitas. Después de reducirlo a forma triangular:

a) Se obtiene alguna ecuación de forma: $c=0$, con *c* distinto de cero, el sistema es incompatible.

b) En otro caso es compatible. Si *r* es el número de ecuaciones no triviales (distintas de $0=0$)

b$_1$) Si $r=n$, solución única (S.C.D.)

b$_2$) Si $r<n$, soluciones infinitas (S.C.I.)

**Ejemplo**:

a) $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 2x+y-z=-3 \\ 5x+z=1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2{}' = F_2 - 2F_1 \\ F_3{}' = F_3 - 5F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 14 \\ 0 & 5 & -7 & -31 \\ 0 & 10 & -14 & -69 \end{pmatrix} F_3{}' = F_3 - 2F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 14 \\ 0 & 5 & -7 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

pasando a sistema: $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 5y-7z=-31 \\ 0=-7 \end{cases}$ Entonces **sistema incompatible.**

b1) Ejemplo caso anterior 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

b2) $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 2x+y-z=-3 \\ 5x+z=8 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 - 5F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 14 \\ 0 & 5 & -7 & -31 \\ 0 & 10 & -14 & -62 \end{pmatrix} F_3' = F_3 - 2F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 14 \\ 0 & 5 & -7 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pasando a sistema: $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 5y-7z=-31 \\ 0=0 \end{cases}$ Entonces como tenemos 2 ecuaciones y 2 incógnitas, S.C.I., pasamos una incógnita (que sobra a parámetro). Hacemos $z=\alpha$ y queda: resolvemos igual que antes:

$y=\frac{-31+7\alpha}{5}$ sustituyendo en la primera: $x=\frac{8-\alpha}{5}$; solución del sistema: $\left(\frac{8-\alpha}{5}, \frac{-31+7\alpha}{5}, \alpha\right)$.

- Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con un parámetro

**Ejemplo**:
Discute, según los valores del parámetro:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ky+kz=2 \\ kx+ky+z=1 \end{cases}$ Consideramos las matrices *M* y *M**

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k & 2 \\ k & k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estamos estudiando un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, por eso el rango de la matriz del sistema es menor o igual que 3. Para que este sistema sea compatible determinado se tiene que cumplir que el determinante de la matriz del sistema sea diferente de cero. Veamos para qué valores del parámetro k el determinante es cero. El determinante de M es:

$$|M|=\left(k+k^2+0\right)-\left(k^2+k^2+0\right)=k(1-k)$$

Así, $|M|=0 \Leftrightarrow k=0 \ \ o \ \ k=1$ Entonces podemos concluir que para todos los valores del parámetro $k\neq 0,1$ se cumple que $|M|\neq 0$ y, por lo tanto, rang(*M*)=rang(*M**) = n = 3. Es decir, el sistema será compatible determinado para todos los valores reales del parámetro *k* excepto para *k* = 0 y *k* = 1

Estudiaremos ahora esos dos casos:

$k=0$

Las matrices son: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ya sabemos que rang(*M*)< 3 porque $|M|=0$, vemos que el rang(*M*) = 2. Veamos si rang(*M**) = 3. Para eso vamos a elegir menores de orden 3 para ver si alguno es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Por lo tanto para *k* = 0 el sistema es incompatible

<u>*k* = 1</u>

Las matrices son: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ya sabemos que rang(*M*)< 3 porque $|M|=0$. Si encontramos un menor no nulo de *M* de orden 2, podemos decir que rang(*M*) = 2. Elegimos el menor que resulta de seleccionar las dos primeras filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Veamos el rango de la matriz ampliada:

$$|M| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto rang(*M*) = rang(*M**) = 2, es decir, el sistema es compatible indeterminado.

## EJERCICIOS

1) Clasifica por el teorema de Rouché-Frobenius :

A. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ -x+y=0 \end{cases}$ $\{S.C.D.\}$ B. $\begin{cases} 2x-5y+3z=1 \\ x+3y-z=0 \\ 3x-2y+2z=1 \end{cases}$ $\{S.C.I.\}$ C. $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 3x+2y+2z=2 \\ x-y+4z=1 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$ $\{S.I.\}$

2) Comprueba que los siguientes sistemas son compatibles determinados y resuélvelos por la Regla de Cramer:

A. $\begin{cases} 2x+4y+6z=18 \\ 4x+5y+5z=21 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x+3y-7z=-1 \\ 3x+4y-6z=5 \\ 5x-2y+4z=-7 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y+z=1 \\ x+y-3z=8 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

$\{(4,-2,3)\}$ $\{(-1,5,2)\}$ $\{(3,2,-1)\}$

3) Clasifica según sus soluciones, utilizando el método de Gauss, los sistemas siguientes. Resuelve los casos de compatibilidad.

A. $\begin{cases} 3x+2y+z=3 \\ x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=-1 \end{cases}$ $\left\{S.C.D. \to \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}$ B. $\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ $\{S.C.I. \to (1,y,y)\}$

C. $\begin{cases} 2x+4y-2z=-4 \\ x+y-z=1 \\ 3x+3y-3z=3 \\ 4x+4y-4z=4 \\ 5x+7y-5z=-1 \end{cases}$ $\{S.C.I. \to (4+z,-3,z)\}$ D. $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=11 \\ y+z=7 \end{cases}$ $\{S.I.\}$

E. $\begin{cases} 3x-2y+7z=1 \\ x-5y+2z=8 \\ -2x+10y-4z=-16 \end{cases}$ $\left\{S.C.I. \to \left(\frac{-31z-11}{13},\frac{-z-23}{13},z\right)\right\}$

4) Discute, según los valores del parámetro:

$\begin{cases} x-z=1 \\ ay+3z=2 \\ 4x+y-az=1 \end{cases}$ $\left\{\begin{matrix} a\neq 3; a\neq 1 \Rightarrow S.C.D. \\ a=3 \Rightarrow S.I. \\ a=1 \Rightarrow S.I. \end{matrix}\right\}$

5) Discute, según el parámetro, y resuelve cuando sea posible:

A. $\begin{cases} (1+a)x+y+z=1 \\ x+(1+a)y+z=1+a \\ x+y+(1+a)z=1+a^2 \end{cases}$ $\left\{\begin{matrix} a\neq 0; a\neq -3 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow \left(\frac{-a}{a+3},\frac{3}{a+3},\frac{a(a+2)}{a+3}\right) \\ a=0 \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow (1-y-z,y,z) \\ a=-3 \Rightarrow S.I. \end{matrix}\right\}$

B. $\begin{cases} x-ay+az=a \\ -x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$ $\left\{\begin{matrix} a\neq -1 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow (0,0,1) \\ a=-1 \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow (-1-y+z,y,z) \end{matrix}\right\}$

6) Discute el sistema y resuélvelo para los valores del parámetro que lo hagan compatible

$$\begin{cases} mx+2y+3z=0 \\ 2x+my+2z=2 \\ 2x+my+3z=m-2 \end{cases}$$

7) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+(a^2-a-1)y=-1 \\ x+(a^2-a-1)y+(a-2)z=1-a^2 \end{cases}$$

8) Cuando en el año 1800 Beethoven escribe su primera sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Shubert. Pasa el tiempo y es Shubert el que compone su célebre Sinfonía Incompleta. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera sinfonía. Determina el año de nacimiento de ambos compositores.

9) De tres números, x, y, z, sabemos lo siguiente: que el primero más el segundo suman 0; que el primero más el tercero suman 1; que la suma de los tres es 0 y, para terminar, que el primero multiplicado por un número k más el doble de la suma del segundo y el tercero da 1.
a) ¿Qué puede decirse del valor de k?
b) ¿Cuánto valen esos tres números?

10) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones, en el que las incógnitas son *x, y, z*: $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+ay=b \\ bz+cy=a \end{cases}$

Halla la solución sabiendo que es única.

## SELECTIVIDAD

***(Galicia, junio 2008)***

*a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{aligned} 2x+3y+z&=m \\ x-2y+z&=2 \\ 3x+y+2z&=1 \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{matrix} si\ m\neq -1 \Rightarrow SI, \text{sin } solución \\ si\ m=-1 \Rightarrow SCI, \infty\ soluciones \end{matrix}\right\}$$

*b) Resuélvelo, si es posible, para el caso m = -1.* $\left\{si\ m=-1, sol=(x=\frac{5\lambda-4}{-7}, y=\frac{5-\lambda}{-7}, \lambda)\right\}$

***(Galicia, septiembre 2008)***

*a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{aligned} 3x-y-3z&=m \\ x+y-z&=1 \\ mx+3y+2z&=3 \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{matrix} si\ m\neq -2 \Rightarrow SCD, única\ solución \\ si\ m=-2 \Rightarrow SI, \text{sin } soluciones \end{matrix}\right\}$$

*b) Resuélvelo, si es posible, para el caso m = 0.* $\left\{\text{Si } m=0,\ \text{sol}\left(5/8, 3/4, 3/8)\right)\right\}$

***(Galicia, junio 2009)***

*a) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:* $\begin{array}{r} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{array}$

*b) Calcula el valor de m para que al añadir al sistema anterior la ecuación:*

$x+2y-z=m$

*resulte un sistema compatible indeterminado.*

***(Galicia, septiembre 2009)***

*a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y+4z=m \end{array}$$

*b) Resuélvelo, si es posible, para el caso m = 0.*

***(Galicia, junio 2010)***

*a) Discute, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{array}{r} ax+2y+2z=a \\ x+y+z=0 \\ 2x-y+2z=a \end{array}$$

*b) Resuélvelo, si es posible, para el caso a = 0.*

***(Galicia, septiembre 2010)***

*a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{array}{r} mx+y-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+z=m \end{array}$$

*b) Resuélvelo, si es posible, en los casos m = 0 y m = -1.*

***(Galicia, junio 2011)***

*a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{array}{l} mx-2y+2z=1 \\ 2x+my+z=2 \\ x+3y-z=m \end{array}$$

*b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso m = 1.*

***(Galicia, septiembre 2011)***

*a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{array}{l} x+my+3z=1 \\ x+2y+mz=m \\ x+4y+3z=1 \end{array}$$

*b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso m = 4*

***(Galicia, junio 2012)***

**A.** *Dado el sistema:* $\begin{matrix} x-2y+3z=5 \\ x-3y+2z=-4 \end{matrix}$

*a) Calcula el valor de $\alpha$ para que al añadirle la ecuación $\alpha x+y+z=9$, resulte un sistema compatible indeterminado. Resuélvelo, si es posible, para $\alpha=0$.*

*b) ¿Existe algún valor de $\alpha$ para el que el sistema con estas 3 ecuaciones no tiene solución?*

**B.** *Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

*a) Estudia, según los valores de m, el rango de la matriz A.*

*b) Resuelve, si es posible, el sistema* $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *para el valor* $m=1$

***(Galicia, septiembre 2012)***

*a) Discute, según los valores de m, el sistema* $\begin{matrix} x+y=m \\ x-my=-13 \\ 3x+5y=16 \end{matrix}$

*b) Resuélvelo, si es posible, para $m=2$.*

***(Galicia, junio 2013)***

*a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema :* $\begin{cases} x+my+z=2 \\ mx-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$

*b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso $m=1$*

***(Galicia, septiembre 2013)***

**A.** *¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo? ¿Puede ser incompatible un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Justifica la respuesta.*

**B.** *Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

*a) Calcula, según los valores de m, el rango de A.*

*b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m? Para m = 0, calcula $A^{60}$*

*c) Si $m=2$ y A es la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que el sistema tiene solución única? Justifica la respuesta.*

***(Galicia, junio 2014)***

*a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 3x-y-2z=m+9 \\ mx+3y-z=0 \\ 3x-y+5z=0 \end{cases}$$

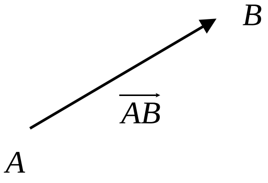
*b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso $m=-9$*

## BLOQUE: GEOMETRÍA

# 1. VECTORES EN EL ESPACIO

### ➢ Vectores en el espacio

Un vector fijo es un segmento orientado y viene determinado por su módulo, dirección y sentido.




*Módulo* de $\overrightarrow{AB}$ es la distancia de *A* a *B*. Se designa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

*Dirección* de $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que contiene a *A* y a *B*, y de todas las rectas paralelas a ella.

Cada dirección admite dos *sentidos* opuestos: el que va de *A* a *B* y el que va de *B* a *A*.

Dos vectores son *iguales* cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido.

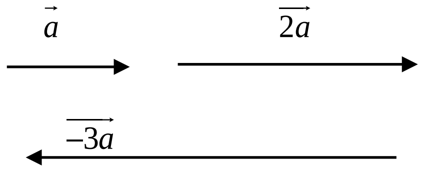
Tenemos así el espacio de los vectores libres $\surd^3$ en el cual podemos definir las operaciones de producto de un vector por un número, suma e resta de vectores.

- Operaciones con vectores

A) Producto de un vector por un número.

Sean $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \in \surd^3$ y $\lambda \in \Re$. Definimos $\overrightarrow{\lambda u}$ como vector que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{OA}$, mismo sentido si $\lambda>0$, y sentido contrario si $\lambda<0$, y de módulo :

$\left|\overrightarrow{\lambda u}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right|$.



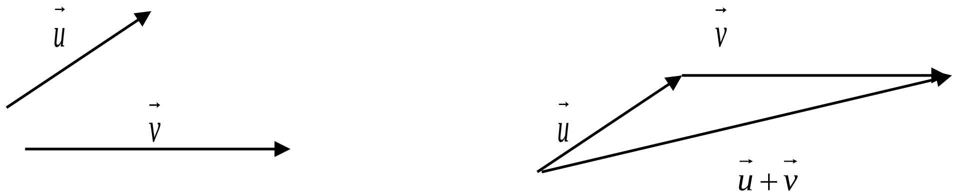

Si $\lambda = 0$, $\overrightarrow{\lambda u} = \vec{0}$ (vector nulo)

$-1 \cdot \vec{u} = \overrightarrow{-u}$ (vector opuesto)

B) Suma de vectores.

La *suma* la definimos de la siguiente forma:

Sean $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ dos vectores libres, siendo *O*, *A* y *B* puntos arbitrarios del espacio, y *OA* y *AB* dos representantes de ellos. Gráficamente la suma será:




$$\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

C) Resta de vectores.

Definimos $\vec{u}-\vec{v}$ como: $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$

Propiedades.

*Suma*
$\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \surd^3$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Asociativa: } (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \\ \text{Conmutativa: } \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} \\ \text{Existe vector nulo: } \vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u} \\ \text{Existe vector opuesto: } \vec{u}+(\overrightarrow{-u}) = \vec{0} \end{array}\right.$$

*Producto*

$\vec{u}, \vec{v} \in \surd^{3}$

*$\alpha$, $\beta$*$\in \Re$

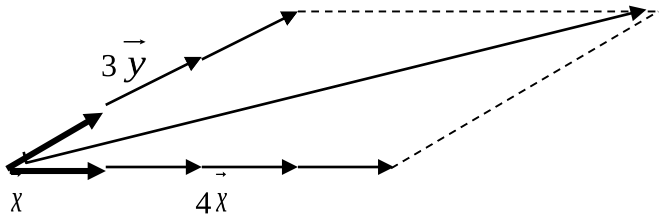
- Asociativa: $\alpha\left(\beta\vec{u}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{u}$
- Distributiva: $\begin{cases} \left(\alpha+\beta\right)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \\ \alpha\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \end{cases}$
- Producto por la unidad: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Polo tanto, ($\surd^{3}$, +, $\cdot\Re$) es un espacio vectorial real

- <u>Dependencia e independencia lineal de vectores</u>

*Combinación lineal de vectores.*
Dados los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n} \in \surd^{3}$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Re$ la expresión $\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$ se llama combinación lineal de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$.

EJEMPLO:




*Dependencia e independencia lineal.*
Sean los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n} \in \surd^{3}$.
Se dice que forman un conjunto ***linealmente dependiente*** si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Re$ no todos nulos tales que:
$\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}$
Esta definición es equivalente a:
$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n} \in \surd^{3}$ son *linealmente dependientes* si alguno de los vectores lo podemos escribir como combinación lineal de los restantes.
Se dice que $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n} \in \surd^{3}$ forman un conjunto ***linealmente independiente*** si dada cualquier combinación lineal nula:
$\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}$
implica que todos los escalares son nulos.
Así:
Dos vectores alineados son linealmente dependientes.
Dos vectores no alineados son linealmente independientes.
Tres vectores coplanarios (están en el mismo plano) son linealmente dependientes, pero tres vectores no coplanarios son linealmente independientes.

*Base*. Sean $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ tres vectores no coplanarios (por lo tanto l.i.). Cualquier otro vector se puede poner como combinación lineal de $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ de forma única. Así, decimos que $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ forman una *base*: B=$\left\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right\}$.

Si los tres vectores son perpendiculares entre sí, se dice que es *ortogonal*. Si además, su módulo es 1, se dice que es *ortonormal*.

*Coordenadas de un vector respecto de una base.*

Sea una base B=$\left\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right\}$. Entonces, dado $\vec{u}\in\surd^3$, existen a, b, c $\in\Re$ tales que:

$\vec{u}=a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}$

A los números a, b, c le llamamos coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base B.

Se expresa: $\vec{u}\left(a,b,c\right)$.

Normalmente trabajaremos con la base $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}=\left\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right\}$ que se conoce como **base canónica.**

*Operaciones con coordenadas*.

Sean los vectores $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$. Entonces:

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

$k\vec{u}=(kx_1,ky_1,kz_1)$

Como consecuencia de estos resultados será más fácil trabajar con los vectores.

## Producto escalar de dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto escalar** de dichos vectores al número real:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

### Propiedades

- Definido positivo: $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{u}\right)=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos 0^{\circ}=\left|\vec{u}\right|^2\geq 0$

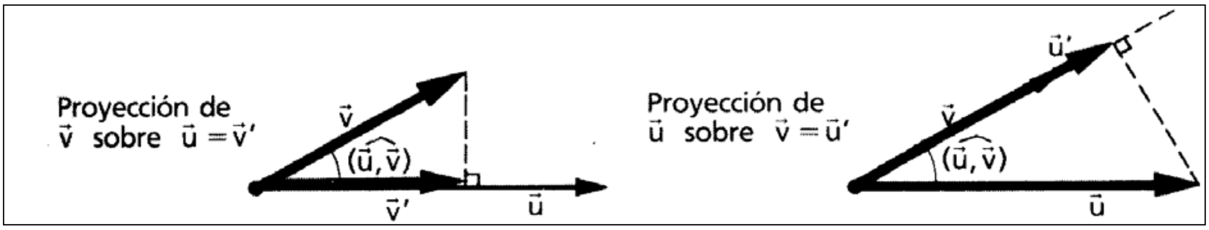
de esta expresión deducimos el módulo de un vector: $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

- Conmutativo: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- Homogéneo: $k\cdot\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\left(k\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(k\cdot\vec{v}\right)$
- Distributivo respecto de la suma: $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

### Interpretación geométrica

"El producto escalar de dos vectores coincide con el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él."

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=|\vec{u}|\cdot proy_u\,\vec{v}$$




- Expresión analítica

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\right)\cdot\left(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\right)$$

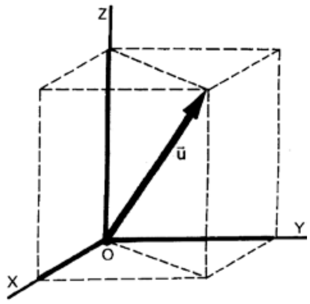
Aplicando las propiedades del producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1\,\vec{i}\,\vec{i} + u_1v_2\,\vec{i}\,\vec{j} + u_1v_3\,\vec{i}\,\vec{k} + u_2v_1\,\vec{j}\,\vec{i} + u_2v_2\,\vec{j}\,\vec{j} + u_2v_3\,\vec{j}\,\vec{k} + u_3v_1\,\vec{k}\,\vec{i} + u_3v_2\,\vec{k}\,\vec{j} + u_3v_3\,\vec{k}\,\vec{k}$$

teniendo en cuenta que $\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1$ y $\vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0$

llegamos a que $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$

## Módulo de un vector




Teniendo en cuenta que $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0 = |\vec{u}|^2$
podemos obtener el módulo de un vector utilizando que

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

$|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

$|\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (desigualdad triangular)

$|k\vec{u}| = |k|\cdot|\vec{u}|$

- Vector unitario

Un vector es unitario si su módulo vale 1.

- Ángulo que forman dos vectores

Podemos obtener el ángulo que forman dos vectores a partir de su coseno, despejándolo de la fórmula del producto escalar:

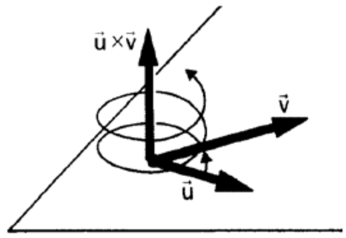
$$\boxed{\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

- Ortogonalidad

Como consecuencia, dos vectores no nulos son perpendiculares (ortogonales), si y sólo si, su producto escalar es cero.

## Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u} \times \vec{v}$ que se obtiene:
En el caso de que los dos vectores sean proporcionales o alguno de ellos sea nulo, su producto vectorial es el vector cero.
En caso contrario, es otro vector que tiene por módulo el producto de los módulos de los vectores por el seno del ángulo que forman, su dirección es perpendicular a ambos vectores, y su sentido el del avance de un sacacorchos que gira en sentido positivo del primer vector al segundo.




$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot sen(\vec{u}, \vec{v})$$

### Propiedades

- Anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\left(\vec{v} \times \vec{u}\right)$
- Homogénea: $\left(k \cdot \vec{u}\right) \times \vec{v} = k \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \vec{u} \times \left(k \cdot \vec{v}\right)$
- Distributiva respecto de la suma: $\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) + \left(\vec{u} \times \vec{w}\right)$

### Expresión analítica

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}\right) \times \left(v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}\right) =$$

$$= u_1 v_1 \left(\vec{i} \times \vec{i}\right) + u_1 v_2 \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) + u_1 v_3 \left(\vec{i} \times \vec{k}\right) + u_2 v_1 \left(\vec{j} \times \vec{i}\right) + u_2 v_2 \left(\vec{j} \times \vec{j}\right) + u_2 v_3 \left(\vec{j} \times \vec{k}\right) + u_3 v_1 \left(\vec{k} \times \vec{i}\right) +$$

$$+ u_3 v_2 \left(\vec{k} \times \vec{j}\right) + u_3 v_3 \left(\vec{k} \times \vec{k}\right) = u_1 v_2 \vec{k} - u_1 v_3 \vec{j} - u_2 v_1 \vec{k} + u_2 v_3 \vec{i} + u_3 v_1 \vec{j} - u_3 v_2 \vec{i}$$

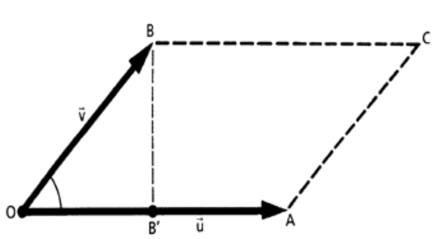
Para recordar esta expresión se puede utilizar:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

### Interpretación geométrica

"El módulo del vector producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que forman esos dos vectores".

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\,\alpha = |\vec{u}| \cdot h = b \cdot h}$$




Cálculo del área de un triángulo.
Si conocemos los tres vértices de un triángulo *OAB*, para obtener su área llega con calcular:

$$\boxed{Área = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}|}$$

## Producto mixto de tres vectores

Se llama producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ al número real: $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$.

### Expresión analítica del producto mixto

Utilizando las expresiones analíticas del producto escalar y vectorial se llega a que:

$$\boxed{\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

### Propiedades

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{v},\vec{w},\vec{u}\right]=\left[\vec{w},\vec{u},\vec{v}\right]$$

$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0 \Leftrightarrow$ los tres vectores son linealmente dependientes (están en el mismo plano)

$$\left[a\cdot\vec{u},b\cdot\vec{v},c\cdot\vec{w}\right]=abc\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$$

$$\left[\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]+\left[\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\right]$$

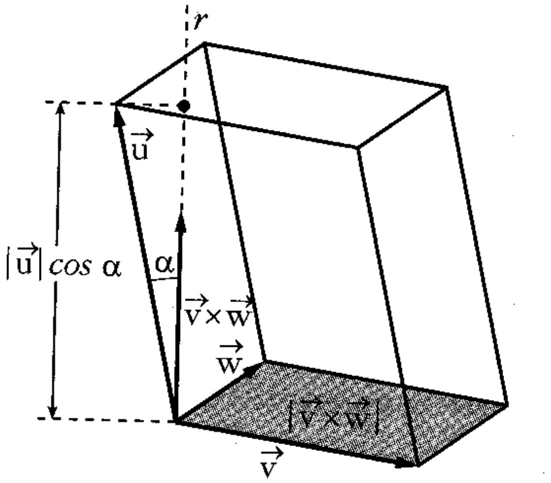
### Interpretación geométrica

Consideramos tres vectores no nulos $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$, de forma que generen un paralelepípedo, tal como indica la figura:

El volumen del paralelepípedo viene dado por:

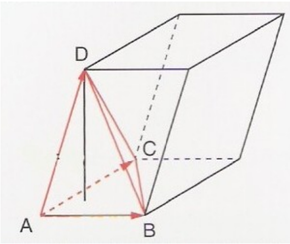
$V=$ área de la base $\cdot$ altura $=\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\alpha=\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right|$,

siendo $\alpha$ el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}\times\vec{w}$.



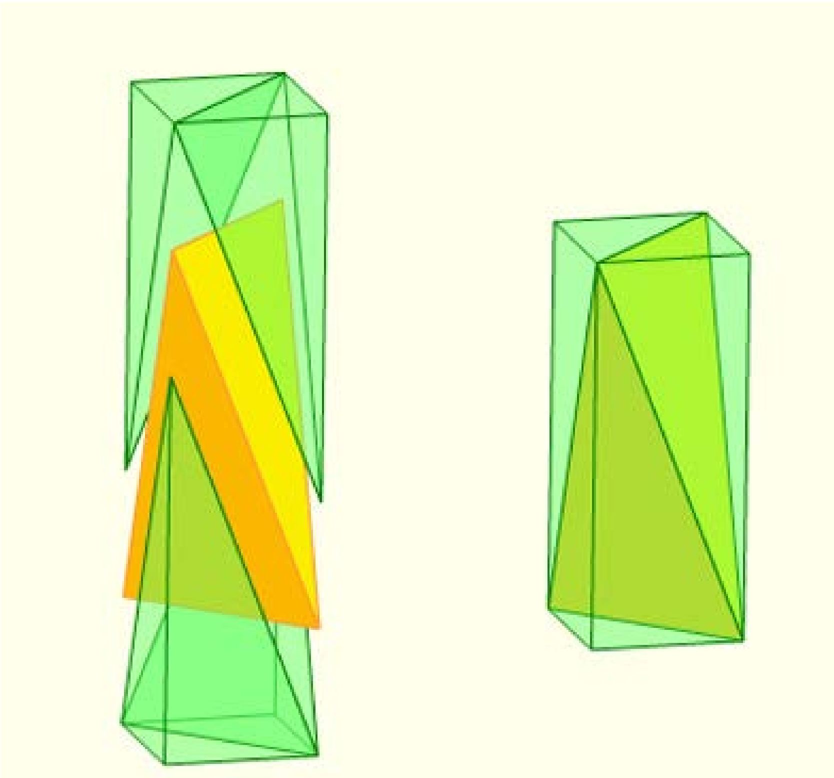

"El valor absoluto del producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo que forman los tres vectores"

Por tanto, como en un paralelepípedo se pueden construir 6 tetraedros con el mismo volumen, el tetraedro que tiene a tres vectores como aristas concurrentes en un mismo vértice tiene como volumen 1/6 del valor absoluto del producto mixto de esos tres vectores.




Si conocemos los vértices de un tetraedro ABCD, su volumen se puede calcular como:

$$\boxed{Volumen = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}$$



## EJERCICIOS

1) Dados los vectores del espacio $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(4,5,6)$, determina el módulo de los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

2) Determina λ e φ para que el vector (λ, φ, -9,-4) sea combinación lineal de los vectores (1, 2, -5, 3) y (2, -1, 4, 7).

3) Descubre que valores de *a* hacen linealmente dependientes los vectores $(1,1,a),(2,1,a)$ y $(0,1,1)$.

4) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $|\vec{u}|=5$ y $|\vec{v}|=2$, y además $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$. Calcula $\vec{u}\times\vec{v}$.

5) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,-1,4)$, calcula:
   a) Su producto escalar.
   b) El módulo de cada vector.
   c) El ángulo que forman.
   d) El valor de m para que $\vec{w}=(0,3,m)$ sea ortogonal a $\vec{v}$.
   e) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, y viceversa.
   f) Su producto vectorial.
   g) El área del paralelogramo que forman.

6) Comprueba si los vectores $\vec{a}=\left(0,\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)$ y $\vec{b}=(2,1,3)$ son unitarios.

7) Sean $\vec{u}=(1,\sqrt{6},-3)$ y $\vec{v}=(-7,3,\sqrt{6})$. Calcula cuánto mide:
   a) La proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.
   b) La proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

8) Sabiendo que $|\vec{u}|=5$, $|\vec{v}|=2$, $|\vec{w}|=1$ y que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=3$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}=1$, determina el valor de *k* para que los vectores $\vec{x}=2\vec{u}+k\vec{v}-k\vec{w}$ e $\vec{y}=\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$ sean ortogonales. $\{k=6\}$

9) Si dos vectores tienen la misma dirección, ¿cómo será su producto escalar, según tengan el mismo u opuesto sentido?

10) Sabiendo que $|\vec{u}+\vec{v}|=8$ y $|\vec{u}-\vec{v}|=6$, calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$. $\{7\}$

11) Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tales que $|\vec{u}|=3, |\vec{v}|=1, |\vec{w}|=4$ y $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, calcula la suma de los productos escalares $\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}+\vec{v}\vec{w}$.

12) La tercera componente de un vector $\vec{u}$ del espacio es 1. Determina las otras dos componentes sabiendo que $\vec{u}$ es perpendicular al vector $(1,-2,0)$ y que, además, es combinación lineal de los vectores $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$. $\{(2,1,1)\}$

13) Dados los vectores $\vec{u}=(-1,1,2)$ y $\vec{v}=(2,3,-1)$, calcula el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. $\{\sqrt{83}\}$

14) Halla el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ y $\vec{v}=(3,2,1)$.

15) Calcula el valor de $x$ para que los vectores $\vec{u}=(x+2,2,1)$, $\vec{v}=(x-1,x-1,3)$ y $\vec{w}=(2x+1,x+1,x+6)$ sean linealmente dependientes. $\{x=0; x=1; x=-2\}$

16) Dados los puntos A(1, x, -2), B(y, 1, -1) C(2, x, -3) e D(1, 2, 3), calcula el volumen del tetraedro ABCD, sabiendo que la cara ABC es un triángulo rectángulo isósceles recto en A.

17) Sean los vectores $\vec{u}$ (2, 0, 1), $\vec{v}$ (2k, 1, 0) e $\vec{w}$ (4, k, 1), calcula:

a) Los valores de k para que el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sea de 16 $u^3$.

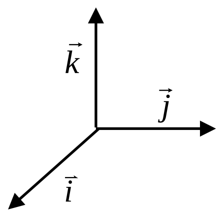
b) Los valores de k para que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

18) Calcula el volumen del tetraedro de vértices $A = (x,1,1)$, $B = (1,-1,2)$, $C = (x,-1,3)$ y $D = (y+1,-2,2-2y)$, sabiendo que las aristas *AB* y *BD* son perpendiculares y que las aristas *AB* y *AC* forman un ángulo de 45º.

# 2. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Llamamos *sistema de referencia* a un conjunto $\Re$={O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ } formado por:

Un punto fijo, O, chamado *origen*.




Una base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) del espacio vectorial de los vectores libres $\surd^3$.

Sea la aplicación $\varphi:\Re^3 \longrightarrow \surd^3$.

$P \longrightarrow \overrightarrow{OP}$

Esta aplicación es biyectiva; es decir, dado un punto P lo hacemos corresponder con el vector libre $\overrightarrow{OP}$.

Como ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) es una base de $\surd^3$, existen a, b, c $\in\Re$ tales que:

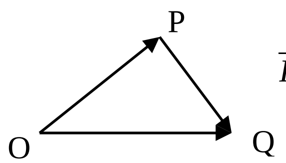
$\overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

*A la terna (a,b,c) le llamamos coordenadas de P respecto del sistema de referencia $\Re$.*

Vamos a considerar siempre un sistema de referencia **ortonormal.**

*Coordenadas de un vector dado por sus puntos.*

Sea el vector de origen $P(x_1, y_1, z_1)$ y extremo $Q(x_2, y_2, z_2)$

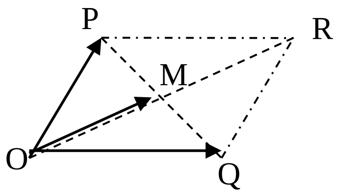



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

*Punto medio de un segmento*

Sea el segmento de extremos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Consideremos el paralelogramo al que dan lugar los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.




El punto medio del segmento *PQ* es un punto *M* tal que: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) =$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio del segmento vienen dadas por:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

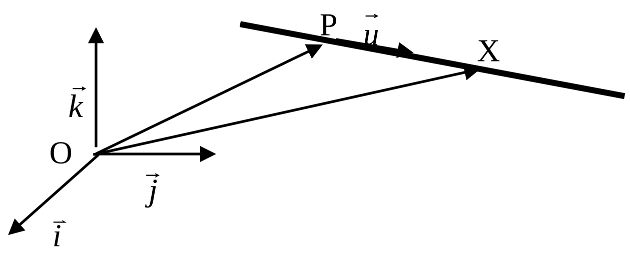
*Simétrico de un punto respecto de otro.*

Llamamos *simétrico* del punto *P respecto do punto M* a otro punto *P'* tal que *M* es el punto medio del segmento *PP'*.

Sea $P(x_1, y_1, z_1)$ y $M(a,b,c)$. Si las coordenadas de *P'* son $(\alpha, \beta, \gamma)$ tenemos que:

$$M = \left(\frac{x_1 + \alpha}{2}, \frac{y_1 + \beta}{2}, \frac{z_1 + \gamma}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x_1 + \alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2a - x_1 \\ b = \dfrac{y_1 + \beta}{2} \Rightarrow \beta = 2b - y_1 \\ c = \dfrac{z_1 + \gamma}{2} \Rightarrow \gamma = 2c - z_1 \end{cases}$$

## ➢ Ecuaciones de la recta




Una recta $r$ del espacio queda determinada por un punto $P(a,b,c)$ de dicha recta y un vector con su dirección $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, que se llama <u>vector director</u> de la recta.

Para hallar cualquier punto $X$ de la recta, podemos escribir:

$\vec{OX}=\vec{OP}+\lambda\cdot\vec{u}$,

que se llama ecuación vectorial de la recta.

O también $(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda(u_1,u_2,u_3)$

Igualando cada coordenada, obtenemos:

$\begin{cases} x=a+\lambda u_1 \\ y=b+\lambda u_2 \\ z=c+\lambda u_3 \end{cases}$ que se llaman <u>ecuaciones paramétricas de la recta</u>.

Despejando el parámetro $\lambda$, se obtiene:

$\left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{x-a}{u_1} \\ \lambda=\dfrac{y-b}{u_2} \\ \lambda=\dfrac{z-c}{u_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x-a}{u_1}=\dfrac{y-b}{u_2}=\dfrac{z-c}{u_3}$ que son las <u>ecuaciones continuas de la recta</u>.

<u>Nota:</u> Puede ocurrir que $u_i=0$ para $i=1, i=2$ ó $i=3$. Entonces si por ejemplo $u_1=0$, aparece:

$\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y-b}{u_2}=\dfrac{z-c}{u_3}$

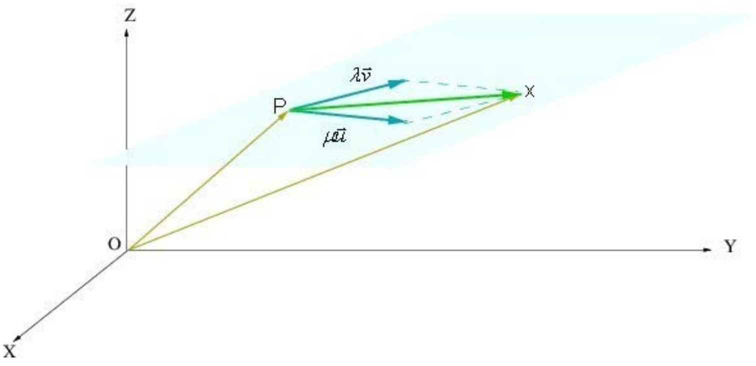
La primera proporción es meramente simbólica. Lo único que quiere decir es que $x=a$

Multiplicando estas ecuaciones en cruz, tendremos:

$\left.\begin{array}{l} (x-a)u_2=(y-b)u_1 \\ (x-a)u_3=(z-c)u_1 \end{array}\right\}$ que son las ecuaciones implícitas o reducidas de la recta.

(Veremos que cada una de ellas representa un plano, y por tanto, la recta se escribe como la intersección de dos planos)

- <u>Ecuaciones del plano</u>




Sea un sistema de referencia ortonormal $\Re = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Un plano $\pi$ en el espacio queda determinado por un punto $P(a,b,c)$ y dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ no nulos y con distinta dirección (linealmente independientes), que se llaman <u>vectores directores</u>.
Para hallar cualquier punto X del plano se puede escribir:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PX} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u} \\ \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$$

, que se llama <u>ecuación vectorial del plano</u>.

O también:

$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(u_1, u_2, u_3)$

Igualando cada coordenada, obtenemos:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot u_1 \\ y = b + \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot u_2 \\ z = c + \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot u_3 \end{cases}$$

que son las <u>ecuaciones paramétricas del plano</u>.

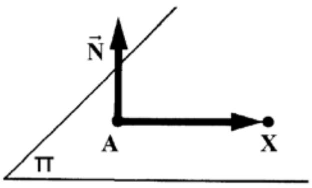
Por otra parte, el vector $\overrightarrow{PX}$ tiene que ser combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ ; al ser estos tres vectores dependientes se tiene que:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, obtenemos una expresión de la forma:
$Ax + By + Cz + D = 0$, que es la ecuación implícita o general del plano.

**Vector característico de un plano**.
Un plano puede estar definido por un punto $A = (a, b, c)$ y un vector perpendicular a dicho plano $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ que se llama <u>vector característico</u> del plano.

Si cogemos cualquier punto $X = (x, y, z)$ del plano se cumple que $\overrightarrow{AX}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, por lo que su producto escalar es cero. Por tanto:

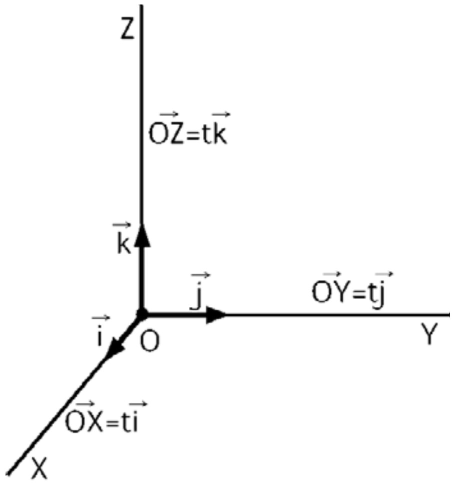



$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x-a) \cdot n_1 + (y-b) \cdot n_2 + (z-c) \cdot n_3 = 0 \Rightarrow n_1 x + n_2 y + n_3 z - n_1 a - n_2 b - n_3 c = 0$$

Es decir, obtenemos la ecuación implícita del plano: $Ax + By + Cz + D = 0$ donde $\vec{n} = (A, B, C)$

## Ecuaciones de los ejes y de los planos coordenados

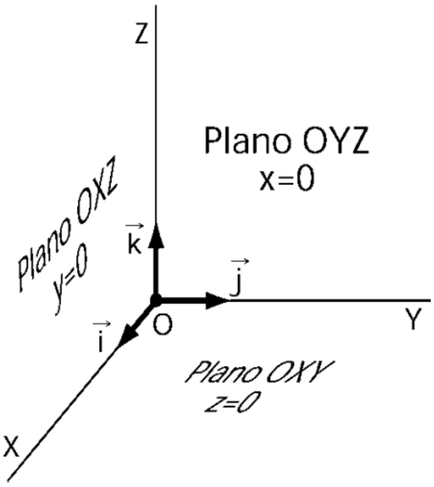
### Ecuaciones de los ejes coordenados




| | Vectorial | Paramétrica |
|---|---|---|
| Eje OX | $\vec{x}=t\,\vec{i}$ | $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$ |
| Eje OY | $\vec{x}=t\,\vec{j}$ | $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$ |
| Eje OZ | $\vec{x}=t\,\vec{k}$ | $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$ |

*Los ejes de coordenadas* ***no*** se pueden expresar en forma continua

### Planos: ecuaciones de los planos coordenados




| | Vectorial | Paramétrica | Implícia |
|---|---|---|---|
| Plano OXY | $\vec{x}=t\,\vec{i}+s\,\vec{j}$ | $\begin{cases}x=t\\y=s\\z=0\end{cases}$ | $z=0$ |
| Plano OXZ | $\vec{x}=t\,\vec{i}+s\,\vec{k}$ | $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=s\end{cases}$ | $y=0$ |
| Plano OYZ | $\vec{x}=t\,\vec{j}+s\,\vec{k}$ | $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=s\end{cases}$ | $x=0$ |

## Posiciones relativas de dos planos

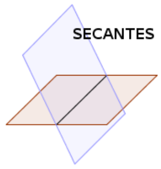
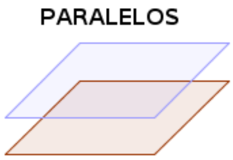
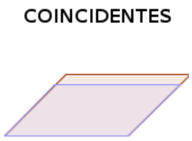
Dos planos pueden ser secantes, paralelos o coincidentes.

Si los planos tienen ecuaciones $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$, habrá que estudiar el sistema formado por ambas ecuaciones: $\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{array}\right)$

Si rango(M) = rango(M*) = 2, (los coeficientes no son proporcionales), el sistema es compatible indeterminado, al ser tres incógnitas, dos de ellas dependerán de la tercera, es decir al resolverlo aparecerá un parámetro, la solución será una recta; los planos son <u>secantes</u>.

Si rango(M) = 1 y rango(M*) = 2, (los coeficientes son proporcionales pero el término independiente no), el sistema es incompatible, no tiene solución, los planos no se cortan, por tanto son <u>paralelos</u>.

Si rango(M) = rango(M*) = 1, (los coeficientes y el término independiente son proporcionales), el sistema es compatible indeterminado, como sobra una de las ecuaciones, una de las incógnitas quedará en función de las otras dos, por tanto las soluciones vendrán dadas por dos parámetros, la intersección es un plano, por tanto los planos son <u>coincidentes</u>.

| Rango(M) | Rango(M*) | Posición |
|---|---|---|
| 2 | 2 |  |
| 1 | 2 |  |
| 1 | 1 |  |

## Posiciones relativas de tres planos

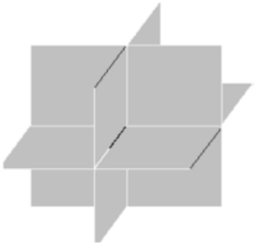
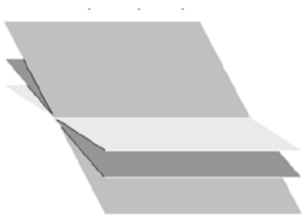
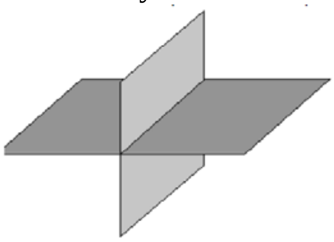
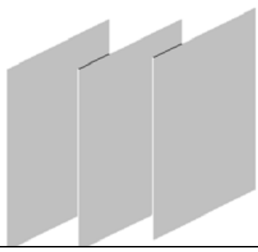
En el caso de tres planos el sistema a estudiar tiene la siguiente matriz ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$

Si rango(M) = rango(M*) = 3, el sistema es compatible determinado, tiene solución única, por tanto los tres planos se cortan en un punto.

Si rango(M) = 2, rango(M*) = 3, el sistema es incompatible, los tres planos no tienen ningún punto común. Como rango(M) = 2, al menos dos planos se cortan en una recta. (Puede ocurrir que los tres planos se corten dos a dos en rectas paralelas o que dos de ellos sean paralelos y el otro plano corte a ambos).

Si rango(M) = rango(M*) = 2, el sistema es compatible indeterminado, como hay tres incógnitas, dos de ellas dependerán de la tercera, por tanto al haber un solo parámetro la solución es una recta, los tres planos se cortan en una recta. (Puede ocurrir que los planos sean distintos y se corten en una recta o que dos de ellos coincidan y el otro los corte en una recta).

Si rango(M) = 1, rango(M*) = 2, el sistema es incompatible. Como rango(M) = 1 los tres planos son paralelos.(Puede que coincidan dos de ellos).
Si rango(M) = rango(M*) = 1, el sistema es compatible indeterminado. Como sobran dos de las ecuaciones y hay tres incógnitas, una de estas incógnitas depende de las otras dos, es decir, las soluciones vienen dadas con dos parámetros, por lo tanto, las soluciones forman un plano: los tres planos son coincidentes.

| Rango(M) | Rango(M*) | Posición |
|---|---|---|
| 3 | 3 |  secantes en un punto |
| 2 | 3 | secantes dos a dos o dos planos paralelos cortados por el otro   |
| 2 | 2 | planos secantes en una recta distintos  dos coincidentes y uno secante  |
| 1 | 2 | planos paralelos distintos  paralelos y dos coincidentes  |
| 1 | 1 | Coincidentes  |

## ➢ Posiciones relativas de una recta y un plano

Puede ocurrir que se corten en un punto, que la recta esté contenida en el plano o que la recta sea paralela al plano.

Si el plano viene dado por la ecuación $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y la recta por

$$r:\begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

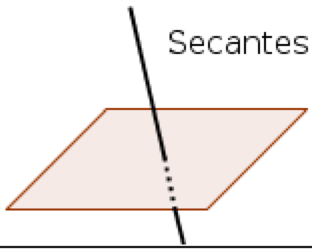
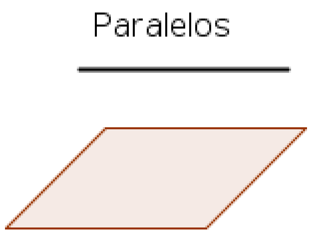
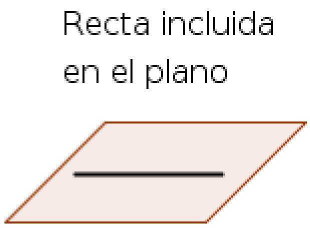
La matriz ampliada a estudiar será: $\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$

Hay que tener en cuenta que el rango mínimo de M es 2, ya que los planos que determinan la recta son secantes. Por tanto, los casos posibles son:

Si rango(M) = rango(M*) = 3, el sistema es compatible determinado, la solución es un único punto, plano y recta se cortan en un punto, son secantes.

Si rango(M) = 2, rango(M*) = 3, el sistema es incompatible, al no tener solución la recta y el plano son paralelos.

Si rango(M) = rango(M*) = 2, el sistema es compatible indeterminado, como la solución viene dada con un parámetro es una recta, por tanto la recta está contenida en el plano.

| Rango(M) | Rango(M*) | Posición |
|---|---|---|
| 3 | 3 |  |
| 2 | 3 |  |
| 2 | 2 |  |

Nota:
Si la recta viene dada por ecuaciones paramétricas es más sencillo sustituir estas ecuaciones en la implícita del plano, quedará como única incógnita el parámetro:
$A(x_0 + k \cdot u_1) + B(y_0 + k \cdot u_2) + C(z_0 + k \cdot u_3) + D = 0$
Si esta ecuación tiene una única solución la recta y el plano son secantes. Si no tiene solución son paralelos. Y si tiene infinitas soluciones la recta está contenida en el plano.

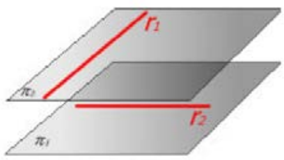
## ➢ Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas pueden ser secantes, paralelas, cruzadas o coincidentes.
Si las rectas son:

$r:\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ $\qquad s:\begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$

El sistema a estudiar tendrá la siguiente matriz de coeficientes y ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \\ A''' & B''' & C''' & -D''' \end{array}\right)$

Hay que tener en cuenta que como mínimo rango(M) = 2, pues las dos primeras (o las dos últimas) ecuaciones forman una recta y son independientes.
Si rango(M) = 3, rango(M*) = 4, el sistema es incompatible, no tiene solución, además las rectas no pueden ser paralelas porque sería rango(M) = 2, por tanto las rectas son cruzadas.
Si rango(M) = rango(M*) = 3, el sistema es compatible determinado, al tener una única solución, las rectas se cortan en un punto.
Si rango(M) = 2, rango(M*) = 3, el sistema es incompatible, como rango(M) = 2 las rectas tienen la misma dirección, por tanto son paralelas.
Si rango(M) = rango(M*) = 2, el sistema es compatible indeterminado, las soluciones vienen dadas por un parámetro, es una recta, las rectas son coincidentes.

| RANGO(M) | RANGO(M*) | POSICIÓN |
|---|---|---|
| 3 | 4 | se cruzan  |
| 3 | 3 | se cortan  |
| 2 | 3 | son paralelas  |
| 2 | 2 | son coincidentes  |

Nota:
Si las rectas vienen dadas por las ecuaciones paramétricas, podemos encontrar un vector director de cada una fácilmente.
Si los vectores son proporcionales, las rectas tienen que ser paralelas o coincidentes. Para saber cuál de estos casos es, cogemos cualquier punto de una de ellas y vemos si pertenece a la otra, en caso afirmativo son coincidentes y en caso contrario son paralelas.
Si los vectores no son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan. Para saber de qué caso se trata, habrá que ver si el siguiente sistema tiene o no solución:

$$\begin{cases} x_0 + \lambda \cdot u_1 = x'_0 + \mu \cdot v_1 \\ y_0 + \lambda \cdot u_2 = y'_0 + \mu \cdot v_2 \\ z_0 + \lambda \cdot u_3 = z'_0 + \mu \cdot v_3 \end{cases}$$

Si tiene solución las rectas se cortan, si no la tiene las rectas se cruzan.

También con los vectores dirección de las rectas y el que une un punto de cada una de ellas.
Si los tres vectores son l. dependientes se cortan, si son independientes se cruzan.

$$\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{PQ} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{se cortan} \qquad \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{PQ} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{se cruzan}$$

## EJERCICIOS:

1) Calcula las coordenadas del punto medio del segmento *AB*, siendo $A=(3,4,-3)$ y $B=(1,0,4)$.

2) Halla todas las posibles ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(3,-1,0) y B(5,4,7).

3) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A(0,1,2) y B(1,2,-1). Decide si P(-2,-1,8) y Q(1,1,-3) pertenecen a esa recta.

4) Expresa en paramétricas la recta: $\begin{cases} x-2y+2z+4=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$

5) Halla la ecuación de la recta que pasa por A(1,-1,2) y es paralela a la recta: $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y=1 \end{cases}$

6) Halla todas las posibles ecuaciones del plano determinado por los puntos A(1,3,4), B(2,7,1) y C(3,1,7).

7) ¿Qué ocurre si intentas obtener el plano determinado por A(2,1,4), B(3,2,6) y C(4,3,8)?

8) Halla la ecuación (implícita) del plano que contiene al punto P(-3,2,1) y a la recta $(x,y,z)=(1+t,1-2t,3-t)$

9) Halla las ecuaciones continuas de la recta que está contenida en los planos:
$\pi_1: x-y+z-1=0$ y $\pi_2: 2x+z-1=0$

10) Halla las ecuaciones reducidas de la recta que pasa por A(1,0,-1) y es paralela a los planos: $\pi_1: 2x+y-z-2=0$ y $\pi_2: x+y-z=0$

11) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P(3,1,-2) y a la recta:
$$\frac{x+4}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{0}$$

12) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:
$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+1}{-1}$ y $\dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+4}{1}$

13) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $x=y=z$ y es paralelo a:
$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$

14) Estudia la posición relativa de los siguientes planos y en los casos posibles su intersección:

a) $\alpha: x+y-5z=-4$ $\quad\beta: 3x-y+2z=1$
b) $\alpha: x+y-5z=-4$ $\quad\beta: -3x-3y+15z=1$
c) $\alpha: x+y-5z=-4$ $\quad\beta: -3x-3y+15z=12$
d) $\alpha: x+3y+2z=0$ $\quad\beta: 2x-y+z=0$ $\quad\delta: 4x-5y-3z=0$
e) $\alpha: x-y+z=0$ $\quad\beta: 3x+2y-2z=1$ $\quad\delta: 5x=1$
f) $\alpha: 2x+3y-5z+7=0$ $\quad\beta: 3x+2y+3z-1=0$ $\quad\delta: -x+y-8z+3=0$

15) Determina el valor de k para que los siguientes planos se corten a lo largo de una recta:
$\alpha: x+y+z=2$ $\quad\beta: 2x+3y+z=3$ $\quad\delta: kx+10y+4z=11$

16) Estudia la posición relativa de los siguientes planos según los valores de a:
$\alpha : ax + y + z = 1$ $\delta : x + y + az = 1$

17) Discute la posición de los siguientes planos según los valores de a:
$\alpha : 3x - ay + 2z - (a-1) = 0$ $\beta : 2x - 5y + 3z - 1 = 0$ $\delta : x + 3y - (a-1)z = 0$

18) Halla el punto de intersección del plano $\alpha : 3x + 2y - 11z - 5 = 0$ y la recta: $r : (x, y, z) = (2t, 3t+1, t)$

19) Halla el valor de *k* para que las rectas $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

20) Estudia la posición relativa del plano determinado por los puntos A(1,3,2), B(2,0,1) y C(1,4,3), y la recta: $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$ {se cortan en un punto}

21) Determina m y n para que los siguientes planos sean paralelos:
$\alpha : 6x - my + 4z + 9 = 0$ $\beta : 9x - 3y + nz - n = 0$ $\{m = 2; n = 6\}$

22) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y si tienen algún punto común hállalo:

a) $r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = -2s \\ z = 7 + 6s \end{cases}$ $\left\{ \begin{matrix} \text{coinciden} \\ (t, 2-t, 1+3t) \end{matrix} \right\}$

b) $r : x = -y = -z$ $s : \begin{cases} x = 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ {se cruzan}

c) $r : x - 1 = y - 2 = \dfrac{z-1}{2}$ $s : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ {se cortan $(1,2,1)$ }

23) Estudia las posiciones relativas del plano $x + ay - z = 1$ y de la recta $\begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ según los valores del parámetro a.{ $a \neq -1; a \neq 2$ se cortan; $a = -1$ paralelos; $a = 2$ recta contenida en plano}

24) ¿Cuál es la posición relativa de estos tres planos? Justifica la respuesta.
$\begin{cases} 3x - 5y + 2z - 4 = 0 \\ 2x - 5y + 3z - 1 = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$ {secantes dos a dos porque $\begin{matrix} r(M) = 2 \\ r(M^*) = 3 \end{matrix}$ }

25) Estudia si los puntos $A(2,-1,0); B(3,0,1); C(-1,2,1)$ están alineados. Calcula *a* y *b* para que el punto $D(a, b+1, 2)$ pertenezca a la recta *AB*. {No; $a = 4; b = 0$ }

26) Estudia, según los valores del parámetro λ, la posición relativa de los planos:
$\alpha \equiv x + y + \lambda z = 0$ $\beta \equiv x + \lambda y + z = 0$ $\gamma \equiv \lambda x + y + \lambda z = 0$
¿Existe algún valor de λ para que los planos se corten en el punto $(0,3,3)$?

27) Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,1,1) y contiene a la recta $\begin{cases} 11x+y-11=0 \\ z=0 \end{cases}$

28) Estudia la posición relativa de la recta $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$ y el plano $x+y+z=3$ y obtén, si fuese posible, puntos de contacto. {son secantes; $(3,1,-1)$}

29) Dadas: la recta r definida por los planos $x=z-1$, $y=2-3z$, y la recta s por los planos $x-4=5z$ e $y=4z-3$, estudia su posición relativa y halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. {se cruzan; $-7x+4y+19z-15=0$ }

30) Obtén la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi: x+y-z+6=0$ con la recta $s: \dfrac{x}{3}=y-2=z+1$, y es paralela a la recta $r: \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 4x-3y+z-1=0 \end{cases}$ $\{(-9+t,-1-3t,-4-13t)\}$

31) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB donde A(-1,0,3) y B(1,4,-1), por su punto medio.

32) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(3,-1,2) y cuyo vector normal es $\vec{n}(2,1,8)$.

33) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(3,2,-1) y B(4,0,2), y es perpendicular al plano dado por $x-5y+2z-6=0$.

34) Los puntos $P=(-1,3,4)$ y $Q=(5,3,-2)$ son simétricos respecto a un plano. Calcula la ecuación de ese plano. $\{x-z-1=0\}$

35) Calcula los valores de m e n para que los tres planos: $\pi_1: 2x-y-2z=1;\ \ \pi_2: x-2y-z=2;\ \ \pi_3: mx-y+z=n$ se corten en una recta.

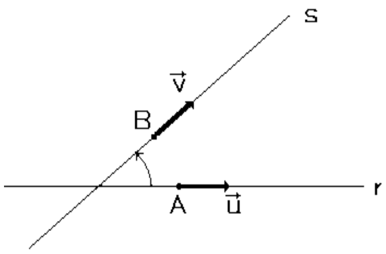
36) Dados los puntos A(-2,-4,-3) y B(2,6,5) y la recta $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$ averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r. Razonar la respuesta.

37) Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuaciones $x=y=z$, es paralela al plano de ecuación $3x+2y-z=4$ y pasa por el punto A(1,2,-1)

## 3. ESPACIO EUCLÍDEO TRIDIMENSIONAL: ÁNGULOS, PERPENDICULARIDAD DE RECTAS Y PLANOS

### ➢ Ángulo que forman dos rectas

El ángulo que forman dos rectas que se cortan es el menor de los dos ángulos que forman.



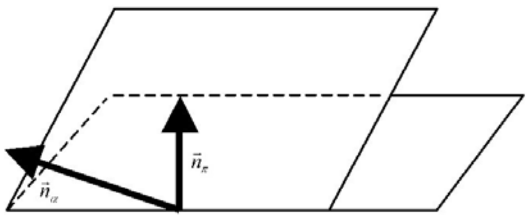

En el caso de dos rectas que se cruzan, el ángulo que forman es el ángulo que forman dos rectas secantes paralelas a las dadas.
Para calcular el ángulo que forman dos rectas *r* y *s*, se calcula el coseno del ángulo que forman sus vectores directores, teniendo en cuenta que el ángulo obtenido puede ser el suplementario del que buscamos. Para solucionar esto llega con tomar el valor absoluto del coseno del ángulo que forman los vectores directores.

$$\boxed{\cos(r,s) = \left|\cos\left(\vec{u}_r, \vec{v}_s\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s\right|}{\left|\vec{u}_r\right| \cdot \left|\vec{v}_s\right|}}$$

- Condición de perpendicularidad de dos rectas

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto escalar de sus vectores directores es cero.

### ➢ Ángulo que forman dos planos




El ángulo de dos planos que se cortan es el menor de los ángulos diedros que determinan.
El ángulo que forman dos planos $\pi$ y $\alpha$, coincide con el ángulo que forman sus vectores característicos o con su suplementario. Para solucionarlo, al igual que con las rectas, cogemos el valor absoluto del coseno de dicho ángulo.

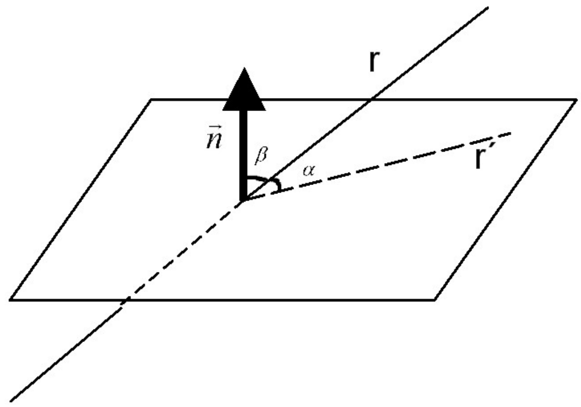
$$\boxed{\cos(\pi,\alpha) = \left|\cos\left(\vec{n}_\pi, \vec{n}_\alpha\right)\right| = \frac{\left|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right| \cdot \left|\vec{n}_\alpha\right|}}$$

- Condición de perpendicularidad de dos planos

Dos planos son perpendiculares si y sólo si el producto escalar de sus vectores característicos es cero.

## Ángulo que forman recta y plano

Se llama ángulo de una recta r y un plano $\pi$ que se cortan, al ángulo agudo que forma la recta con su proyección sobre el plano.




Para calcular el ángulo que forman, primero hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector característico del plano, o su suplementario en el caso de que no sea agudo.(Como siempre, para no tener problemas, cogemos el valor absoluto del coseno).

Pero el ángulo que buscamos es el complementario de éste, por tanto: $(r,\pi) = \alpha = 90º - \beta$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \left|\cos\left(\vec{v}, \vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\vec{v}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}}$$

- Condición de perpendicularidad de recta y plano

Una recta y un plano son perpendiculares si y sólo si el vector director de la recta y el característico del plano son proporcionales.

## 1) EJERCICIOS

1) Halla el ángulo que forman:

a) Las rectas $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+4}{2}$ y $\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{2}=z$

b) Las rectas $x=\frac{y}{2}=\frac{z-a}{3}$ y $\frac{x-1}{2}=\frac{y-b}{1}=\frac{z-c}{1}$

c) La recta $x=y=\frac{z}{2}$ con el plano z = 0

d) La recta $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ y el plano $x-3y+6z+5=0$

e) Los planos $2x+6=0$ y $3x-5y+z-1=0$

f) La recta $r:(x,y,z)=(2,1,0)+k(1,-2,4)$ y el plano $\pi: x-y+3z-1=0$ $\{\alpha=80'7º\}$

2) Calcula el valor del parámetro *k* para que los planos $\pi: 2x-6y+5=0$ y $\pi': 3x-ky+z-1=0$ sean perpendiculares e indica un vector director de la recta intersección para el valor de *k* obtenido. $\{k=-1; \vec{u}=(3,1,-10)\}$

3) Dada la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x+y+z-4=0$, hallar la ecuación de la recta proyección ortogonal de r sobre π.

4) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB donde $A(-1,0,3)$ y $B(1,4,-1)$, por su punto medio.

5) Los puntos $P=(-1,3,4)$ y $Q=(5,3,-2)$ son simétricos respecto a un plano. Calcula la ecuación de ese plano.

6) Halla el punto simétrico del punto A(2,0,1) respecto de la recta $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-1}=z-2$.

{*se calcula el plano ortogonal a la recta que contiene al punto, después el punto de corte del plano con la recta (P) y como* $\vec{AP}=\vec{PA'}$ *entonces se calcula* $\{A'=(2,4,5)\}$ }

7) Obtén la ecuación del plano que pasa por el punto P(3,5,0), es perpendicular al plano $x-y+z-3=0$ y paralelo a la recta $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases}$

8) Dada la recta $r:\begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-z-4=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+2y+3z-1=0$, se pide hallar la ecuación de una recta situada en el planoπ, que pase por el punto P(2,1,-1) y sea perpendicular a r.

9) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+3z+4=0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+5}{5}$.

10) Determina λ para que exista un plano que contenga a la recta $\begin{cases} x-2y-6z=1 \\ 2x-2y-3z=6 \end{cases}$ y que sea perpendicular al vector (-6,8,λ). Explica bien el porqué de la respuesta.

11) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,-1,1) y se apoya en las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

{ *es la recta intersección del plano que contiene a r y al punto A, con el plano que contiene a s y al punto A*}

12) Halla el punto simétrico de (-1,2,5) respecto al plano $x + 2y + z = 2$.

13) Halla la ecuación del plano σ que es perpendicular al plano $2x + y + 2z + 1 = 0$ y que contiene a la recta de ecuación $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

14) Calcula la proyección ortogonal de la recta: $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ sobre el plano $\begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = 2 - \lambda + 3\mu \\ z = 3 + 2\lambda - 2\mu \end{cases}$

15) Sean las rectas $r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$

a) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
b) Hallar la perpendicular común a las rectas r y s.

16) Dadas las rectas: $r: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \qquad s: \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{1}$

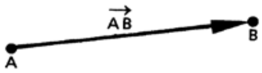
encuentra una recta bisectriz de r y s (una recta bisectriz de otras dos pasa por el punto de intersección de estas, está en el mismo plano que ellas y forma el mismo ángulo con ambas)

## 4. APLICACIONES DE LOS PRODUCTOS ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO AL CÁLCULO DE DISTANCIAS.

- <u>Distancia entre dos puntos</u>

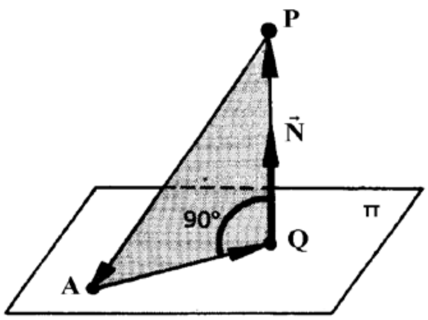
La distancia entre dos puntos $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$ se puede obtener calculando el módulo del vector $\vec{AB}$.

$$\boxed{\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}}$$




- <u>Distancia de un punto a un plano</u>

Para hallar la distancia de un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ a un plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ al que no pertenece, habría que hallar Q, punto proyección ortogonal de P sobre el plano y después calcular la distancia entre P y Q.




Esta distancia viene a ser el módulo del vector $\vec{QP}$.

Si tomamos cualquier otro punto $A(a_1,a_2,a_3)$ del plano se cumple que:

$\vec{AP}=\vec{AQ}+\vec{QP}$, si multiplicamos escalarmente esta expresión por el vector normal del plano:

$\vec{n}\cdot\vec{AP}=\vec{n}\cdot\vec{AQ}+\vec{n}\cdot\vec{QP}=\vec{n}\cdot\vec{QP}$, ya que $\vec{n}\perp\vec{AQ}$.

Además como $\vec{n}\,//\,\vec{QP}$, se tiene que:

$$\vec{n}\cdot\vec{AP}=\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{QP}\right|\cdot(\pm1) \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{n}\cdot\vec{AP}\right|=\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{QP}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{QP}\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{AP}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

Como $\vec{n}=(A,B,C)$ y $\vec{AP}=(p_1-a_1,p_2-a_2,p_3-a_3)$

$$d(P,\pi)=\left|\vec{QP}\right|=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3-Aa_1-Ba_2-Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

pero por pertenecer A al plano, cumple su ecuación:

$Aa_1+Ba_2+Ca_3+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=-Aa_1-Ba_2-Ca_3$, queda por tanto:

$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Ejemplo: Hallar la distancia entre el punto $P$(2,-1,3) y el plano $\pi\equiv 3x+2y-z+1=0$.

$$d(P,\pi)=\frac{|3\cdot2+2(-1)-3+1|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}\quad u.l.$$

- <u>Distancia entre dos planos paralelos</u>

Se halla la distancia de un punto de uno de ellos al otro plano.

- <u>Distancia entre una recta y un plano paralelos</u>

Se halla la distancia de un punto de la recta al plano.

**EJEMPLOS:**

- Calcula la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv x+y+z-1=0$ y $\pi_2 \equiv x+y+z+3=0$.

Estos dos planos son paralelos. Tomemos entonces un punto de $\pi_1$ .

Si $x=0$ e $y=0$, entonces $z=1$.

Sea $P(0,0,1)\in\pi_1$

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|1\cdot 1+3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ u.l.}$$

- Calcula la distancia entre la recta $r:\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 3x+2y+2z-1=0$.

El vector director de la recta es $\vec{v}(0,1,-1)$ y el vector normal del plano es $\vec{n}(3,2,2)$. Como $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$ entonces son paralelos.

Buscamos un punto de la recta:

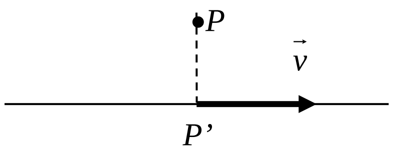
Si $z=0$, obtenemos el sistema $\begin{cases} x+y=-3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ tiene como soluciones $x=4$ e $y=-7$

Calculamos la distancia del punto $P(4,-7,0)$ al plano π.

$$d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 4+2(-7)+2\cdot 0-1|}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{17}} \text{ u.l.}$$

## Distancia de un punto a una recta

Sea una recta *r* de vector director $\vec{v}$ y un punto P exterior a la recta.
Llamamos distancia de *P* a *r* a la distancia que hay entre *P* y la proyección *P’* de *P* sobre *r*.



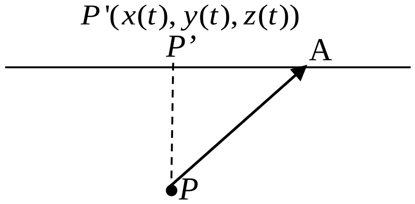

dist(*P*,*r*)=dist(*P*,*P’*)

***Métodos para hallar P’***.

1º) *P’* es la intersección de *r* y el plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*.

2º) *P’* es de forma $(x(t),y(t),z(t))$.

Sea A un punto de la recta y $\vec{v}$ su vector director. Entonces:

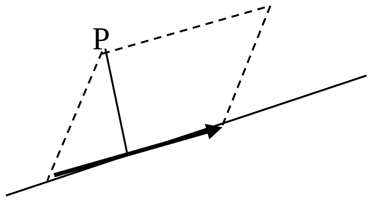



$$\overrightarrow{PP'}\perp\vec{v} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{PP'}\cdot\vec{v}=0$$

3º) Método para hallar directamente la distancia de *P* a *r*.

Sea la recta *r* determinada por el punto A y el vector director $\vec{v}$.

$d(P,r)$ = altura del paralelogramo.




$$\left.\begin{array}{l} A = b\cdot h = \left|\vec{v}\right|\cdot d(P,r) \\ A = \left|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,r) = \frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

**EJEMPLO**: Dada la recta $r: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0}$ y el punto $P(-1,2,3)$, hallar $d(P,r)$ por los tres métodos anteriores.

1º) Hallamos el plano $\pi$ tal que $\pi \perp r$ y $P \in \pi$.

$$\pi : x + 2y + k = 0 \text{ pasa por } (-1,2,3) \Rightarrow -1+4+k=0 \Rightarrow k=-3$$

Intersección del plano $\pi : x+2y-3=0$ y la recta $r: \begin{cases} x = -2+t \\ y = 2+2t \\ z = -1 \end{cases}$

$(-2+t)+2(2+2t)-3=0 \Rightarrow -2+t+4+4t-3=0 \Rightarrow t=1/5$

Por lo tanto, la proyección de *P* sobre *r* es $P'\left(\frac{-9}{5},\frac{12}{5},-1\right)$.

$$d(P,P') = \sqrt{\left(\frac{-9}{5}+1\right)^2 + \left(\frac{12}{5}-2\right)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{\frac{84}{5}} \quad u.l.$$

2º) *P’* en paramétricas es $(-2+t, 2+2t, -1)$.

Por lo tanto, $\overrightarrow{PP'} = (-1+t, 2t, -4)$ y el vector director de la recta es $(1,2,0)$. Luego:

$(-1+t)+2\cdot 2t = 0 \Rightarrow t = 1/5$

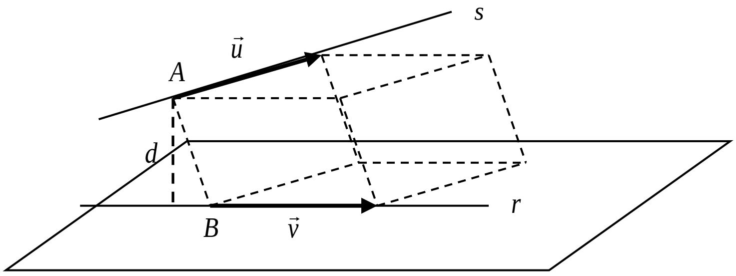
La proyección de *P* sobre *r* es $P'\left(\frac{-9}{5},\frac{12}{5},-1\right)$ y estamos en el caso anterior.

3º) $d(P,r) = \frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$, siendo $A(-2,2,-1), \vec{v}(1,2,0)$ y $P(-1,2,3)$.

$$\vec{v}\times\overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k} \qquad \left.\begin{array}{r} \left|\vec{v}\wedge\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{64+16+4} = \sqrt{84} \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,P') = \sqrt{\frac{84}{5}} u.l.$$

## ➢ Distancia entre dos rectas

La distancia entre dos rectas, *r* y *s*, $d(r,s)$ es la mínima distancia entre un punto cualquiera de *r* y un punto cualquiera de *s*.
Si las rectas son <u>coincidentes</u> o secantes, su distancia es cero.
Si las rectas son <u>paralelas</u>, su distancia se calcula tomando un punto cualquiera de una de las rectas, y calculando su distancia a la otra recta.
Si las rectas se <u>cruzan</u>:
Consideramos un punto A y un vector director $\vec{u}$ de la recta *s* y un punto B y un vector director $\vec{v}$ de la recta *r*.




Unimos los puntos A y B. El volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ y $\vec{v}$, es el valor absoluto del producto mixto de estos vectores, $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|$.

Pero, este volumen es el producto del área de la base por la altura, $V=|\vec{u}\times\vec{v}|\cdot d$ . Por lo tanto,

$$\boxed{d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}}$$

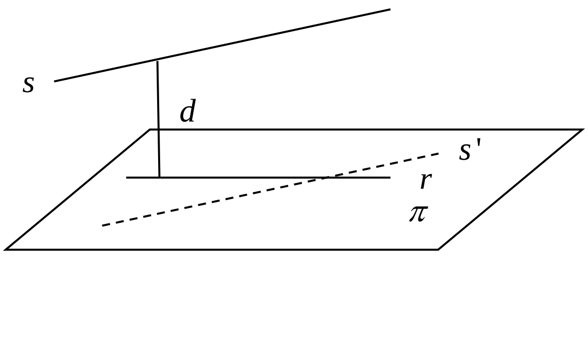
**EJEMPLO**: Dadas as rectas $r:\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1\\ z=8+2\lambda\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=4+3\mu\\ y=3-\mu\\ z=5+4\mu\end{cases}$ hallar la distancia entre ambas.

Tenemos $\overrightarrow{u_r}(1,0,2),\overrightarrow{v_s}(3,-1,4),A_r(5,-1,8),B_s(4,3,5)$ y $\overrightarrow{AB}(1,-4,3)$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_sB_r}\right]\right|=\left|\begin{vmatrix}1&0&2\\3&-1&4\\1&-4&3\end{vmatrix}\right|=|-3-24+2+16|=9\\ \left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_r}\right|=|(2,2,-1)|=3\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,s)=3u.l.$$

Hay otros métodos para hallar esta distancia:
*Vamos a verlos mediante el ejemplo anterior:*

<u>*1º método:*</u> Buscamos el plano paralelo a *s* que contiene a *r*.

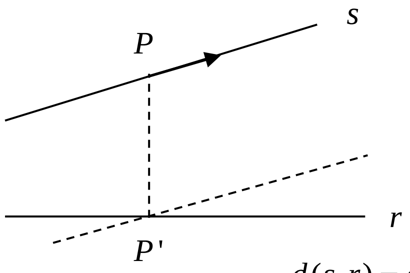



$$\pi:\begin{vmatrix}x-5&1&3\\y+1&0&-1\\z-8&2&4\end{vmatrix}=2x+2y-z=0$$

Un punto de la recta *s* es $P_s(4,3,5)$

Por lo tanto: $d(r,s)=d(P_s,\pi)=\dfrac{|2\cdot4+2\cdot3-5|}{\sqrt{4+4+1}}=3\ u.l.$

*2º método:*




$$d(s,r)=d(P,P') \text{ siendo } P(4+3\mu,3-\mu,5+4\mu) \text{ y } P'(5+\lambda,-1,8+2\lambda)$$

$\overrightarrow{PP'}$ es tal que: $\begin{cases} \overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{v_s} \\ \overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{v_r} \end{cases}$. Por lo tanto:

$$(1+\lambda-3\mu,-4+\mu,3+2\lambda-4\mu)\cdot(3,-1,4)=0$$
$$(1+\lambda-3\mu,-4+\mu,3+2\lambda-4\mu)\cdot(1,0,2)=0$$

Resolviendo el sistema al que da lugar, tenemos que: $\lambda=3$ y $\mu=2$.

Tenemos así dos puntos de la perpendicular común:

$$P_s(10,1,13) \text{ y } P_r(8,-1,14)\Rightarrow d(s,r)=d(P_s,P_r)=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3 \text{ u.l.}$$

Calculamos la perpendicular común: $\dfrac{x-8}{-2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-14}{1}$

## EJERCICIOS

1) Halla la distancia del punto P(1,0,-1)

A la recta $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ Al plano $z - y = 0$

2) Sea el plano de ecuación π: $x + 2y + 3z = 5$.

a) Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π y cuya distancia al origen sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?

b) Calcula el punto P del plano π que está más próximo al origen.

c) Sea Q el punto (1,1,1). Se sabe que los segmentos OP y OQ son dos lados de un paralelogramo. Hallar los vértices y el área de dicho paralelogramo.

3) Halla la distancia entre las siguientes rectas: $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+6}{2}$ $s: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

4) a) Determina si los puntos P(0,1,0), Q(0,0,-1), R(1,0,1) y S(1,1,1) están en el mismo plano.

b) Halla la ecuación del plano π que pasa por P, Q y R, y de la recta r que es perpendicular a π y pasa por S.

c) Halla la distancia de S a π.

5) Calcula la distancia entre las rectas r y s, siendo:

$r: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$

Obtén la ecuación de la recta perpendicular común a ambas.

6) Calcula la longitud del segmento de la recta r comprendido entre los planos α y β:

$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ $\alpha: 3x + z = 5$ $\beta: x - y - z = 0$

7) Dados el punto A(1,0,-1) y el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 4$, calcula:

a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.

b) El punto simétrico de A respecto a π.

c) Ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a π.

8) Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$\alpha: \begin{cases} x = 1 + 3t + s \\ y = -2t \\ z = t - s \end{cases}$ $\beta: x + 2y + z + 3 = 0$

Calcula la distancia entre ambos planos.

9) Pon un ejemplo de dos rectas (distintas a los ejes coordenados) que se crucen en el espacio euclídeo y calcular la distancia entre ellas.

10) Determina la distancia entre las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda + 3 \\ y = 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

11) Dada la recta *r*, determinada por los puntos $A=(-2,1,3)$ y $B=(-1,0,2)$. Calcula los puntos de *r* tales que su distancia al punto $C=(-2,3,0)$ es de $\sqrt{18}$ unidades. Calcula la distancia del punto *C* a la recta *r*. $\left\{(-3,2,4);\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{4}{3}\right);d=\frac{\sqrt{38}}{\sqrt{3}}\right\}$

12) Sea la recta r: $\begin{cases}3x+2y-z-1=0\\ x+y-1=0\end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por (0,2,2), y las coordenadas del punto P intersección de r y s.

b) Calcula la ecuación del plano π que contiene a r y a s y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.

13) Halla dos puntos de $r:\begin{cases}x=-3+p\\ y=-2\\ z=-5+p\end{cases}$ y de $s:\frac{x-6}{2}=\frac{y-11}{3}=\frac{z+2}{-2}$ que se encuentren a la mínima distancia.

14) Encuentra una recta paralela al plano $\pi:2x-5y+z-2=0$ que se halle a $2\sqrt{30}$ de distancia.

15) Encuentra los puntos de la recta $r:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$ que están a distancia 1 del plano $\pi:2x+2y+z-5=0$

## SELECTIVIDAD

***(Galicia, junio 2008)***

***A**. a) Sean $\vec{u}$ , $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=3$ , $|\vec{v}|=4$ , $|\vec{u}-\vec{v}|=5$. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Calcula el producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}]$, siendo $\vec{u}\times\vec{v}$ el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.*

*b) Dadas las rectas:* $r:\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$; $s:\begin{cases}x=1+6\lambda\\ y=4\lambda\\ z=-4\lambda\end{cases}$

*Estudia su posición relativa.*

*Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y contiene la recta r.*

***B.** a)¿Son coplanarios los puntos $A(1,0,0),B(3,1,0),C(1,1,1)$ y $D(3,0,-1)$? En caso afirmativo, calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que los contiene.*

*b) Calcula el punto simétrico del punto $P(0,0,1)$ respecto del plano $\pi:x-2y+2z-1=0$*

***(Galicia, septiembre 2008)***

***A**. a) Calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que pasa por el punto* $P(1,1,2)$ *y es perpendicular a la recta* $r:\begin{cases} 4x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

*b) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección del plano* $\pi: x-2y+2z-3=0$ *con los ejes de coordenadas. ¿Es un triángulo rectángulo?*

***B**. a) Dados los planos* $\pi_1: x-2y+2z-1=0$ *;* $\pi_2:\begin{cases} x=3+2\lambda+2\mu \\ y=\quad 2\lambda-2\mu \\ z==1+\lambda-3\mu \end{cases}$

*estudia su posición relativa y calcula la distancia entre ellos.*

*b) Dado el punto* $P(2,1,7)$*, calcula su simétrico respecto al plano* $\pi_2$ *.*

***(Galicia, junio 2009)***

***A.** Sea r la recta que pasa por los puntos* $P(0,8,3)$ y $Q(2,8,5)$ *y s la recta* $s:\begin{cases} x-y+7=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$*;*

*a) Estudia la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte.*

*b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano que contiene a r y a s.*

***B.** Sea* $\pi$ *el plano que pasa por los puntos* $A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0)$ *y r la recta dada por* $r: \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+6}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$

*a) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano* $\pi$. *Calcula el punto de intersección de r y* $\pi$.

*b) Calcula los puntos de la recta r que distan 6 unidades del plano* $\pi$.

***(Galicia, septiembre 2009)***

***A**. Dados los planos* $\pi_1: x+y+z-1=0$*;* $\pi_2: y-z+2=0$ *; y la recta* $r: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

*a) Calcula el ángulo que forman* $\pi_1$ *y* $\pi_2$. *Calcula el ángulo que forman* $\pi_1$ *y r.*

*b) Estudia la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos* $\pi_1$ *y* $\pi_2$.

***B**. a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(2,3,5)$ *y es perpendicular al plano* $\pi:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=\quad 2+2\lambda+\mu \\ z==2+3\lambda+\mu \end{cases}$

*b) Calcula la distancia d del punto* $P(2,3,5)$ *al plano* $\pi$. *Calcula el punto de* $\pi$ *que está más próximo al punto* $P(2,3,5)$.

***(Galicia, junio 2010)***

***A**. Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,-1,-2)$ y es perpendicular al plano $\alpha: x+2y+3z+6=0$. Sea s la recta que pasa por los puntos $A(1,0,0)$ y $B(-1,-3,-4)$*

*a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte.*

*b) Calcula la distancia del punto $A(1,0,0)$ al plano β que pasa por el punto $P(1,-1,-2)$ y es paralelo a $\alpha$.*

***B**. Dada la recta $r: \begin{cases} y=1 \\ x-z+4=0 \end{cases}$*

*a) Calcula la ecuación del plano $\alpha$ que pasa por el punto $Q(0,2,2)$ y contiene a la recta r. Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección de $\alpha$ con los ejes de coordenadas.*

*b) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\alpha$.*

***(Galicia, septiembre 2010)***

***A**. Dada la recta r: $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 3x+5y+3z-7=0 \end{cases}$*

*a) Calcula la ecuación general del plano $\pi$ perpendicular a r y que pasa por el punto $P(2,-1,-2)$.*

*b) Calcula el punto Q en el que r corta a $\pi$. Calcula el ángulo que forma el plano $\pi$ con cada uno de los planos coordenados.*

***B**. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x=3-3\lambda \\ y=-4\lambda \\ z=-6 \end{cases}$ ; $s: \begin{cases} 4x-3y-12=0 \\ 5y-4z-4=0 \end{cases}$*

*a) Estudia la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte y el ángulo que forman r y s.*

*b) Calcula, si existe, el plano que las contiene.*

***(Galicia, junio 2011)***

***A**. a) ¿Son coplanarios los puntos $A(1,0,2), B(0,-1,1), C(-1,-2,0)$ y $D(0,2,2)$? Si existe, calcula la ecuación del plano que los contiene.*

*b) Calcula la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que es perpendicular al plano $\alpha: 2x+y-3z+4=0$ y contiene la recta que pasa por los puntos $P(-1,1,2)$ y $Q(2,3,6)$*

***B**. a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,-3)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ 3x-z+1=0 \end{cases}$*

*b) Calcula la distancia d del punto $Q(-1,0,-2)$ al plano $\beta: x-2y+3z+12=0$. Calcula, si existe, otro punto de la recta que también diste d del plano $\beta$*

***(Galicia, junio 2012)***

**A.** *Dados los puntos* $A(3,0,2), B(1,-2,0), C(1,-1,3)$ y $D(\lambda, \lambda-2, -\lambda)$.*Determina el valor de* $\lambda$ *para que A, B, C y D sean coplanarios. ¿Para algún valor de* $\lambda$ *son A, B, C y D vértices consecutivos de un paralelogramo?*
*Calcula las ecuaciones paramétricas del plano* $\pi$ *que pasa por el punto C y es perpendicular a la recta r que pasa por los puntos A y B.*

**B**. *a) Si* $|\vec{v}| = 6, |\vec{w}| = 10$ *y* $|\vec{v} + \vec{w}| = 14$, *calcula el ángulo que forman los vectores* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$.
*b) Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos* $A(-1,5,0)$ y $B(0,1,1)$ *y es paralelo a la recta:* $r: \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$

***(Galicia, septiembre 2012)***

**A.** *Dado el plano* $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$
*a) Calcula el área del triángulo de vértices los puntos corte de* $\pi$ *con los ejes de coordenadas.*
*b) Calcula la ecuación general del plano que es perpendicular al plano* $\pi$, *paralelo a la recta que pasa por los puntos* $B(0,3,0)$ y $C(0,0,-2)$ *y pasa por el origen de coordenadas.*
*c) Calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano* $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

**B.** *a) Estudia la posición relativa de los planos* $\pi_1: x + y + z - 5 = 0,\ \pi_2: \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$
*Si se cortan en una recta, escribe sus ecuaciones paramétricas.*
*b) Calcula la ecuación del plano* $\pi_3$, *que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a* $\pi_1$ *y* $\pi_2$. *Calcula la intersección de* $\pi_1, \pi_2$ *y* $\pi_3$.

***(Galicia, junio 2013)***

**A.** *Dados el plano* $\pi: x + y - z - 1 = 0$ *y la recta* $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$
*a) Estudia la posición relativa de r y* $\pi$. *Calcula la distancia de r a* $\pi$
*b) Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a* $\pi$.

**B.** *a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano* $\pi$ *determinado por los puntos A(1,0,2), B(2,1,3) y C(3,0,0).*
*b) Calcula los posibles valores de a para que el punto P(a,a,a) equidiste de la recta r y del plano* $\pi$ *del apartado anterior.*

***(Galicia, septiembre 2013)***

**A.** *Dadas las rectas* $r:\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ 2y-z-2=0 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=2+2t \end{cases}$

*a) Estudia la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte. Si determinan un plano, calcula la ecuación general o implícita de ese plano.*
*b) Estudia la posición relativa de r y el plano* $\pi: 4x-4y+2z+7=0$. *Calcula la distancia de r a* $\pi$.

**B.** *a) Dado el plano* $\alpha:\begin{cases} x=3+3\lambda+\mu \\ y=-3\lambda+\mu \\ z=3+\lambda-\mu \end{cases}$ *calcula las ecuaciones en forma continua de la reta r que pasa por el punto* $P(2,-3,-4)$ *y es perpendicular al plano α. Calcula el punto de corte de r con α.*

*b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos* $P(2,-3,-3)$ y $\mathrm{Q}(3,-2,-4)$ *y es perpendicular al plano α.*

*c) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta intersección del plano* $\beta: 5x-4y+z-19=0$ *con el plano α.*

***(Galicia, junio 2014)***

**A.** *a) Calcula el punto simétrico del punto* $P(-2,0,2)$ *respecto al plano* $\pi: 3x+2y+z-3=0$

*b) Sea r la recta perpendicular al plano* $\pi: 3x+2y+z-3=0$ *y que pasa por el punto* $P(-2,0,2)$. *Consideremos la recta* $s:\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ x-z-10=0 \end{cases}$ *.Estudia la posición relativa de r y s. Calcula la ecuación del plano paralelo a s que contiene a r.*

**B.** *a) Define el producto vectorial de dos vectores. Dados los vectores* $u=(2,2,0)$, $v=(1,1,-1)$ *, calcula los vectores unitarios y perpendiculares a los dos vectores u y v.*

*b) Calcula el valor de* $\alpha$ *para que la recta* $r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4}$ *no corte al plano* $\pi: 5x+\alpha y+4z=5$. *Para ese valor de* $\alpha$ *, calcula la distancia de la recta al plano.*