BLOQUE 2:

ÁLGEBRA

- *Ecuaciones, inecuaciones y sistemas*

1. ÁLGEBRA

2.1 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS:

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS: la divisibilidad en el conjunto de polinomios es muy similar a la divisibilidad entre números enteros.

- Un polinomio P(x) **es divisible** por otro polinomio Q(x) cuando el cociente P(x):Q(x) es exacto. En ese caso, P(x):Q(x)=C(x). Y, por tanto, P(x)= Q(x)·C(x).

  Por ejemplo:

  $$\left(3x^3-14x^2+4x+3\right):\left(3x+1\right)=x^2-5x+3 \Rightarrow \left(3x^3-14x^2+4x+3\right)=\left(3x+1\right)\cdot\left(x^2-5x+3\right)$$

- Un polinomio se dice que es **irreducible** cuando ningún polinomio de grado inferior a él es divisor suyo. Por ejemplo, son polinomios irreducibles:

  Los de primer grado: $x, 2x-1, \ldots$; los de segundo grado sin raíces: $x^2+1, 2x^2-3x+5, \ldots$

- Un polinomio de segundo grado con raíces a y b se puede descomponer en forma de producto: k·(x-a)·(x-b). Por ejemplo: $5x^2+5x-60=5(x-3)\cdot(x+4)$

- Cualquier otro polinomio se puede descomponer en producto de polinomios irreducibles. Por ejemplo: $3x^4+3x^3-33x^2+3x-36=3(x-3)\cdot(x+4)\cdot\left(x^2+1\right)$

PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO: en caso de que sepamos factorizar un polinomio, nos podemos valer de los siguientes procedimientos:

- Siempre que se pueda, sacaremos la x como factor común.

- Si el polinomio es de grado 2, bastará resolver la ecuación de segundo grado que resulta de igualar dicho polinomio a cero para obtener sus raíces y descomponerlo en forma de producto. Por ejemplo: $5x^2+5x-60=5(x-3)\cdot(x+4)$

- La regla de Ruffini nos permite localizar las raíces enteras de un polinomio, pues:

  - Si los coeficientes de P(x) son números enteros, las raíces enteras de P(x) son divisores de su término independiente.

  - Si P(a)=0, entonces, P(x) = (x – a)· Q(x)

Por ejemplo: $x^6-15x^4-42x^3-40x^2=x^2\cdot(x+2)\cdot(x-5)\cdot\left(x^2+3x+4\right)$

- Si un polinomio de grado mayor que 2 no tiene raíces enteras, es poco probable que podamos descomponerlo con los conocimientos que poseemos.

2.2 FRACCIONES ALGEBRAICAS:

DEFINICIÓN: Se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios: $\frac{P(x)}{Q(x)}$

SIMPLIFICACIÓN: Si el numerador y denominador de una fracción algebraica se puede dividir por un mismo polinomio (de grado mayor o igual que 1), al hacerlo se simplifica la fracción.

Por ejemplo:

$$\frac{x^2-3x}{3x^3-2x^2-21x}=\frac{x.(x-3)}{3x.\left(x+\frac{7}{3}\right).(x-3)}=\frac{1}{\left(x+\frac{7}{3}\right)\cdot 3}$$

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS: para sumar (o restar) fracciones algebraicas, se reducen a común denominador y se suman (o restan) sus numeradores.

Por ejemplo: $$\frac{x+7}{x}+\frac{x-2}{x^2+x}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{(x+7).(x+1)+(x-2)-(2x-1).x}{x.(x+1)}=\frac{-x^2+10x+5}{x^2+x}$$

PRODUCTO DE FRACCIONES ALGEBRAICAS: el producto de dos o más fracciones algebraicas, es el producto de sus numeradores partido del producto de sus denominadores.

Por ejemplo: $$\frac{(3x+1)}{x-1}\cdot\frac{x^2+x}{x+1}=\frac{(3x+1).(x^2+x)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(3x+1).x.(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(3x+1).x}{(x-1)}=\frac{3x^2+x}{x-1}$$

COCIENTE DE DOS FRACCIONES ALGEBRAICAS: el cociente de dos fracciones algebraicas es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

Por ejemplo: $$\frac{x^2-2x+2}{x-1}:\frac{3x-2}{x^2}=\frac{(x^2-2x+2).x^2}{(x-1)\cdot(3x-2)}=\frac{x^4-2x^3+2x^2}{3x^2-5x+2}$$

2.3 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES:

ECUACIONES DE 2º GRADO, $ax^2+bx+c=0$: Las soluciones se obtienen aplicando la siguiente fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \begin{cases} si\quad b^2-4ac>0 \quad \Rightarrow la\ ecuación\ tendrá\ dos\ soluciones \\ si\quad b^2-4ac=0 \quad \Rightarrow la\ ecuación\ tendrá\ una\ solucion\ doble \\ si\quad b^2-4ac<0 \quad \Rightarrow la\ ecuación\ no\ tendrá\ ninguna\ solución \end{cases}$$

Cuando en una de estas ecuaciones, b=0 o c=0, la ecuación se llama incompleta y se puede resolver de forma sencilla sin necesidad de aplicar la fórmula:

- Si b=0, es decir, $ax^2+c=0$; para resolverla despejamos x.
- Si c=0, es decir, $ax^2+bx=0 \Rightarrow x.(ax+b)=0$; y por tanto las soluciones son x=0 y x = -b/a

ECUACIONES BICUADRADAS, $ax^4+bx^2+c = 0$: Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar. Para resolverlas efectuamos un cambio de variable $y = x^2$ y así

$$ax^4+bx^2+c = 0 \Rightarrow ay^2+by+c = 0$$

además, hay que recordar que para cada valor positivo de y, habrá dos valores de x: $x = \pm\sqrt{y}$

ECUACIONES CON RADICALES: para resolver una ecuación en la que la incógnita se encuentre bajo una raíz cuadrada se siguen los siguientes pasos:

- Se aísla la raíz cuadrada que queremos eliminar en uno de los miembros
- Se elevan ambos miembros al cuadrado

En este proceso pueden aparecer soluciones falsas que deberemos eliminar; por eso, en estas ecuaciones es fundamental comprobar todas las soluciones.

Por ejemplo:

$$x+3\sqrt{x+1}=17$$
$$3\sqrt{x+1}=17-x$$
$$(3\sqrt{x+1})^2=(17-x)^2$$
$$9(x+1)=289-34x+x^2$$
$$x^2-43x+280=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=8 \\ x_2=35 \end{cases}$$

Comprobamos la solución

$$x=8 \rightarrow 8+3\sqrt{8+1}=17 \rightarrow 17=17$$
$$x=35 \rightarrow 35+3\sqrt{35+1}=17 \rightarrow 53 \neq 17$$

ECUACIONES CON x EN EL DENOMINADOR: los denominadores se eliminarán igual que en otros casos multiplicando por el mínimo común múltiplo; pero también podremos llegar a soluciones falsas (aquellas que hacen cero un denominador) que deberemos rechazar. Por eso será indispensable comprobar todas las soluciones.

Por ejemplo:

$$\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{1}{x}$$
$$m.c.m(x-1,x)=x(x-1)$$
$$\frac{x(x+1)}{x(x-1)}-\frac{x(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x-1}{x(x-1)}$$
$$x^2+x-x^2+x=x-1$$
$$x=-1$$

Comprobamos la solución

$$\frac{-1+1}{-1-1}-1=\frac{1}{-1} \Rightarrow -1=-1$$

FACTORIZACIÓN DE ECUACIONES: son aquellas de la forma: (x-a)(x-b).....(x-c) = 0 Para calcular la solución hay que igualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones resultantes.

Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&-x(x-1)(x^2-2)=0\\
&-x=0 \Rightarrow x=0\\
&x-1=0 \Rightarrow x=1\\
&x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ECUACIONES EXPONENCIALES: son aquellas en las que la incógnita está en el exponente. Tendremos varias formas de resolverlas según sea el caso:

- Expresar ambos miembros como una potencia de la misma base
- Usar logaritmos para eliminar la incógnita del exponente
- Utilizar un cambio de variable (en el caso de que haya sumas y restas)

ECUACIONES LOGARITMICAS: son aquellas en las que la incógnita está en una expresión afectada por algún logaritmo. Se resuelven teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos; además, es conveniente comprobar las soluciones sobre la ecuación inicial, teniendo en cuenta que sólo existe el logaritmo de números positivos.

2.4 ***SISTEMAS DE ECUACIONES:***

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de las que pretendemos encontrar la solución o soluciones en común.

Para resolver un sistema de ecuaciones tenemos varios métodos:

- Gráficamente: representamos la ecuaciones en un plano y la soluciones serán los puntos que tengan en común
- Por el método de sustitución: despejando una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituyendo el resultado obtenido en el resto hasta llegar a una ecuación con una sola incógnita.
- Por el método de igualación: despejamos la misma incógnita en dos ecuaciones e igualamos los resultados obtenidos
- Por el método de reducción: multiplicamos las ecuaciones por algún número de modo que al sumarlas una de las incógnitas desaparezca.

2.5 *MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES:*

Consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales en uno triangular muy fácil de resolver. Veámoslo con unos ejemplos:

- Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x-3y+4z=21 \\ 3x+y-z=-18 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a)\\ (2^a)-3\cdot(1^a)\\ (3^a)-2\cdot(1^a)}} \begin{cases} x-3y+4z=21 \\ 10y-13z=-81 \\ 5y-5z=-30 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a)\\ (2^a)-2\cdot(3^a)\\ (3^a):5}} \begin{cases} x-3y+4z=21 \\ -3z=-21 \\ y-z=-6 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} z=7 \\ y=1 \\ x=-4 \end{cases}}$$

Suprimimos x de la 2ª y 3ª ecuación

Suprimimos y de la 2ª ecuación

- Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-z=9 \\ 3x+y-2z=13 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a)+2\cdot(3^a)\\ (2^a)\\ (3^a)}} \begin{cases} 7x-3z=29 \\ 2x-z=9 \\ 3x+y-2z=13 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a)-3\cdot(2^a)\\ (2^a)\\ (3^a)}} \begin{cases} x=2 \\ 2x-z=-9 \\ 3x+y-2z=13 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2 \\ z=-5 \\ y=-3 \end{cases}}$$

Puesto que la 2ª ecuación no tiene y, lo suprimimos también de la 1ª

Es más fácil eliminar z que x ya que el coeficiente de z en la 2ªecuación es -1

- Ejemplo 3:

$$\begin{cases} 5x+2y-3z=-1 \\ 2x+3y-4z=-6 \\ 6x-4y+z=8 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a)+3\cdot(3^a)\\ (2^a)+4\cdot(3^a)\\ (3^a)}} \begin{cases} 23x-10y=23 \\ 26x-13y=26 \\ 6x-4y+z=8 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a)\\ (2^a):13\\ (3^a)}} \begin{cases} 23x-10y=23 \\ 2x-y=2 \\ 6x-4y+z=8 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a)-10\cdot(2^a)\\ (2^a)\\ (3^a)}} \begin{cases} 3x=3 \\ 2x-y=2 \\ 6x-4y+z=8 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}}$$

Para suprimir z de las ecuaciones 1ª y 2ª

Para hacer más pequeños los coeficientes de la 2ª ecuación

Para suprimir y de la 1ª ecuación

- Ejemplo 4 (SISTEMA INCOMPATIBLE, sin solución):

$$\begin{cases} 3x+2y-2z=4 \\ 4x+y-z=7 \\ x+4y-4z=0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a)-2\cdot(2^a)\\ (2^a)\\ (3^a)-4\cdot(2^a)}} \begin{cases} -5x=-10 \\ 4x+y-z=7 \\ -15x=-28 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1^a):(-5)\\ (2^a)\\ (3^a)-3\cdot(1^a)}} \begin{cases} x=2 \\ 4x+y-z=7 \\ 0x=2 \end{cases} \rightarrow$$

LLEGAMOS A UN ABSURDO. POR LO TANTO EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN. ¡ES INCOMPATIBLE!

Para suprimir y de la 1ª y 3ª ecuación. Resulta que también desaparece la z

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo 0x + 0y + 0z = k (k$\neq$0), entonces el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

- Ejemplo 5 (SISTEMA INDETERMINADO, con infinitas soluciones):

La 3ª ecuación no nos dice nada. La suprimimos y nos quedamos con las otras dos.

$$\begin{cases}3x+2y-2z=4\\ 4x+y-z=7\\ x+4y-4z=-2\end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1^a)-2\cdot(2^a)\\ (2^a)\\ (3^a)-4(2^a)\end{smallmatrix}} \begin{cases}-5x=-10\\ 4x+y-z=7\\ -15x=-30\end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1^a):(-5)\\ (2^a)\\ (3^a)-3(1^a)\end{smallmatrix}} \begin{cases}x=2\\ 4x+y-z=7\\ 0x=0\end{cases} \to \begin{cases}x=2\\ 4x+y-z=7\end{cases}$$

$$\to\ 8+y-z=7 \ \to\ y=z-1$$

$$\boxed{\begin{cases}x=2\\ y=z-1\end{cases} \quad \text{¡}\mathit{Para\ cada\ valor\ de\ z\ hay\ una\ solución}\text{!}}$$

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo 0x + 0y + 0z = 0, se suprime. Si quedan menos ecuaciones que incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones. Se trata de una sistema indeterminado.

2.6 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES:

Es un conjunto de dos o más ecuaciones donde alguna de ellas no es lineal, como pueden ser las ecuaciones de grado mayor que 1, ecuaciones con fracciones algebraicas o con radicales.

Por ejemplo:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=17\\ 2x+2y=46\end{cases} \to \begin{cases}x^2+y^2=289\\ x+y=23\end{cases} \to y=23-x \to x^2+(23-x)^2=289 \to$$

$$2x^2-46x+240=0 \to \begin{cases}x_1=8\\ x_2=15\end{cases}$$

Para x = 8 y = 15 Para x = 15 y = 8

2.7 INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA:

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas (se trata de desigualdades en las que se usan los signos <, ≤ , > o ≥ .

Por ejemplo:

$$2x+1<7; \quad x^2-5x+4\le 0; \quad \sqrt{x+3}\ge 5; \quad \begin{cases}3x-9<0\\ 2x+4\ge 0\end{cases}$$

La solución de una inecuación son los valores de x con los que se cumple la desigualdad.

La solución de un sistema de inecuaciones es una solución común a todas sus inecuaciones. Habitualmente tienen infinitas soluciones que se agrupan en intervalos de R.

INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA: para resolver una inecuación lineal con una incógnita se procede igual que si resolviéramos una ecuación, pero teniendo en cuenta las desigualdades. Sus soluciones son todos los puntos de un intervalo infinito.

Las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita pueden formar un intervalo, finito o infinito, o pueden no existir.

Por ejemplo:

$2x - 30 \leq 5x + 3 \rightarrow -3x \leq 33 \rightarrow x \geq -11$ Solución: $[-11, +\infty)$

INECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA:

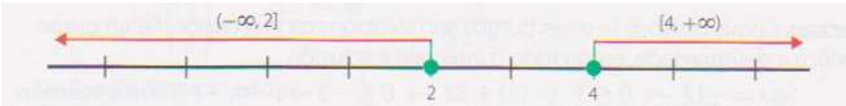
Las soluciones de las inecuaciones $ax^2 + bx + c < 0$ dependen de la posición de la parábola respecto al eje x y del signo de la inecuación.

Por ejemplo:

$$x^2 - x + 4 \geq 5x - 4$$

$$x^2 - 6x + 8 \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Representamos las soluciones en la recta y comprobamos que intervalo o intervalos cumple la inecuación:



La solución es: $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

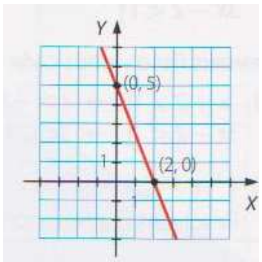
2.8 ***<u>INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS</u>***

En cada una de ellas, el conjunto de soluciones es el semiplano que está a uno de los lados de la recta ax+by+c=0. Cuando en la desigualdad está incluido el "igual", los puntos de la recta son también soluciones

Por ejemplo:

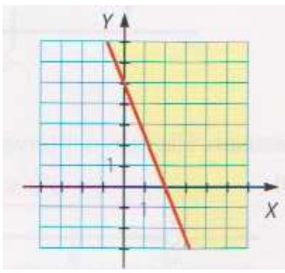
$$5x + 2y > 10$$

Representamos la recta 5x + 2y = 0 en el plano



Consideramos un punto que pertenezca a uno de los semiplanos en los que queda dividido el plano, por ejemplo el (0, 0) y comprobamos si verifica la inecuación, en caso afirmativo, toda la región es la solución, en caso contrario, marcamos el otro semiplano.

$$5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \not> 10$$



2.9 ***SISTEMAS DE INECUACIONES***

Se resuelve por separado cada una de las inecuaciones y luego se eligen las soluciones comunes.

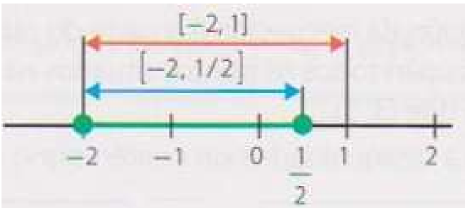
CON UNA INCÓGNITA:

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + x \leq 2 \\ 2x^2 + 3x \leq 2 \end{cases}$$

Resolvemos $x^2 + x \leq 2 \rightarrow [-2,1]$ y $2x^2 + 3x \leq 2 \rightarrow \left[-2, \frac{1}{2}\right]$

Calculamos la intersección de ambos intervalos



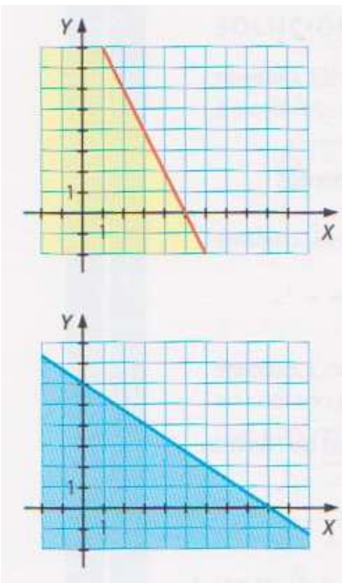
La solución es $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$

CON DOS INCÓGNITAS:

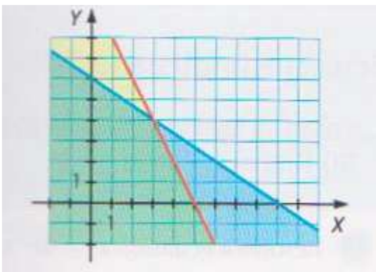
Por ejemplo:

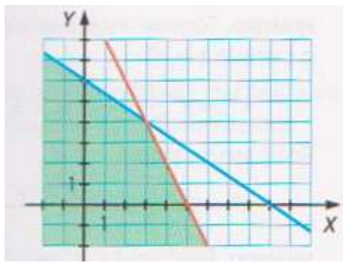
$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

Representamos la parte del plano que es solución de cada una de las inecuaciones y la solución será la parte común a ambas.



$\rightarrow$





EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa como cuadrado de un binomio o como producto de una suma por una diferencia (recuerda las identidades notables) .

a. $x^2+10x+25$ d. x^2-1 g. $x^2-\frac{1}{9}$

b. $9x^2-12x+4$ e. $25x^2+4+20x$

c. $4x^2-9$ f. $9x^2-16$ h. $4x^2+2x+\frac{1}{4}$

2. Sacando factor común y utilizando los productos notables, factoriza al máximo los siguientes polinomios :

a) $x^4+2x^3+x^2$ b) x^3-2x^2+x c) $3x^3+12x^2+12x$
d) $3x^3-3x$ e) x^4-9x^2 f) x^3-6x^2+9x

3. Factoriza los siguientes polinomios :

a) $2x^3-2x$; b) x^2-6x+5 ; c) $3x^2+5x-2$; d) x^3+12x^2+35x

e) x^3+2x^2-4x-8 ; f) $2x^3+7x^2-4x$; g) x^3-2x^2+3x-6

4. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas :

a) $\frac{3x^3-9x^2}{3x^3-6x^2}$ b) $\frac{2x^2+10x}{3x^2+15x}$ c) $\frac{x^2-2x}{x^3-4x^2+4x}$

d) $\frac{x^3-x}{x^4+2x^3+x^2}$ e) $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$ f) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-3x-4}$

5. Efectúa y simplifica :

a) $\frac{x}{2x+4}\cdot\frac{3x+6}{x}$ b) $\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x}$ c) $\frac{x-2}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x^2-2x}$

d) $\frac{8x}{x+3}:\frac{4x^2}{x+3}$ e) $\frac{3x+6}{x^2-2x+1}:\frac{6x+12}{x^2-1}$ f) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right):\frac{x}{x+1}$

g) $\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right):\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$ h) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

6. Simplifica:

a. $\dfrac{x^3-4x}{x^2-2x}$

b. $\dfrac{4x-12}{x^3-7x^2+16x-12}$

c. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$

d. $\dfrac{x^4}{x^3+3x^2}$

e. $\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^3-4x^2-5x}$

f. $\dfrac{x^3-x}{x^4+2x^3+x^2}$

7. Efectúa las siguientes sumas:

a. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{3}{10}$

b. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}-3$

c. $\dfrac{4}{x}+\dfrac{2.(x+1)}{3.(x-2)}-4$

d. $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{3}{2}$

e. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}$

f. $\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-\dfrac{26}{25}$

8. Calcula:

a. $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

b. $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

c. $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

d. $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

9.1) $2x-\dfrac{19-2x}{2}=\dfrac{2x-11}{2}$ $\qquad\{2\}$

9.2) $\dfrac{10x+3}{3}-\dfrac{3x-1}{5}=x-2$ $\qquad\left\{-\dfrac{24}{13}\right\}$

9.3) $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{x-8}{12}=\dfrac{5-x}{4}-\dfrac{x}{3}$ $\qquad\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

9.4) $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{x-8}{12}=\dfrac{5-x}{4}-\dfrac{x}{3}$ $\qquad\left\{\dfrac{25}{12}\right\}$

9.5) $\dfrac{3x-11}{20}-\dfrac{5x+1}{14}=\dfrac{x-7}{10}-\dfrac{5x-6}{21}$ $\qquad\{-3\}$

9.6) $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{3}-\dfrac{x-\frac{2}{3}}{4}=\dfrac{2-x}{6}-\dfrac{\frac{x}{2}-3}{12}$ $\qquad\{2\}$

9.7) $(x-2)^2-(x-1)(x+1)-\frac{x-2}{3}=\frac{1}{2}(x+2)$	$\left\{\frac{28}{29}\right\}$
9.8) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(2x-1)^2}{16}=\frac{35}{16}$	$\{0\}$
9.9) $\frac{1}{2}\left[1-(x+2)^2\right]=-x-\frac{x^2-1}{2}$	$\{-2\}$
9.10) $\left\lvert\frac{x-3}{2}\right\rvert=4$	$\{11,-5\}$
9.11) $\lvert 2x-3\rvert=\lvert x+4\rvert$	$\left\{7,-\frac{1}{3}\right\}$
9.12) $\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=3$	$\{3\}$
9.13) $\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x-1}=\frac{2(x-3)}{x^2-1}$	$\left\{-\frac{1}{3}\right\}$
9.14) $\frac{2(3x+4)}{x^2-4}-\frac{x+3}{x-2}=\frac{4-x}{x+2}$	$\{$*no* tiene $\}$
9.15) $\frac{x}{2}-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{x^3-1}{2(x^2-1)}$	$\{-11\}$
9.16) $\frac{x-1}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-2x}=\frac{x}{x^2-4}$	$\left\{-\frac{2}{5}\right\}$
9.17) $\frac{(x-1)^2-(x-2)^2}{x^2-1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1}{x+1}$	$\left\{\frac{1}{2}\right\}$
9.18) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{1-2x}{x^2-x-6}=0$	$\left\{-\frac{4}{3}\right\}$
9.19) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x-7}{x-1}=4-\frac{3x-1}{x+2}$	$\left\{5,-\frac{5}{4}\right\}$
9.20) $\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{4}{x^2-8x+12}$	$\{-1\}$
9.21) $\frac{x-4}{x^2-5x}-\frac{2}{x^2-25}=0$	$\{-4\}$

9.22) $\dfrac{x+2}{x\ \ +3}+\dfrac{3}{x^2+6x+9}=1$ $\{0\}$

9.23) $x^2+x-6=0$ $\{2,-3\}$

9.24) $9x^2+6x+1=0$ $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

9.25) $5x^2-7x+3=0$ $\{no$ tiene $\}$

9.26) $6x^2-54=0$ $\{3,-3\}$

9.27) $3x^2-21x=0$ $\{0,7\}$

9.28) $5x^2+45=0$ $\{no$ tiene $\}$

9.29) $x^2+x+1=0$ $\{no$ tiene $\}$

9.30) $x^2-10x+25=0$ $\{5\}$

9.31) $\dfrac{2x^2-1}{2}-\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{1-x}{6}$ $\left\{\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{2}\right\}$

9.32) $5(x-1)(x+1)=5x^2-5$ R

9.33) $3(x+1)(x-1)=3x^2-2$ $\{no$ tiene $\}$

9.34) $\dfrac{4x^2-12x+8}{x-1}=4x-8$ **R**-$\{1\}$

9.35) $2+\dfrac{12}{x-3}=x+3$ $\{-3,5\}$

9.36) $\dfrac{6}{x}+\dfrac{x+1}{x-2}=6$ $\left\{3,\dfrac{4}{5}\right\}$

9.37) $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{26}{35}$ $\left\{6,-\dfrac{8}{13}\right\}$

9.38) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{13}{6}$ $\{-3,2\}$

9.39) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{x-2}{x+3}$ $\{-1,-6\}$

9.40) $\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{x^2-9}{4}=\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{1}{5}$ $\{-1,-3\}$

9.41) $\left|x^2-3x\right|=4$ $\{4,-1\}$

9.42) $\left|x^2-3x+1\right|=1$ $\{0,3,2,1\}$

9.43) $\left|x^2-x\right|=\left|1-x^2\right|$ $\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$

9.44) $x^4-10x^2+9=0$ $\{1,-1,3,-3\}$

9.45) $x^4-2x^2-3=0$ $\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

9.46) $3x^4-75x^2=0$ $\{0,5,-5\}$

9.47) $\frac{x}{8}-\frac{2}{81x^3}=0$ $\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}$

9.48) $x^6+7x^3-8=0$ $\{1,-2\}$

9.49) $x^{10}+31x^5-32=0$ $\{1,-2\}$

9.50) $x^8-97x^4+1296=0$ $\{2,-2,3,-3\}$

9.51) $34-x^2=\frac{225}{x^2}$ $\{5,-5,3,-3\}$

9.52) $\frac{x^2-32}{4}+\frac{28}{x^2-9}=0$ $\{4,-4,5,-5\}$

9.53) $\frac{2}{x^2-9}-\frac{x^2-16}{72}=0$ $\{0,5,-5\}$

9.54) $x(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$ $\left\{0,1,-2,\frac{1}{3}\right\}$

9.55) $x^5-81x=0$ $\{0,3,-3\}$

9.56) $\frac{3x}{5}+\frac{25}{9x^2}=0$ $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

9.57) $x^3+3x^2-x-3=0$ $\{1,-1,-3\}$

9.58) $3x^3+4x^2+4x+3=0$ $\{-1\}$

9.59) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ $\{0, -2, 5\}$

9.60) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$ $\{1, -1, 2, 3\}$

9.61) $x - \sqrt{x} = 6$ $\{9\}$

9.62) $3x - 1 = 1 + \sqrt{3x}$ $\left\{\frac{4}{3}\right\}$

9.63) x=$\sqrt{4x+13} - 2$ $\{3\}$

9.64)x+$\sqrt{x-3} = 5$ $\{4\}$

9.65) $3\sqrt{6x+1} - 5 = 2x$ $\left\{8, \frac{1}{2}\right\}$

9.66) 18-$\sqrt{x+10} = 2$ $\{246\}$

9.67) $(x^2 + 3x + 7)^{\frac{1}{2}} = 5$ $\{-6, 3\}$

9.68) $\sqrt{2x} - \sqrt{x+1} = 1$ $\{8\}$

9.69) $\sqrt{9-3x} + 2 = \sqrt{x+1}$ $\{3\}$

9.70) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$ $\{5, 1\}$

9.71) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} = 2$ $\{no$ tiene $\}$

9.72) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{3x-12} = \sqrt{5x-16}$ $\{4\}$

9.73) $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13 - x}$ $\{9\}$

10. Calcula m para que la ecuación 3 x^2 -8x-3m = 0 tenga las dos soluciones iguales (raíz doble)

11. Las raíces (soluciones) de la ecuación 5 x^2 + bx + c = 0 son -1 y $\frac{2}{5}$. Halla b y c.

12. Dada la ecuación 3 x^2 -2x-1=0 , obtener otra ecuación cuyas raíces sean :

    a. Opuestas a las de la ecuación dada.

    b. Inversas de las de la ecuación dada.

    c. Cuadrado de las mismas.

13. Halla dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 182.

14. Obtén una ecuación de tercer grado cuyas raices sean 0,-2 y 2.

15. Obtén una ecuación bicuadrada cuyas raices sean $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -3 y 3.

16. Halla un número sabiendo que su tercera parte menos su raiz cuadrada es igual a 6 .

17. Halla los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 1 cm más que la base y la altura 1 cm menos que dicha base .

18. Dentro de 11 años la edad de Pablo será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pablo.

19. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a. $5^x = \dfrac{1}{125}$

b. $\sqrt{5^x} = 625$

c. $3^{5x+6} = \dfrac{1}{81}$

d. $27^{2x+3} = 9^{x-1}$

e. $9 \cdot 3^{-x+1} = 81$

f. $4 \cdot 5^{2x-1} = 500$

g. $8^{x+1} = 32$

h. $6^{4x^2+4x+1} = 1$

i. $5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^x = 775$

j. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 13$

k. $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = \dfrac{7}{2}$

l. $2 \cdot 3^x - 9^x + 3 = 0$

m. $3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^x = 39$

n. $4^{x+1} + 4^{x+2} + 4^{x+3} = 21$

o. $5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} = 31$

p. $2^{2x+3} + 2^{x+1} - 136 = 0$

q. $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

r. $\dfrac{1}{2} \cdot 2^{2x+1} - 18 \cdot 2^{x-1} + 8 = 0$

s. $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

t. $9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

u. $5^x + 5^{1-x} = 6$

v. $2 \cdot 4^{x+1} - 68 \cdot 2^{x-2} + 2 = 0$

w. $5 \cdot 5^{2(x-1)} + 5^{x+2} - 130 = 0$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas :

a) $\log 10x = \log(x-1) + 2$

c) $\log_x 100 - \log_x 25 = 2$

d) $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)$

e) $3 \cdot \log x - \log 32 = \log \dfrac{x}{2}$

f) $\log_3 \dfrac{1}{x} = 2 - \log_3(x+1)$

g) $\log x^3 = \log 6 + 2 \cdot \log x$

h) $\dfrac{\log(16 - x^2)}{\log(3x-4)} = 2$

i) $\ln(x-1) + \ln(x+6) = \ln(3x+2)$

j) $2 \cdot \log x = \log(10 - 3x)$

k) $2 \cdot \log_3 x = \log_3\left(x - \dfrac{8}{9}\right) + 2$

l) $\left(x^2-5x+9\right)\cdot\log 2+\log 125=3$ m) $\dfrac{\log 2+\log\left(11-x^2\right)}{\log(5-x)}=2$

21. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones :

a) $\begin{cases} 2^{x+2y}=32 \\ 5^{2x-y}=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8^{y}\cdot 2^{2x}=4 \\ 3^{2y}\cdot 3^{x-1}=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^{x}+5^{y}=27 \\ 2^{x-1}+5^{y+1}=126 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3\cdot 2^{x}-5\cdot 3^{y}=3 \\ 2^{x+1}+3^{y+1}=59 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2\cdot 3^{x}+2^{y+3}=86 \\ 3^{x}-2^{y}=23 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log x-\log y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y=4 \\ x+y=17 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2\cdot\log x-3\cdot\log y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ \log x-2\cdot\log y=-5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \log x+3\cdot\log y=5 \\ \log\left(\dfrac{x^2}{y}\right)=3 \end{cases}$ k) $\begin{cases} \log(x+y)-\log 3=0 \\ 25^{x}=5^{y} \end{cases}$ l) $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ 2^{x}\cdot 2^{y}=32 \end{cases}$

22. Resuelve los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} 5x-4y=2 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ (2,2) 2) $\begin{cases} 3x+2y=-3 \\ 6x-5y=12 \end{cases}$ $\left(\dfrac{1}{3},-2\right)$

3) $\begin{cases} 3x+5y=29 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ (3,4) 4) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 6x+9y=9 \end{cases}$ { S. I. }

5) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -4x+8y=-12 \end{cases}$ { S.C.I. } 6) $\begin{cases} 4x+y=-2 \\ x+2y=3 \end{cases}$ (-1,2)

7) $\begin{cases} x-(y+1)=3 \\ y+(x+3)=4 \end{cases}$ $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{-3}{2}\right)$ 8) $\begin{cases} 10(x-2)+y=1 \\ x+3(x-y)=5 \end{cases}$ (2,1)

9) $\begin{cases} 3(x+2)-5(y+1)=9 \\ 4x+\dfrac{5+3y}{2}=5 \end{cases}$ (1,-1) 10) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=5 \\ \dfrac{x+y}{7}+y=3 \end{cases}$ $\left(\dfrac{23}{3},\dfrac{5}{3}\right)$

11) $\begin{cases} \dfrac{3(x-5)}{2}-\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{y}{6}+3 \\ -3(x-y-4)-10=y-1 \end{cases}$ (9,12) 12) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2}+\dfrac{5y}{4}=2 \\ \dfrac{12x}{5}=1+\dfrac{3}{4}y \end{cases}$ $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{5}\right)$

13) $\begin{cases} x-2(x+y)=3y-2 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=3 \end{cases}$ (12,-2)

14) $\begin{cases} \dfrac{3-2y}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-2x}{6} \\ \dfrac{17}{8}=\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3(1+y)}{8} \end{cases}$ (5,4)

15) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=3 \\ \dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{x-2y}{4}=3 \end{cases}$ (8,2)

16) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}-y=\dfrac{x(3-y)}{x-1} \\ \dfrac{2}{y-1}+x=\dfrac{xy}{y-1} \end{cases}$ (2,3)

17) $\begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{4}-\dfrac{5y-3}{3}=\dfrac{2x-y}{6}-\dfrac{11}{12} \\ \dfrac{3x-2y+4}{5}-\dfrac{y}{3}=x-y+\dfrac{4}{3} \end{cases}$ $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$

18) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=4 \\ -x+3y=0 \end{cases}$ $\{\ \text{S.I.}\ \}$

19) $\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x-y=2 \\ 3x+y=13 \end{cases}$ (3,4)

20) $\begin{cases} x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \\ -x+y+z=3 \end{cases}$ (4,2,5)

21) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+z=4 \\ y+z=5 \end{cases}$ (1,2,3)

22) $\begin{cases} x-y-2z=-3 \\ 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ (1,-2,3)

23) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-2z=1 \\ x+2y+5z=0 \end{cases}$ $(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{-1}{2})$

24) $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ x-y+z=3 \end{cases}$ $\left(1,\dfrac{-1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

25) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ (1,0,2)

26) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-y+3z=2 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ $\{\ \text{S.I.}\ \}$

27) $\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 2x-y+2z=4 \\ x+y-5z=-4 \end{cases}$ $\{\ \text{S.C.I.}\ \}$

28) $\begin{cases} x+z=4 \\ y+z=3 \\ x+y=5 \\ x-2y-z=-2 \end{cases}$ (3,2,1)

29) $\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ x+2y-z=2 \\ 3x-y+3z=-2 \\ -x+2y-z=4 \end{cases}$ (-1,2,1)

30) $\begin{cases} x+y-z+t=-8 \\ x-y+z+t=2 \\ x+y+z-t=6 \\ -x+y+z+t=-4 \end{cases}$ (1,-2,3,-4)

31) $\begin{cases} x^2-y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ (2,3) y (-1,0)

32) $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ (2,1) y (1,2)

33) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$ (-2,6) y (6,-2)

34) $\begin{cases} 8x=y^2 \\ 2x-y=8 \end{cases}$ (8,8) y (2,-4)

35) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ $\left(\frac{7}{4},\frac{-1}{4}\right)$ y (2,-1)

36) $\begin{cases} x+y=14 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{24} \end{cases}$ (6,8) y (8,6)

37) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=52 \\ x+y=8 \end{cases}$ (2,6) y (6,2)

38) $\begin{cases} x-2y+8=0 \\ x^2-y^2+5=0 \end{cases}$ (-2,3) y $\left(\frac{22}{3},\frac{23}{3}\right)$

39) $\begin{cases} x^2+y^2=61 \\ xy=30 \end{cases}$ (-6,-5) , (-5,-6) , (5,6) y (6,5)

40) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=28 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ (4,2) , (-4,-2) , (2,4) y (-2,-4)

23. Halla dos números sabiendo que su diferencia es 495 y que al dividirlos se obtiene 4 de cociente y 60 de resto. $\{640,145\}$

24. La distancia entre dos ciudades A y B es de 600 Km. Un camión sale de A hacia B a una velocidad de 80 Km/h. A la misma hora sale de B hacia A un coche a 120 Km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse? {3 Horas}

25. Hemos hecho un pedido de 10 Kg de un artículo A y 8 Kg de otro artículo B cobrándonos en total 240 €. Un segundo pedido de 6 Kg de A y 15 Kg de B, nos ha costado 297 €. ¿Cuánto costará un tercer pedido de 5 Kg de A y 20 Kg de B ? {360€ }

26. Halla tres números naturales x,y z cuyo producto es tal, que si se aumenta en una unidad el segundo factor (*), el producto aumenta en 15, pero si es el tercer factor (*) el que aumenta en una unidad, el producto aumenta en 12.

(*) : orden alfabético. $\{3,4,5\}$

27. Calcula las edades de tres hermanos sabiendo que sumadas dos a dos, dan 5,7 y 11 años respectivamente. { 0´5,4´5 y 6,5 años }

28. Halla dos números sabiendo que suman 14 y que la suma de sus inversos es $\frac{7}{24}$.

{6 y 8}

29. Calcula dos números que sumen 100 y que la diferencia de sus cuadrados sea 1000 .

{ 55 y 45}

30. Halla dos números tales que su suma sea 6 y la suma del cuadrado del primero y el doble del cuadrado del segundo sea 24. $\{\ 4 \text{ y } 2\ \}$

31. Halla las dimensiones de un rectángulo de perímetro 17 cm y área igual a 18 cm ^{2}

{4 y $\frac{9}{2}$ cm}

32. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su área 48 cm ^{2} . Calcular sus dimensiones.

{8 y 6cm}

33. Resuelve las siguientes inecuaciones:

1) 2x-7<8-3x $(-\infty,3)$ 2) $\frac{3-6x}{5} \le \frac{4x-2}{3}$ $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$

3) $\frac{4x+1}{8} \ge \frac{2x-1}{3}$ $\left(-\infty,\frac{11}{4}\right]$ 4) $\frac{2x-1}{3}+x<\frac{2x-6}{2}+\frac{5x+6}{4}$ $(2,\infty)$

5) $x^2+5x+6 \le 0$ $[-3,-2]$ 6) $2x^2-3x>0$ $(-\infty,0)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$

7) $x^2+x \ge 12$ $(-\infty,-4]\cup[3,\infty)$ 8) $(x-1)^2-(x+2)^2+3x^2 \le 1-7x$ $\left[\frac{-4}{3},1\right]$

9) $\frac{4x^2-3x}{2}+1<x^2+x-\frac{1}{2}$ $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 10) $\frac{x-1}{x+1} \ge 0$ $(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$

11) $\frac{2x-8}{x-2}>0$ $(-\infty,2)\cup(4,\infty)$ 12) $\frac{4x}{x-1}-2 \ge 0$ $(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$

13) $\frac{x+8}{x+3}>2$ (-3,2) 14) $x^3+x^2-2x<0$ $(-\infty,-2)\cup(0,1)$

15) $x^4-16 \le 0$ $[-2,2]$ 16) $x^3-3x^2-x+3>0$ $(-1,1)\cup(3,\infty)$

17) $x^3-x^2-6x<0$ $(-\infty,-2)\cup(0,3)$ 18) $(x-1)(x^2-4x+3)>0$ $(3,\infty)$

19) $(x^2-1)(x^2+1) \le 0$ $[-1,1]$ 20) $x^2(x-1)+2x(1-x) \ge 0$ $[0,1]\cup[2,\infty)$

21) $x(x^2+x+3)(x-1) \le 0$ $[0,1]$ 22) $x^3-x^2-4x+4<0$ $(-\infty,-2)\cup(1,2)$

23) $\dfrac{x^2+x}{x-2}<0$ $\quad(-\infty,-1)\cup(0,2)$

24) $\dfrac{x^2+2x}{2x-3}\geq 0$ $\quad[-2,0]\cup\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)$

25) $\dfrac{x^2-2x}{(x+1)(x+3)}\geq 0$ $\quad(-\infty,-3)\cup(-1,0]\cup[2,\infty)$

26) $\dfrac{x^2-1}{x-1}\geq 0$ $\quad[-1,1)\cup(1,\infty)=[-1,\infty)-\{1\}$

27) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+5}>0$ $\quad(-\infty,-2)\cup(1,3)\cup(5,\infty)$

28) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+5}\geq 0$ $\quad(-\infty,-2]\cup(1,3]\cup(5,\infty)$

29) $\dfrac{4-x^2}{x^2-9}>0$ $\quad(-3,-2)\cup(2,3)$

30) $\dfrac{4-x^2}{x^2-9}\geq 0$ $\quad(-3,-2]\cup[2,3)$

31) $\begin{cases}3x+2>x+8\\2x-5>3x+7\end{cases}$ $\quad\{no\ tiene\}$

32) $\begin{cases}x+5>4x-4\\2x-7<3x-3\end{cases}$ $\quad(-4,3)$

33) $\begin{cases}5x-3>2x-6\\x+4\leq 3x-4\end{cases}$ $\quad[4,\infty)$

34) $\begin{cases}2x+4>4x-1\\x+4\geq 3x-4\end{cases}$ $\quad\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$

35) $\begin{cases}3x-7\leq x+1\\2x-2>x+8\end{cases}$ $\quad\{\text{ no tiene }\}$

36) $-5\leq 2x-1<9$ $\quad[-2,5)$

34. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución sobre la recta real:

$a)\ 4x-2(x-3)>7+3x$

$b)\ \dfrac{1}{2}(x+3)-\dfrac{3}{4}(x+1)\geq\dfrac{5}{6}(x-5)$

$c)\ \dfrac{1}{2}(x+1)-4(x+2)\leq 7$

$d)\ \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x+3}{5}\geq 2x-3$

$e)\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}+7\right)+\dfrac{1}{2}(x-2)\leq x+3$

$f)\ x-\dfrac{6-2x}{4}\leq 2x+2-\dfrac{3-x}{2}$

$g)\ \dfrac{1}{3}(3x-6)+2(3x+2)<\dfrac{1}{4}(4x-8)$

35. Un instalador de equipos informáticos tiene el siguiente contrato:

a. Un sueldo fijo de 1500€ al mes.
b. Una comisión de 30€ por cada equipo que instala.
c. Unas ayudas en coste de locomoción de 0,1€ por kilómetro recorrido.

Calcula cuántos equipos instaló durante un mes si en su nómina consta un sueldo superior a 2500€ y recorrió 500 km.

36. Una empresa textil fabricó 1500 camisas con un coste de producción de 3€ por unidad. Si vendiendo todas las camisas obtiene un beneficio de más de 6000€ ¿a qué precio vende cada unidad?

37. Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones con dos incógnitas:

$a)\ 3x+4y>12 \qquad b)\ y>1 \qquad c)\ x\geq -1$

38. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$a)\begin{cases} x-y\geq 1 \\ 2x+3y\leq 6 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} 2x+5<0 \\ 2(x-3)<5 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x-3>5 \\ 3x-7\leq 0 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} \dfrac{x}{3}+y\leq \dfrac{5}{2} \\ 2x+6y\geq 15 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x+2y-7\geq 0 \\ 2x-3y\geq 0 \\ 2x-y-4\leq 0 \end{cases}$$

$$f)\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 2x+3y\leq 6 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} x^2-1\leq 3 \\ \dfrac{x+3}{3}+\dfrac{x+2}{2}>2 \end{cases}$$

$$h)\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{3-x}>0 \\ 2(4x-3)\leq 9x-2 \end{cases}$$

39. Resuelve las siguientes inecuaciones:

$a)\ \dfrac{3x}{5}-x>2 \qquad b)\ 9x^2-4\geq 0 \qquad c)\ 2x+3y>9 \qquad d)\ y\leq 4$

40. Resuelve la inecuación $\dfrac{x+8}{5}-\dfrac{x-10}{2}<\dfrac{x}{4}$, y representa la solución en la recta real.

41. Resuelve gráficamente el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 2 \\ x+y\leq 6 \end{cases}$

42. En una fábrica de bicicletas se emplea 1kg de acero para un tipo de bicicletas y 2kg para otro. En la fábrica solo se dispone de 80 kg. Representa en un plano la región de todas las soluciones posibles del número de bicicletas que pueden fabricar de cada tipo.

43. Se dispone de 50€ para comprar revistas de deportes y de informática. El precio de las revistas es de 3€ y 6€, respectivamente, y se desea comprar por lo menos el mismo número de revistas deportivas que de informática. Representa en el plano el recinto de las soluciones del número de revistas que se pueden comprar.

AUTOEVALUACIÓN 1

1. Resuelve y factoriza previamente: $3x^5+x^4-9x^3-9x^2-2x=0$
2. Opera y simplifica el resultado: $\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{x}{x+1}\right):\dfrac{3x}{x-1}$
3. ¿Qué valores crees que debe tomar el parámetro k para que $x^2-6x+k=0$ no tenga soluciones reales?
4. Determina m para que al dividir el polinomio $2x^4+9x^3+2x^2-6x+m$ entre x+4, el resto sea igual a 12.
5. Escribe un polinomio de grado 4 que sólo tenga raíces 0 y 1
6. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a. $x^4-3x^2+2=0$
   b. $\sqrt{8+2x}-x=x+6$
   c. $\dfrac{3x}{x^2-4}=\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{4}{3}$
   d. $3^{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
   e. $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$
   f. $\ln x+\ln 4=2\ln(x+1)$
   g. $|3x+1|=|x-3|$
7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a.\begin{cases} y-2x=0 \\ 3^y-6\cdot 3^x=-9 \end{cases}$$

$$b.\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x+y+3z=0 \\ -2x+3y+3z=1 \end{cases}$$

8. Justifica sin resolverlo, por qué este sistema de ecuaciones no puede tener solución:

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+y+3z=0 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

9. Inventa una ecuación que tenga por resultado 0, 1, -1 y 1/3.
10. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado en las que la incógnita es x:
    a. $abx^2-(a+b)x+1=0$
    b. $(x-a)^2-2x(x+a)-4a^2=0$
    c. $ax^2+bx+b-a=0$
    d. $(a+b)x^2+bx-a=0$
11. Resuelve:
    a. $x(x-1)-2(x+2)<x(x+1)$
    b. $\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}\geq 0$
    c. $x^4-4x^2<0$
    d. $x^3-x^2-6x<0$
    e. $\dfrac{4-x^2}{(x-3)^2}>0$
    f. $\dfrac{-2}{(x-1)^3}<0$

12. La suma de tres cifras de un número es igual a 7. La cifra de las decenas es una unidad mayor que la suma de las otras dos. Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99 unidades. ¿Cuál es ese número?

AUTOEVALUACIÓN 2

1. Resuelve la inecuación: $\dfrac{x^2-16}{(x+1)(x-5)} \geq 0$ $\{(-\infty,-4) \cup (-1,4) \cup (5,+\infty)\}$

2. Hallar la región solución del sistema: $\begin{cases} -2x+y \leq 2 \\ x-2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3. El coste total de tres productos, A, B y C, es de 135 euros. Si se descuenta un 4% en el precio de A, un 5% en el precio de B y un 6% en el precio de C se ahorran 7,10 €. Y si se compran tres productos de tipo A, cinco de tipo B y uno de tipo C, el importe total es de 385€. Calcular el precio de cada producto.

{A, 25€; B, 50€; C, 60€}

4. Resuelve las ecuaciones:

   a. $2x^4+5x^3-11x^2-20x+12=0$ $\left\{2,-2,-3,\dfrac{1}{2}\right\}$

   b. $\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x-2}$ $\{x=3\}$

5. Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones:

   a. $\log(x-1)=\log\left(\sqrt{5+x}\right)+\log\left(\sqrt{5-x}\right)$ {x=4}

   b. $2^{x-3}=45$ $\left\{x=\dfrac{\log 45}{\log 2}+3=8{,}49\right\}$

AUTOEVALUACIÓN 3

1. Hallar la solución de la inecuación: $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x > 0$

   $\{(-\infty, -2) \cup (0,2) \cup (3, +\infty)\}$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones sabiendo que la suma de las tres soluciones es igual a 8.

   $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$ {x=11, y=-5, z=2}

3. Una dieta contiene dos ingredientes: A y B. El ingrediente A contiene 35g de lípidos y 15g de proteínas por cada 100g, y el ingrediente B aporta 15g de lípidos y 10g de proteínas por cada 100g.La dieta debe contener menos de 30g de lípidos y, al menos, 11g de proteínas por cada 100g de alimento. Indicar las expresiones que determinan las posibles soluciones del problema y representarlas gráficamente.

4. Resolver las ecuaciones:

   a. $4x^4 - 21x^2 + 5 = 0$ $\left\{x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\frac{1}{2}\right\}$

   b. $\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+4}{-4x+4} = \frac{3x}{x^2-1}$ $\left\{x = 3, x = \frac{4}{5}\right\}$

5. Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones:

   a. $\log(x-1) = 1 - \log(x+2)$ {x=3}

   b. $3^{x+1} = 240$ $\left\{x = \frac{\log 240}{\log 3} - 1 = 3{,}99\right\}$

   c. $25^x - 5^x = 600$ {x=2}

EJERCICIOS DE REPASO BLOQUE 1 (ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA)

1. De entre las ecuaciones siguientes:

$33x^2 - 25x + 2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + x - 1 = 0$

$2x^2 - 4 = 0$ $\qquad$ $9x^2 + 4 = 0$

   a. Señala las que no tienen soluciones en Q.
   b. ¿Cuáles tienen solución en R?

2. Compara $\sqrt[3]{87}$ y $\sqrt[4]{386}$ reduciéndolas a índice común.

3. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:
   a. $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}} =$
   b. $\dfrac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3} =$
   c. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{6} - 1\right) =$
   d. $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

4. Si $\log k = -1.3$ calcula el valor de las siguientes expresiones:
   a. $\log k^3 =$
   b. $\log \dfrac{1}{k} =$
   c. $\log \dfrac{k}{100} =$

5. Determina x en cada caso:
   a. $|7 - 3x| = 2$
   b. $|x^2 - 3| = 1$
   c. $2^{x+1} = 3^x$

6. Factoriza los siguientes polinomios:
   a. $x^3 - 9x$
   b. $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$

7. Simplifica $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a. $(x+4)^2 - 7 = (2x+3)^2 + 2x$
   b. $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$
   c. $\sqrt{2x+3} - 2x = x - 6$
   d. $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

9. Resuelve los siguientes sistemas:
   a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases}$

10. Opera y simplifica: $\left(\dfrac{x^2 - 4}{x + 1} : \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 - x}\right) - \left(x^2 - 3x\right)$

11. Resuelve:
    a. $\dfrac{7 - x}{x^2 + 4x + 4} + \dfrac{x}{x + 2} = 1$
    b. $\log(x+1) = \log x + 1$
    c. $4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 16 = 0$
    d. $3^{x^2 - 2} = \dfrac{1}{3}$

12. Resuelve los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} x-4y=5 \\ \log(x+1)=1+\log y \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -2x+y-z=-5 \\ 3x-y+3z=10 \end{cases}$

13. Resuelve $x^2+4x+3\geq 0$