Autoevaluación

Página 153

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (2+e^x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2+e^x) = 2+0 = 2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

2 Halla el límite de la función $f(x) = \left(\dfrac{2x^2+4}{x^2-1} - \dfrac{3}{x-1}\right)$ cuando $x \to 1$, $x \to -1$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Representa gráficamente la información que obtengas.

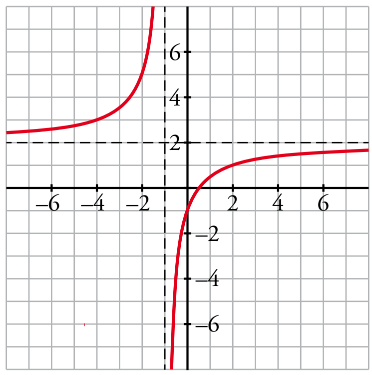
$$f(x) = \frac{2x^2+4}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{x-1} = \frac{2x^2+4}{(x+1)(x-1)} - \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2+4-3x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = 2$$



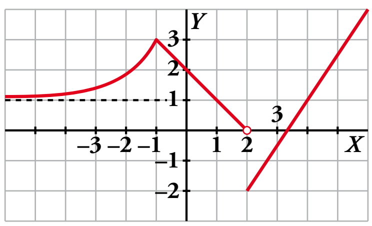
3 Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y di el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2 \end{cases}$ f no tiene límite cuando $x \to 2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

4 Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Halla a para que la función sea continua en $x = 1$.

b) ¿Es discontinua en algún punto?

c) Para $a = -2$, representa la función.

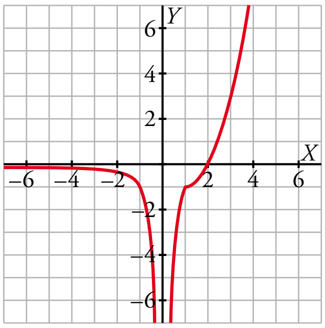
a) Para que sea continua en $x = 1$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + ax) = 1 + a \end{array}\right\} \to -1 = 1 + a \to a = -2$$

Si $a = -2$ la función es continua en $x = 1$.

b) La función es discontinua en $x = 0$ ya que no está definida en dicho valor al anularse el denominador de la fracción. En $x = 0$ hay una discontinuidad de salto infinito.

c) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$



5 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{ax - 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Estudia la continuidad de f para los distintos valores del parámetro a.

La función está definida por intervalos. Para analizar su continuidad debemos estudiar la continuidad cuando $x < 0$, cuando $x > 0$ y en el punto de ruptura $x = 0$.

- Para que sea continua en $x = 0$, debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (-e^x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ax - 3}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{-3}{3} = -1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = -1$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$, para cualquier valor del parámetro a.

- Cuando $x < 0$, la función también es continua ya que es de tipo exponencial.
- Veamos ahora qué ocurre cuando $x > 0$. Para ello, empezamos calculando las raíces del denominador:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = 1,\ x = 3$$

— Cuando $x \neq 1$ y $x \neq 3$ la función es continua por ser un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula.

— En $x = 1$ y en $x = 3$ la función no es continua al no estar definida. Analicemos el tipo de discontinuidad en función del parámetro a.

- En $x = 1$:

$f(1)$ no existe.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{ax-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 1} \frac{ax-3}{(x-1)(x-3)} = \frac{(a-3)}{(0)} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{Si } a \neq 3 \to \lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{(a-3)}{(0)} = \pm\infty \\ \text{Si } a = 3 \to \lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{3(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Por tanto, si $a = 3$, $f(x)$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad evitable. Si $a \neq 3$, $f(x)$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

- En $x = 3$:

$f(3)$ no existe.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{ax-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 3} \frac{ax-3}{(x-1)(x-3)} = \frac{(3a-3)}{(0)} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{Si } a \neq 1 \to \lim_{x \to 3} f(x) = \dfrac{(3a-3)}{(0)} = \pm\infty \\ \text{Si } a = 1 \to \lim_{x \to 3} f(x) = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 3} \dfrac{x-3}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, si $a = 1$, $f(x)$ tiene en $x = 3$ una discontinuidad evitable. Si $a \neq 1$, $f(x)$ tiene en $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito.

Resumiendo, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$; en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable si $a = 3$ o una discontinuidad de salto infinito si $a \neq 3$, y en $x = 3$ hay una discontinuidad evitable si $a = 1$ o una discontinuidad de salto infinito si $a \neq 1$.

6 a) Calcula a y b para que f sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

b) Representa la función obtenida.

a) • f es continua si $x < -2$, si $-2 < x < 1$ y si $1 < x$, por estar definida por funciones continuas.

- Para que f sea continua en $x = -2$, debe cumplirse que $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -2(-2) + a = 4 + a \\ \lim_{x \to -2^-} (-2x + a) = 4 + a \\ \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 5) = 4 - 5 = 1 \end{array}\right\} \text{Por tanto: } 4 + a = -1 \to a = -5$$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, debe ser $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = b \cdot 1 + 3 = b + 3 \\ \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 5) = -4 \\ \lim_{x \to 1^+} (bx + 3) = b + 3 \end{array}\right\} \text{Por tanto: } b + 3 = -4 \to b = -7$$

b) $$f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

La representación gráfica se muestra a la derecha: