Autoevaluación

Página 105

1 Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor de y.

$$B(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot y = 0$$

Luego $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor de y.

2 Discute en función de a el siguiente sistema y resuélvelo si $a = 3$:

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - 2z = 6 \end{cases}$$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} a \\ 3a \\ 6 \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -4 + a^2 + 2 - 4 + a - 2a = a^2 - a - 6 = 0 \quad \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 3 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 3 \;\rightarrow\;$ El sistema es *compatible determinado*.
- Si $a = -2$:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

  $$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 3$$

  Como $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3 \;\rightarrow\;$ El sistema es *incompatible*.
- Si $a = 3$:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 2$$

  Como $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.
- Resolvemos ahora el sistema para $a = 3$:

  $$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 9 \\ 2x + 3y - 2z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

  Sabemos que el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 3.ª ecuación, pasamos z al segundo miembro como parámetro y lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 9+z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{15-z}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 3 & 9+z \end{vmatrix}}{5} = \frac{4z}{5}$$

Soluciones: $x = \dfrac{15-\lambda}{5}$, $y = \dfrac{4\lambda}{5}$, $z = \lambda$

3 Determina para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcula dicha matriz inversa para $a = 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -2(a^3 - a) = 0 \;\rightarrow\; -2a(a^2-1) = 0 \;\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

M tiene inversa si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$.

- Para $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad |M| = -12$$

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (M_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (M_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{12}(M_{ji}) = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

4 Halla en cada caso la matriz X que verifica la igualdad:

a) $A^{-1}XA = B$

b) $(A + X)B = 1$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^{-1}XA = B \rightarrow AA^{-1}XAA^{-1} = ABA^{-1} \rightarrow X = ABA^{-1}$

Calculamos A^{-1} $(|A| = -3 + 2 = -1)$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $(A + X)B = I \rightarrow AB + XB = I \rightarrow XB = I - AB \rightarrow XBB^{-1} = (I - AB)B^{-1} \rightarrow$

$\rightarrow X = (I - AB)B^{-1} \rightarrow X = B^{-1} - A$

Calculamos B^{-1} $(|B| = 1 + 2 = 3)$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to (B_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

5 **a) Discute, en función de a, el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

a) $$\left.\begin{array}{l} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right\} \quad A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right)}_{A}$$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 = (a-1)^2(a+2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

- Si $a = 1$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \text{Las tres ecuaciones resultantes son contradictorias.}$$

El sistema es *incompatible*.

- Si $a = -2$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, entonces $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema es *compatible determinado*.

b) Para $a = -1$:

$$A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{A} \text{ y sabemos que } |A| = 4.$$

El sistema en este caso es *compatible determinado*. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$

6 **Demuestra que no hay valores de m para los que este sistema no tenga solución. Resuélvelo:**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right)$$

A = matriz de las tres primeras columnas.

$|A| = 4 - m = 0 \;\rightarrow\; m = 4$

- Si $m = 4$:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

  La 4.ª columna se obtiene sumando la 2.ª y la 3.ª. Luego, $ran(A) = ran(A')$. El sistema es *compatible indeterminado* pues:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 2$$

  Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

  $$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 - z \\ x + 3y = 5 - 2z \end{array}\right\}$$

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 2 \\ 5-2z & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1 + z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 1 & 5-2z \end{vmatrix}}{1} = 2 - z$$

  Soluciones: $x = -1 + \lambda,\; y = 2 - \lambda,\; z = \lambda$

- Si $m \neq 4 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos en este caso:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & m & 3 \end{vmatrix}}{4-m} = \frac{4-m}{4-m} = 1$$

  $$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{4-m} = \frac{0}{4-m} = 0$$

  $$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix}}{4-m} = \frac{8-2m}{4-m} = \frac{2(4-m)}{4-m} = 2$$

  Solución: $x = 1,\; y = 0,\; z = 2$

Por tanto, no hay ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

7 El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?

La matriz ampliada es una matriz cuadrada de orden 4.

Su rango puede ser 3 (si $|A'| = 0$) o 4 (si $|A'| \neq 0$).

- Si $ran(A) = ran(A') = 3 = n.^o$ *de incógnitas* $\rightarrow$ El sistema será *compatible determinado*.
- Si $ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$ $\rightarrow$ El sistema será *incompatible*.

8 En un sistema homogéneo de tres ecuaciones y dos incógnitas, la matriz de los coeficientes tiene rango 2.

Di, razonadamente, cuántas soluciones tendrá el sistema.

En un sistema homogéneo el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada siempre coinciden ya que al añadir una columna de ceros no cambia el rango.

Por tanto, tenemos que $ran(A) = ran(A') = 2 = n.^o$ *de incógnitas*. El sistema será *compatible determinado*. Solo tiene una solución que es la trivial: $x = 0$, $y = 0$.