Nombre:			
Curso: 2º Bach - C	Fecha: 31 – 1 – 2022	Nº	

Álgebra 1 [Sistemas de ecuaciones y matrices]

1.- Calcula el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -4 & -m\\ 4 & 10 & m^2\end{pmatrix}$, en función del parámetro m.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -4 & -m\\ 4 & 10 & m^2\end{pmatrix} \to \begin{matrix}f_1\\ f_2-2f_1\\ f_3-4f_1\end{matrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -6 & -m-2\\ 0 & 6 & m^2-4\end{pmatrix} \to \begin{matrix}f_1\\ f_2\\ f_3+f_2\end{matrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -6 & -m-2\\ 0 & 0 & m^2+m-6\end{pmatrix}$$

Si $m^2+m-6=0$ el rango es 2, en caso contrario, el rango es 3.
Resolvemos $m^2+m-6=0$ Soluciones $m=3$ y $m=-2$

En resumen: si $m=3$ ó $m=-2$ el rango es 2, y en otro caso, el rango es 3

2.- Resuelve e interpreta geométricamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}-2x-3z=1\\ 3x-2y-2z=5\\ 5x+2y+14z=-9\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 0 & -3 & 1\\ 3 & -2 & -2 & 5\\ 5 & 2 & 14 & -9\end{array}\right) \to \begin{matrix}f_1\\ f_2\\ f_3+f_2\end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 0 & -3 & 1\\ 3 & -2 & -2 & 5\\ 8 & 0 & 12 & -4\end{array}\right) \to \begin{matrix}f_1\\ f_2\\ f_3+4f_2\end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 0 & -3 & 1\\ 3 & -2 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to \begin{cases}-2x-3z=1\\ 3x-2y-2z=5\\ 0=0\end{cases}$$

Es un Sistema Compatible Indeterminado. Parametrizamos y resolvemos:
$z=\lambda$; $-2x-3\lambda=1$; $x=\frac{-3\lambda-1}{2}$; $3x-2y-2z=5$; $y=\frac{-13\lambda-3}{4}$

Gráficamente este sistema está formado por 3 ecuaciones tales que los conjuntos de soluciones son 3 planos que se cortan en una recta común.

3.- Un país importa 21000 vehículos de 3 marcas diferentes A, B y C a 10000, 15000 y 20000 € respectivamente. El coste total de la importación es de 322 millones de euros. Se sabe que hay 21000 vehículos contando los de la marca B y k veces los de la marca A.

a. Plantea un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema.
b. Resuelve el sistema para el caso $k=3$
c. Comprueba que le sistema no tiene solución para k=2

Llamamos: x, y, z al número de vehículos importados de las marcas A, B y C respectivamente

Un sistema que responde a las condiciones del problema es: $\begin{cases}x+y+z=21000\\ 10000x+15000y+20000z=322\cdot 10^6\\ kx+y=21000\end{cases}$

Para $k=3$ tenemos $\begin{cases}x+y+z=21000\\ 10000x+15000y+20000z=322\cdot 10^6\\ 3x+y=21000\end{cases}$. Aplicamos el método de resolución de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 21000\\ 10 & 15 & 20 & 322000\\ 3 & 1 & 0 & 21000\end{array}\right\} \to \begin{matrix}f_1\\ f_2-20f_1\\ f_3\end{matrix} \to \left\{\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 21000\\ -10 & -5 & 0 & -98000\\ 3 & 1 & 0 & 21000\end{array}\right\} \to \begin{matrix}f_1\\ f_2+5f_3\\ f_3\end{matrix} \to \left\{\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 21000\\ 5 & 0 & 0 & 7000\\ 3 & 1 & 0 & 21000\end{array}\right\}$$

Por lo tanto el sistema es equivalente a: $\begin{cases} x+y+z=21000 \\ 5x=7000 \\ 3x+y=21000 \end{cases}$, que podemos resolver fácilmente: $\begin{array}{r} x=1400 \\ y=16800 \\ z=2800 \end{array}$

En consecuencia, para $k=3$, se han importado 1400 vehículos de la marca A, 16800 de la marca B y 2800 de la marca C

Para $k=2$ el sistema es $\begin{cases} x+y+z=21000 \\ 10000x+15000y+20000z=322\cdot 10^6 \\ 2x+y=21000 \end{cases}$ Resolviendo de modo similar al apartado anterior obtenemos: $\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 0 & 0 & 0 & 7000 \\ 2 & 1 & 0 & 21000 \end{array}\right\}$ por lo que el sistema es incompatible: 2ª ecuación: $0=7000$

4.- Dada la matriz $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra una matriz X que verifique la ecuación $XG+G=G^{-1}$

En primer lugar despejamos en la ecuación matricial: $XG+G=G^{-1}\to XG=G^{-1}-G\to X=(G^{-1}-G)G^{-1}$

Ahora calculamos la matriz G^{-1}utilizando el método de Gauss: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to \begin{array}{c} f_1 \\ f_2-2f_1 \\ f_3-5f_1 \end{array}\to$

$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)\to \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3-f_2 \end{array}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)\to \begin{array}{c} f_1 \\ f_3-f_2 \\ f_3 \end{array}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Operamos: $G^{-1}-G\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Operamos: $(G^{-1}-G)G^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Por tanto $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.- Consideramos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$ explicando el modo en que lo has hecho:

a. Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

Para que el sistema sea incompatible, basta con añadir una ecuación incompatible con las que forman el sistema, por ejemplo: $0=3$ (trivial) ó por ejemplo $\boxed{3x-2y+z=0}$ que es incompatible con la 1ª ecuación

b. Añade una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado.

Para que el sistema sea compatible indeterminado, basta con añadir una ecuación que no añada nada a las que forman el sistema, por ejemplo: $0=0$ (trivial) ó por ejemplo $3x-2y+z=5$, que es igual que la 1ª ecuación ó una combinación lineal, por ejemplo $\boxed{5x-5y+2z=1}$ sumando las dos ecuaciones.