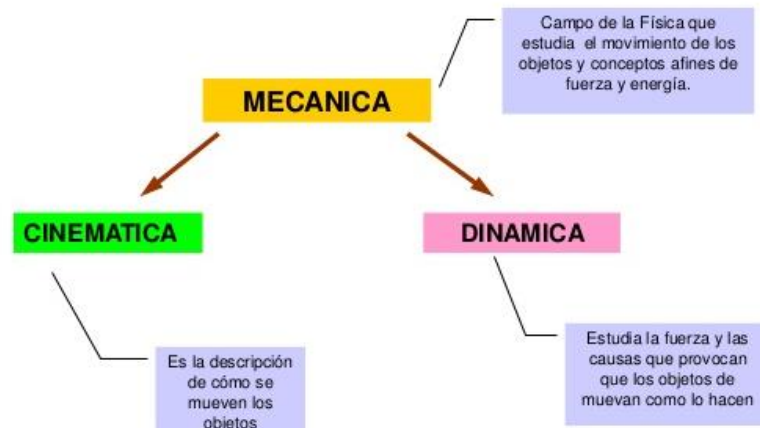


## Cinemática



La **cinemática** tiene como objeto de estudio el movimiento de los cuerpos en función del tiempo sin ocuparse de las causas que lo producen.

Decimos que un cuerpo está en movimiento si cambia su posición respecto a un punto que tomamos como referencia. Si el punto está fijo, el movimiento se llama **absoluto**; en caso contrario, el movimiento se denomina **relativo**. En el universo no existen puntos fijos, de modo que todos los movimientos son relativos.



## Sistema de referencia

### ¿Reposo o movimiento?

**Lo primero que hay que hacer para estudiar un movimiento es decidir el sistema de referencia** a utilizar. La razón es obvia, pues dependiendo del sistema elegido se podrá, o no, hablar de movimiento.

Piensa, por ejemplo, en un viajero de tren que deja su libro en el asiento contiguo. Si le preguntas a él, dirá que el libro está en reposo, pues no lo ve moverse. Pero el mismo libro se estaría moviendo para un caminante que, parado junto a la vía, observara pasar el tren. Entonces el libro, ¿está en reposo o en movimiento? ¿Y qué dirías del caminante?

Te será fácil entender que lo correcto es decir que el libro se encuentra en reposo respecto del viajero, pero en movimiento respecto del caminante; y que el caminante está en reposo respecto de la vía, y en movimiento respecto de, por ejemplo, el centro de la Tierra.

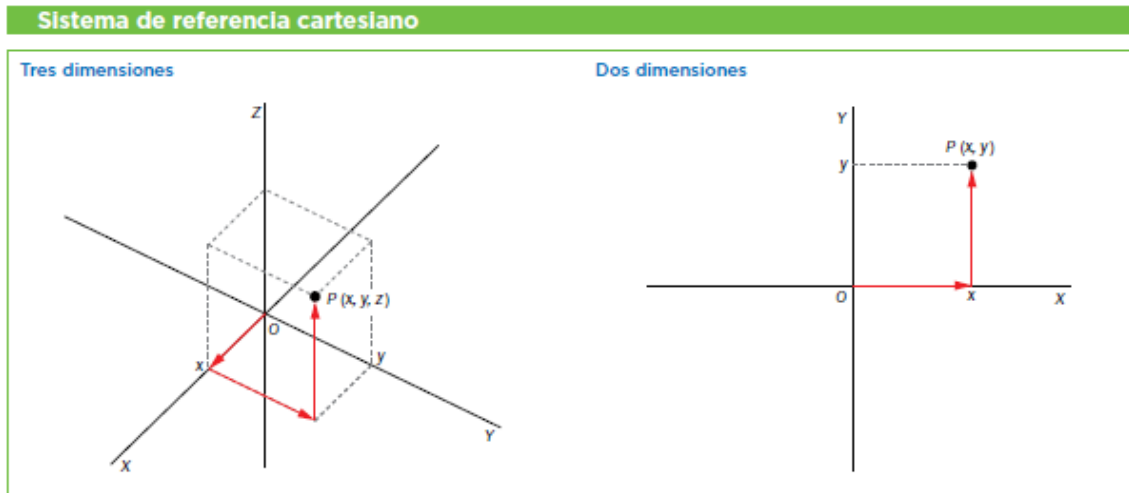
En definitiva, **no se puede hablar de reposo, o de movimiento, sin especificar respecto de qué sistema de referencia**, y de ahí la importancia de definir este como paso previo al estudio de cualquier movimiento.

### Sistema de referencia cartesiano

Un sistema de referencia es un punto del espacio, llamado **origen** del sistema, junto con la **forma de localizar** un objeto respecto de él.

En un **sistema de referencia cartesiano**, la forma de localizar un objeto se basa en un **conjunto de ejes perpendiculares dos a dos que se cortan en el origen**.

Para localizar un objeto en el espacio se necesita un sistema de referencia con tres ejes (figura inferior izquierda). Este curso, no obstante, se estudiarán movimientos en el plano, y con dos de esos ejes será suficiente (figura inferior derecha).



Existen sistemas de referencia inerciales y no inerciales. Un sistema de referencia se llama **sistema inercial** cuando, respecto de otro, está en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme (la Tierra en la práctica se considera como tal). En caso contrario el sistema será no inercial.

### Posición

En un sistema de referencia cartesiano la **posición** de un objeto queda determinada por sus coordenadas, que representan las **distancias al origen sobre cada eje**.

En la imagen anterior se han representado las coordenadas,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , de un punto en el espacio (izquierda) y en el plano,  $x$ ,  $y$  (derecha). Estas coordenadas, obviamente, **dependen del sistema de referencia** elegido.

### Trayectoria

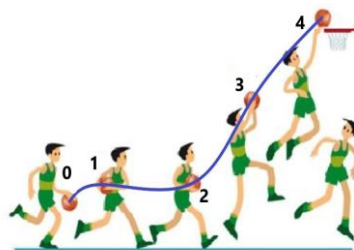
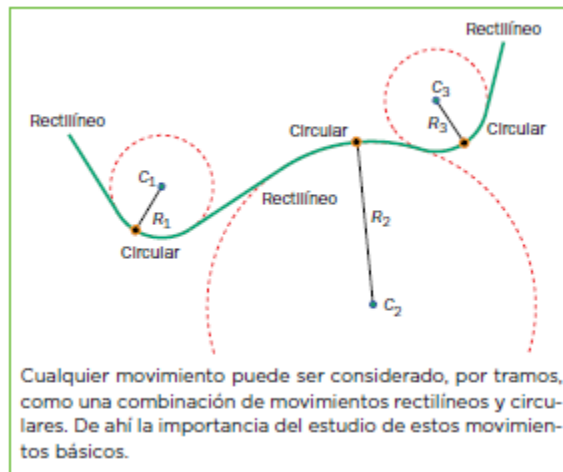
Dado un sistema de referencia, decimos que un objeto se encuentra en movimiento cuando su posición varía con el transcurso del tiempo.

La **trayectoria** es la línea que resulta de unir las sucesivas posiciones que ocupa un cuerpo durante su movimiento.

Según sea la forma de la trayectoria, los movimientos se clasifican en **rectilíneos**, cuando es una línea recta, y **curvilíneos**, cuando no lo es. En el caso particular de que sea una circunferencia, se habla de movimientos **circulares**. Por último, conviene advertir que la trayectoria que describe un móvil, al igual que la posición, depende del sistema de referencia.



### Movimientos complejos



En este caso la trayectoria del balón es curvilínea.

## Magnitudes del movimiento

### Vector de posición

Para señalar la posición de un objeto en un sistema de referencia se utiliza un vector, que recibe el nombre de vector de posición.

El **vector posición**,  $r$ , es aquel cuyo **punto de aplicación** se sitúa en el **origen** del sistema, y cuyo **extremo** se encuentra en la **posición** del objeto.

Como cualquier vector en el plano, el vector de posición se puede escribir como par ordenado de números o bien en función de los vectores unitarios que definen las direcciones de los ejes cartesianos:  $i$  y  $j$ .

$$r = (x, y) = xi + yj \text{ (m)}$$

donde  $x$  e  $y$  son las componentes del vector:

$$x = r \cdot \cos\alpha \quad y = r \cdot \sin\alpha$$

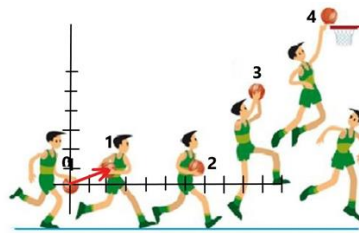
El **módulo** de este vector coincide con la **distancia**, en línea recta, **entre el objeto y el origen** del sistema de referencia.

El vector de posición de un móvil depende del tiempo y a esta relación se le llama **ecuación del movimiento**:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j \text{ (m)}$$

Cuando el cuerpo permanece en reposo en ese sistema de referencia, el vector posición no varía; por el contrario, cuando el cuerpo se mueve, el vector posición varía, y su extremo describe la trayectoria.

Los vectores de posición dependen del sistema de referencia elegido.



$$\vec{r}_1 = (2,1) - (0,0) = 2\vec{i} + \vec{j} \text{ (m)}$$

### Vector desplazamiento

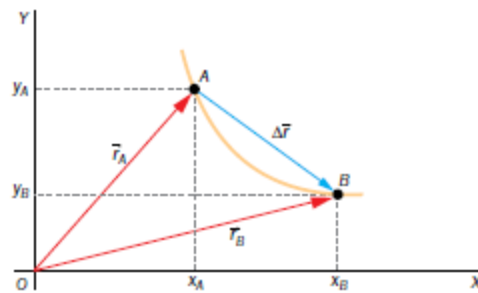
Imagina un cuerpo que, en un instante de tiempo en el que el cronómetro marca  $t_A$ , se encuentra en la posición  $A$  con vector posición  $r_A$ , y transcurrido un tiempo determinado, en el instante  $t_B$ , se encuentra en la posición  $B$  con vector posición  $r_B$  (imagen inferior).

El **vector desplazamiento**,  $\Delta r$ , es el que tiene como **punto de aplicación** la **posición inicial**, y como **extremo**, la **posición final**.

El **módulo** del vector desplazamiento se denomina **desplazamiento**. Es la **distancia**, medida en línea recta, **entre la posición inicial y la final**.

Habrás observado que para el vector desplazamiento se ha utilizado el símbolo « $\Delta$ », que significa «incremento», o «variación». Es un símbolo que aparece en muchas ecuaciones físicas.

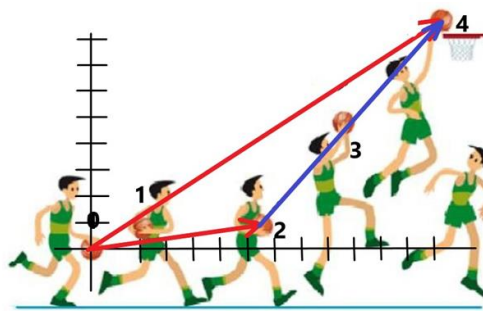
### Vectores posición y desplazamiento



El vector desplazamiento,  $\Delta \vec{r}$ , solo proporciona información sobre la posición inicial y la posición final, a la que se ha podido llegar por cualquier trayectoria.

De la imagen se deduce que:

$$\vec{r}_A + \Delta \vec{r} = \vec{r}_B \rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$



$$\vec{r}_2 = (5,1) - (0,0) = 5\vec{i} + \vec{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_4 = (12,9) - (0,0) = 12\vec{i} + 9\vec{j} \text{ (m)}$$

$$\Delta \vec{r} = (12,9) - (5,1) = 7\vec{i} + 8\vec{j} \text{ (m)}$$

### Espacio recorrido

Cuando se estudia un movimiento interesa conocer, aparte de la trayectoria descrita, el espacio recorrido sobre ella.

En un movimiento sin cambio de sentido, el **espacio recorrido** es la **distancia, medida sobre la trayectoria**, que separa la posición final de la inicial, en el trayecto estudiado.

Se dice «en el trayecto estudiado» porque en ocasiones no interesa el movimiento completo, sino que se reduce el estudio a una parte de dicho movimiento.

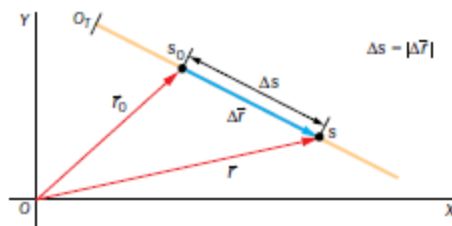
Para determinar la posición sobre la trayectoria, se señala un origen,  $O_T$ , y se miden distancias respecto de él. Si en un instante de tiempo,  $t_0$ , el móvil se encuentra en la posición  $s_0$ , y en un instante posterior,  $t$ , se encuentra en la posición  $s$ , el desplazamiento sobre la trayectoria en el intervalo  $\Delta t = t - t_0$  vendrá dado por:

$$\Delta s = s - s_0$$

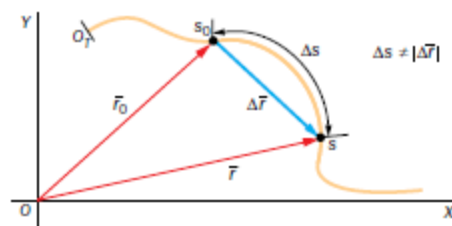
El espacio recorrido es el valor absoluto de este desplazamiento y, en general, no coincide con el módulo del vector desplazamiento, pues el primero se mide sobre la trayectoria, y el segundo en línea recta (figura inferior). Vector posición, vector desplazamiento y espacio recorrido son magnitudes que permiten determinar distancias, por lo que tienen dimensiones de longitud.

### Espacio recorrido y desplazamiento

En un movimiento rectilíneo en el que el móvil no cambia de sentido, el espacio recorrido coincide con el módulo del vector desplazamiento.



En cualquier otro caso, el espacio recorrido es mayor que el módulo del vector desplazamiento.



Observa en las imágenes que  $s - s_0 < 0$  no significa que el espacio recorrido sea negativo (¡nunca puede serlo!), sino que el móvil se desplaza hacia valores menores de posición sobre la trayectoria ( $s < s_0$ ).

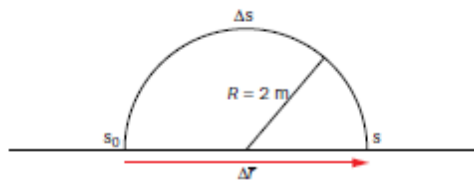
### Ejercicio resuelto

- 1 Un móvil recorre media circunferencia de radio  $R = 2$  m. Calcula el espacio recorrido y el módulo del vector desplazamiento.

Dado que en una circunferencia el diámetro es el doble del radio, y conocida la expresión de su longitud total ( $L = 2 \cdot \pi \cdot R$ ), se pueden calcular las magnitudes que pide el enunciado:

$$|\Delta\vec{r}| = 2 \cdot R = 2 \cdot 2 \text{ m} = 4 \text{ m}$$

$$\Delta s = \frac{L}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{2} = \pi \cdot R = \pi \cdot 2 \text{ m} \simeq 6,28 \text{ m}$$



### Velocidad

Un móvil puede pasar de una posición a otra con mayor o menor rapidez; además, si la trayectoria es curvilínea, la dirección del movimiento irá cambiando. De todo ello da cuenta la velocidad.

La **velocidad** es una magnitud física que informa sobre **cómo varía la posición** de un móvil.

Se trata de una **magnitud vectorial**, pues ha de informar tanto de la rapidez como de la dirección y el sentido del movimiento.

- Velocidad media

Una magnitud muy utilizada en cinemática es la velocidad media.

La **velocidad media**,  $v_m$ , en un trayecto de un movimiento, resulta de dividir el **vector desplazamiento** entre el **intervalo de tiempo** empleado.

En lenguaje matemático, el vector y su módulo se expresan como:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \rightarrow v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Se trata, pues, de un vector que tiene la **misma dirección y sentido que el vector desplazamiento** (figura inferior izquierda).

- Velocidad instantánea

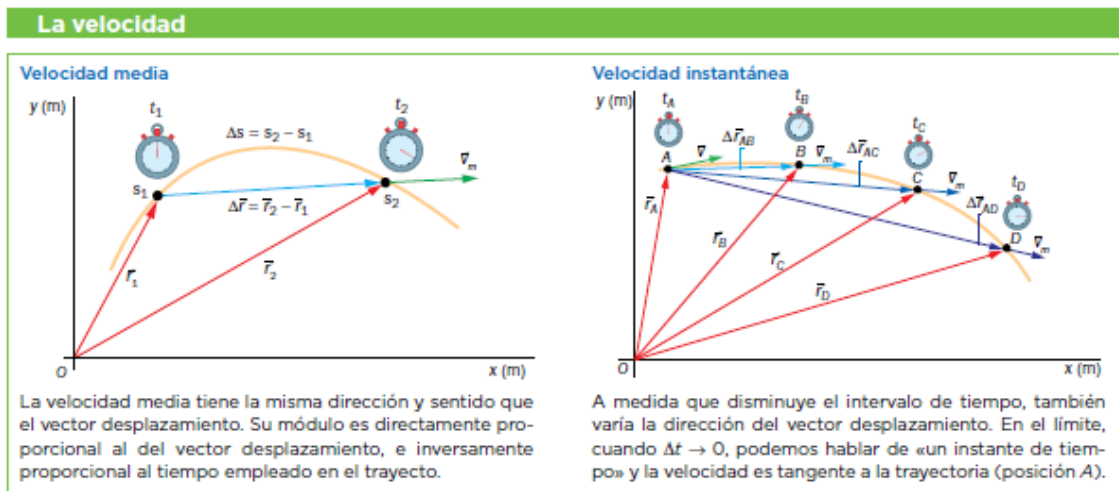
Si se calcula la velocidad media para un intervalo de tiempo muy pequeño (lo que se expresa matemáticamente como  $\Delta t \rightarrow 0$ ), se obtiene la velocidad en un instante de tiempo, o velocidad instantánea.

La **velocidad instantánea**,  $v$ , indica la velocidad del móvil en cada instante de tiempo.

En lenguaje matemático, el vector se expresa como:

$$v = \frac{dr}{dt}$$

La velocidad instantánea es un vector **tangente a la trayectoria** en cada punto (figura inferior derecha), cuyo módulo recibe el nombre de **rapidez** o **celeridad**.



### Aceleración

El hecho de que un movimiento se describa con una velocidad media determinada no significa que la rapidez sea la misma durante todo el trayecto; además, si la trayectoria es curvilínea, la dirección de la velocidad cambia. La magnitud que informa de estos cambios es la aceleración.

La **aceleración** es una magnitud física que informa sobre **cómo varía la velocidad** de un móvil.

Se trata de una **magnitud vectorial**, pues ha de informar tanto de los cambios del módulo como de los de dirección y sentido de la velocidad.

- Aceleración media

Si un móvil, en un instante  $t_0$ , se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_0$ , y en un instante posterior,  $t$ , lo hace con velocidad  $\mathbf{v}$ , en el intervalo  $\Delta t = t - t_0$  la velocidad habrá variado  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  (figura inferior).

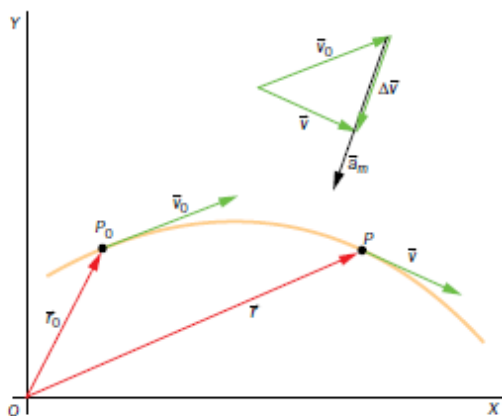
La **aceleración media**,  $\mathbf{a}_m$ , en un trayecto de un movimiento, resulta de dividir la variación del **vector velocidad**,  $\Delta \mathbf{v}$ , **entre el intervalo de tiempo** en el que esta se produce

En lenguaje matemático, el vector y su módulo se expresan como:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \rightarrow a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Se trata, pues, de un vector que tiene la **misma dirección y sentido que el vector  $\Delta \mathbf{v}$**  (ver figura inferior). Sus unidades en el S.I. son  $\text{m/s}^2$ .

**Aceleración media**



Para determinar el vector  $\Delta \vec{v}$ , se representan los vectores  $\vec{v}_0$  y  $\vec{v}$  con el mismo punto de aplicación, y se traza el vector que une el extremo del primero con el del segundo. De este modo:

$$\vec{v}_0 + \Delta \vec{v} = \vec{v} \rightarrow \Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Representado el vector  $\Delta \vec{v}$ , la aceleración media,  $\vec{a}_m$ , tiene su misma dirección y sentido; si la **trayectoria es curvilínea**, como la de la figura, el vector aceleración media **apunta hacia el interior de la trayectoria**, supuesta cerrada.

En una **trayectoria rectilínea en la que no hay cambio de sentido**, el módulo de la variación de velocidad es  $\Delta v = v - v_0$ , y el de la aceleración media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

- Aceleración instantánea

Si se calcula la aceleración media para un intervalo de tiempo muy pequeño (lo que se expresa matemáticamente como  $\Delta t \rightarrow 0$ ), se obtiene la aceleración en un instante de tiempo, o aceleración instantánea.

La **aceleración instantánea**,  $\mathbf{a}$ , indica la aceleración del móvil en cada instante de tiempo.

En lenguaje matemático, el vector se expresa como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Componentes intrínsecas de la aceleración

En la imagen de la página anterior se observa que en trayectorias curvilíneas la aceleración media (ocurre, en general, con la aceleración) apunta hacia el interior de la trayectoria.

En estas situaciones, interesa descomponer el vector en dos direcciones, una tangente a la trayectoria y otra perpendicular a esta. Se obtienen de este modo las **componentes intrínsecas de la aceleración** (ver figura interior):

- Aceleración tangencial,  $\vec{a}_t$



Es la componente que queda sobre la dirección tangente a la trayectoria, en la que también se encuentra el vector velocidad, e **informa sobre los cambios del módulo de la misma**.

Si la aceleración tangencial tiene el mismo sentido que la velocidad, su módulo aumenta, y si ambas magnitudes tienen sentidos contrarios, el módulo disminuye.

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$$

✚ Aceleración normal,  $\vec{a}_n$

Esta aceleración también se denomina **aceleración centrípeta**, y es la que queda en la dirección perpendicular a la tangente a la trayectoria. La aceleración normal **informa sobre los cambios de dirección** de la velocidad, esto es, hacia dónde se curva la trayectoria descrita por el móvil, y cómo de rápido lo hace.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

#### Acercaciones tangencial y normal

