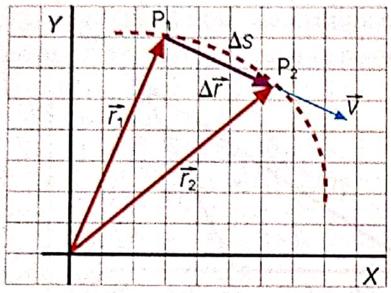
Una etapa del Giro femenino de Italia comenzó a las 13 h 00 min y terminó a las 15 h 48 min tras 107 km recorridos y después de subir y bajar varios puertos de montaña.



El cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo es el **vector velocidad media.**

El cociente entre la distancia recorrida medida sobre la trayectoria, Δs, y el intervalo de tiempo se denomina **celeridad media** o **rapidez.**

ACTIVIDADES

9 La velocidad media de los trenes de la línea 1 del metro de Madrid es de 21,4 km/h y su longitud se recorre en 55 min 30 s. ¿Cuál es su longitud?

Solución: 19,8 km

Cuando estudiamos el movimiento, una de las principales magnitudes que lo caracterizan es la **velocidad.** Es una magnitud que indica la rapidez con la que varía la posición de un móvil con relación al tiempo.

3.1. La velocidad media

Considera los datos de la foto y responde: ¿cuál fue la velocidad? Para calcular la velocidad de la etapa con los datos disponibles, dividimos los kilómetros recorridos por el tiempo empleado en recorrerlos. Pero ¿van a igual velocidad las ciclistas al subir una pendiente del 10 % que al bajar? Obviamente no; la velocidad en los distintos tramos no es siempre la misma. Lo que hemos calculado es la **velocidad media.** En general, el móvil cuyo movimiento estudiamos no lleva siempre el mismo ritmo, sino que –como es normal– va unas veces más rápido y otras más lento. Como la velocidad no es la misma en todos los tramos, y en ocasiones interesa conocer la velocidad media del recorrido, definimos esta así:

Velocidad media

La **velocidad media** para un recorrido (sin cambio de sentido) entre los puntos P_1 y P_2 que se inicia en t_1 y finaliza en t_2 es:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Como no solo interesa la rapidez del movimiento (que es lo que mide v_m), sino también la dirección, hay que definir el vector velocidad media:

Vector velocidad media

El **vector velocidad media** para un recorrido entre los puntos P_1 y P_2 que se inicia en el tiempo t_1 y finaliza en t_2 es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Este vector tiene:

- Módulo: $\frac{|\Delta \vec{r}\,|}{\Delta t}$. En general, $v_m \neq |\vec{v}_m|$ porque $\Delta s \neq |\Delta \vec{r}\,|$.
- Dirección: la misma que el vector desplazamiento, $\Delta \vec{r}$.
- Sentido: el del avance del movimiento.

EJEMPLO RESUELTO 4

El sonido tarda unos 10 s en recorrer 3,4 km en el aire. Calcula el tiempo que tardaremos en recibir el eco si gritamos frente a la ladera de una montaña situada a 680 m de distancia.

Primero, calcula la velocidad del sonido en el aire. La velocidad, que se supone constante, es:

$$v = \frac{\Delta s}{t_{eco}} = \frac{3400\ \text{m}}{10\ \text{s}} = \mathbf{340\ m/s}$$

A continuación, calcula el tiempo total que tarda el sonido en llegar a los 680 m de distancia, que es donde se produce el choque de las ondas con la montaña, y volver hacia nosotros debido a la reflexión de la onda sonora (eco).

$$v = \frac{\Delta s}{t_{eco}} \Rightarrow t_{eco} = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2 \cdot 680\ \text{m}}{340\ \text{m/s}} = \mathbf{4\ s}$$

3.2. La velocidad instantánea

Para describir el movimiento interesa conocer la **velocidad en cada momento.** Cuando nos fijamos en el velocímetro de un coche durante un viaje, observamos que la velocidad varía. Al final, para calcular la velocidad media del viaje realizamos el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado. Durante el viaje podemos hacer este cociente para un tiempo breve, 1 min. Así conocemos la velocidad media durante ese minuto. Podemos reducir el tiempo aún más, 5 s, y tendremos la velocidad media durante esos 5 s. Así, si reducimos el tiempo tanto como queramos, tendríamos:

Velocidad instantánea

La **velocidad instantánea** es:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Y el **vector velocidad instantánea** para un recorrido entre los puntos P_1 y P_2 muy próximos entre sí:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La definición de **velocidad instantánea** es más precisa cuanto menor sea el intervalo de tiempo, Δt. (Recuerda que $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$).

Observa cómo cambia la dirección de $\vec{v}$ a medida que $\Delta \vec{r}$ se hace más pequeño, hasta que es tangente a la curva en el punto A, donde estamos calculando la velocidad instantánea. Así, $\vec{v}$ indica la celeridad o rapidez (v), la dirección y el sentido del movimiento en cada instante.

EJEMPLO RESUELTO 5

Calcula la velocidad en el instante $t = 5$ s de un vehículo cuyo vector de posición es $\vec{r}(t) = 2 \cdot t^2\, \vec{j}$ m.

Haciendo la derivada, el límite del vector de posición frente al tiempo, encontrarás la velocidad instantánea para cada instante:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 \cdot (t + \Delta t)^2 \vec{j} - 2 \cdot t^2 \vec{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\cancel{2 \cdot t^2} + 4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot \Delta t^2)\vec{j} - \cancel{2 \cdot t^2}\vec{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t) \cdot \cancel{\Delta t}\, \vec{j}}{\cancel{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} (4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t)\, \vec{j} = 4 \cdot t\, \vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sustituye el valor del tiempo en el instante que interesa, $t = 5$ s:

$$\vec{v}(t = 5\ \text{s}) = 4 \cdot 5\ \vec{j}\ \text{m/s} = \mathbf{20\ \vec{j}\ m/s}$$

RECUERDA

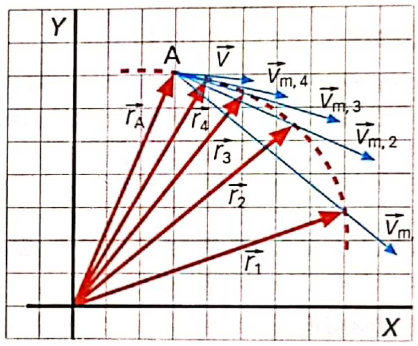
La derivada

En matemáticas hay un procedimiento basado en calcular un cociente cuando el denominador se va haciendo más y más pequeño cada vez. Es la **función derivada**. Se dice que $\vec{v}$ es el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero ($\Delta t \to 0$) y se escribe:

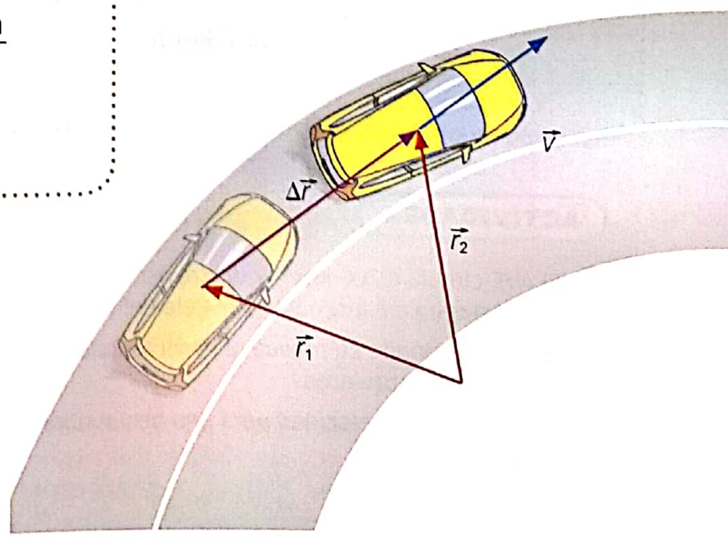
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Siendo $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.

GeoGebra



El vector velocidad instantánea en un punto es tangente a la trayectoria en ese punto.



Vehículo tomando una curva. Si un coche «pisa» una placa de hielo o una mancha de aceite, al tomar una curva seguirá su camino por la tangente, en la dirección que ya llevaba. Observa en el dibujo el vector $\vec{v}$, que tiene la misma dirección que $\Delta \vec{r}$.

3.3. La velocidad y el sistema de referencia

Cuando expresamos la velocidad de un móvil, solemos dar un valor único. Cada observador ofrecerá un valor dependiendo de su estado de movimiento.

Al ver pasar un autobús desde la ventana de un edificio, podemos afirmar que el autobús viaja a una determinada velocidad que llamaremos $\vec{v}_{obj}$. También vemos pasar a un ciclista con velocidad $\vec{v}_{sis}$, rebasado en su marcha por el autobús. El ciclista, ¿qué velocidad diría que lleva el autobús? Será una **velocidad relativa**, $\vec{v}_{rel}$. Es la velocidad del autobús observada por el ciclista.

El **movimiento es relativo**, depende del sistema de referencia que se use para su observación.

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{obj} - \vec{v}_{sis}$$

En los movimientos cotidianos se suele elegir un punto de la superficie de la Tierra como origen de coordenadas respecto al que medir $\vec{v}_{sis}$. Lo consideramos en reposo.

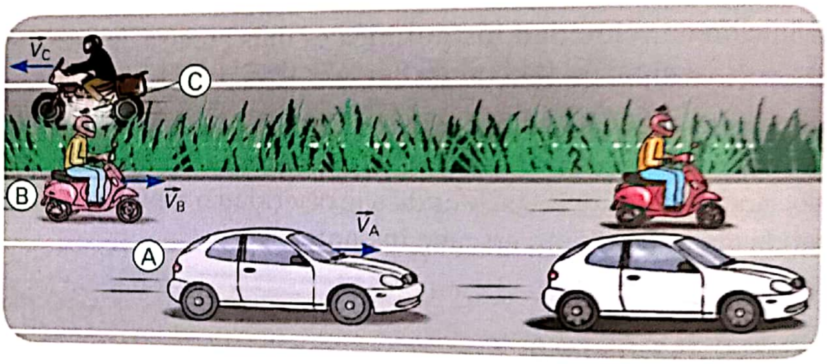
EJEMPLO RESUELTO 6

El coche A circula a 100 km/h, la moto B circula a 120 km/h, con una mosca adherida al casco, y la moto C circula a 110 km/h en sentido contrario según se ve en la figura. Todos estos son valores para un observador fijo fuera de la carretera. Calcula la velocidad de la moto B para los siguientes observadores:

a) El coche A.

b) La moto C.

c) La mosca.



Antes de empezar define los vectores usando como sistema de referencia la dirección de la carretera. Esta es el eje *X* positivo, hacia la derecha. Así definido tenemos que (medidas en km/h): $\vec{v}_A = 100\,\vec{i}$, $\vec{v}_B = 120\,\vec{i}$ y $\vec{v}_C = -110\,\vec{i}$.

a) Para calcular la velocidad de la moto B desde el coche A necesitas considerar $\vec{v}_{obj} = \vec{v}_B$ y $\vec{v}_{sis} = \vec{v}_A$.
La velocidad relativa será, por tanto:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{obj} - \vec{v}_{sis} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = 120\,\vec{i} - 100\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_{rel} = \mathbf{20\,\vec{i}\ km/h}$$

b) Para calcular la velocidad de la moto B desde la moto C necesitas considerar $\vec{v}_{obj} = \vec{v}_B$ y $\vec{v}_{sis} = \vec{v}_C$.
La velocidad relativa será, por tanto:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{obj} - \vec{v}_{sis} = \vec{v}_B - \vec{v}_C = 120\,\vec{i} - (-110\,\vec{i})$$

$$\vec{v}_{rel} = \mathbf{230\,\vec{i}\ km/h}$$

c) Para calcular la velocidad de la moto B desde la mosca necesitas considerar $\vec{v}_{obj} = \vec{v}_B$ y $\vec{v}_{sis} = \vec{v}_B$ (ya que la mosca viaja a la misma velocidad que la moto).
La velocidad relativa será, por tanto:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{obj} - \vec{v}_{sis} = \vec{v}_B - \vec{v}_B = 120\,\vec{i} - 120\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_{rel} = \mathbf{0\,\vec{i}\ km/h}$$

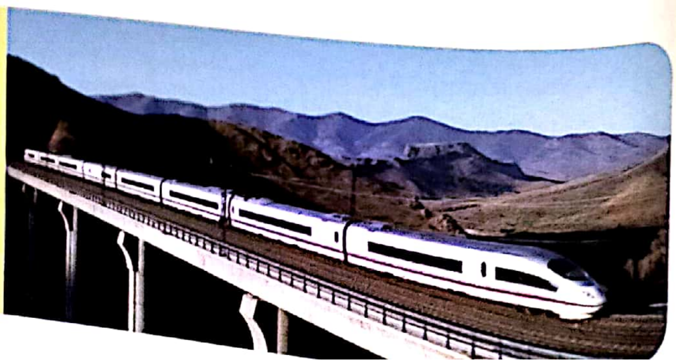
ACTIVIDADES

10 El AVE circula a 300 km/h y una revisora se mueve por el pasillo a 6 km/h hacia la cola del tren.

a) ¿Hacia dónde se mueve la revisora, hacia la derecha o hacia la izquierda?

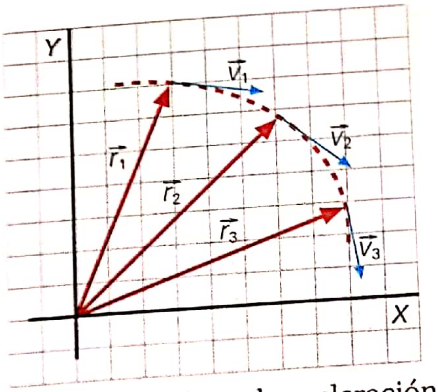
b) ¿Cuál es su velocidad para una observadora fuera del tren?

Solución: b) 294 km/h



4. La aceleración

Si sobre un cuerpo no actuase ninguna influencia externa, este se movería en línea recta y con velocidad constante. Son esas influencias, llamadas interacciones o fuerzas, las que hacen que cambie la velocidad del movimiento (módulo, dirección o sentido). Es justamente este cambio del estado del movimiento lo que llamamos **aceleración**.



Al hablar en física de aceleración describimos **cómo cambia el vector velocidad**: cómo varían el módulo, la dirección o el sentido.
En el lenguaje común solo significa «ir más rápido».

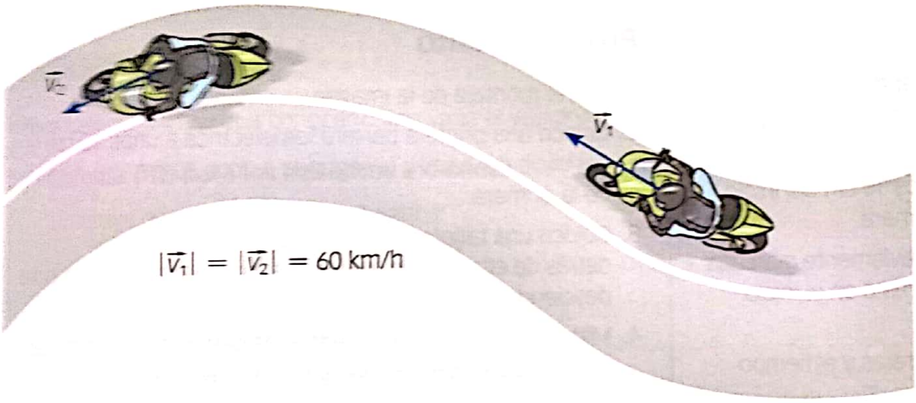
Aceleración media

La **aceleración media** se define como la variación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{t_f - t_0}$$

En el SI, el módulo de la aceleración media se mide en m/s^2.

En el siguiente dibujo, la moto traza la curva a 60 km/h. El módulo de la velocidad no cambia, pero sí cambia su dirección. El vector velocidad no es constante y, por tanto, existe aceleración.



Al tomar la curva, la **dirección** del vector velocidad cambia.

Igual que ocurría cuando estudiábamos la velocidad, al tomar intervalos de tiempo muy pequeños la función media se acerca a instantánea. Así, la aceleración media se hace instantánea al calcular el límite cuando el incremento del tiempo tiende a cero, $\Delta t \rightarrow 0$.

Aceleración instantánea

La **aceleración instantánea** es:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En los movimientos rectilíneos, $\vec{a}$ es un vector cuya dirección coincide con la de $\vec{v}$. Aunque el sentido puede ser igual u opuesto al de la velocidad.

RECUERDA

La operación matemática **derivada** nos permite calcular el valor de la velocidad instantánea cuando se expresa la posición en función del tiempo.

También se utiliza la operación derivada para calcular la **aceleración instantánea** cuando expresamos la velocidad en función del tiempo.

Siendo $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$.

RECUERDA

Un **MRUA** (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado) es aquel que tiene aceleración constante.

EJEMPLO RESUELTO 7

Calcula la aceleración instantánea de un móvil que se mueve según el vector velocidad: $\vec{v} = 6 \cdot t\ \vec{i}$ m/s.

Sabemos que la aceleración instantánea es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Para calcularla usa la expresión de la aceleración instantánea:

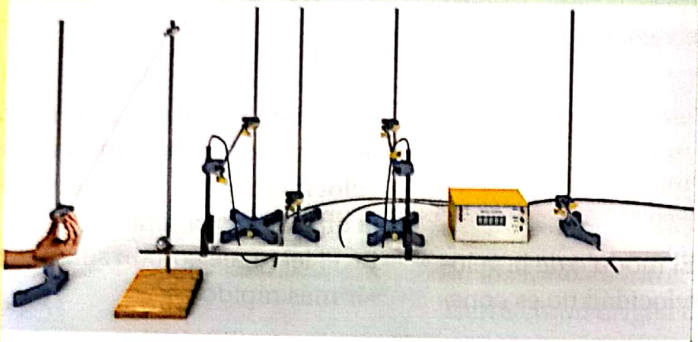
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6 \cdot (t + \Delta t)\ \vec{i} - 6 \cdot t\ \vec{i}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6 \cdot \cancel{\Delta t}\ \vec{i}}{\cancel{\Delta t}} = \mathbf{6\ \vec{i}\ \frac{m}{s^2}}$$

El vector aceleración de este móvil tiene una componente positiva con valor 6 en el eje X y es constante, ya que no depende del tiempo.

Estudiar el MRU y el MRUA

Experimentalmente no es fácil lograr un MRU. Hay que minimizar el efecto del rozamiento, lo que puede requerir inclinar ligeramente el riel sobre el que corre la bola de metal. Para que la velocidad sea la misma en todas las mediciones, dejaremos caer un péndulo desde una altura prefijada con una guía.

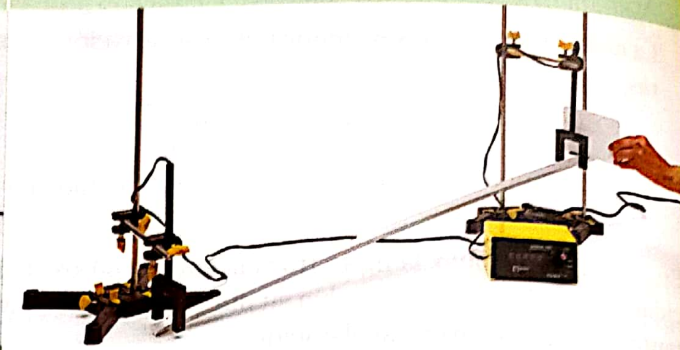
MRU



Procedimiento

1. Haz el montaje de la imagen. Comprueba que cuando la bola del péndulo está vertical, coincide con la bola que está sobre el carril.
2. Coloca una barrera fotoeléctrica a unos 10 cm del inicio del carril y otra a unos 20 cm de la primera.
3. Lleva la bola del péndulo a la altura previamente marcada y suéltala para que golpee la bola que está en el inicio del carril.
4. Mide y anota la distancia entre las barreras y el tiempo que ha tardado la bola en recorrerla.
5. Desplaza la segunda barrera para que esté a unos 40 cm de la primera. Repite los pasos 3 y 4.
6. Repite el paso 5 haciendo que la segunda barrera esté a 60 cm y a 80 cm de la primera.

MRUA



Procedimiento

1. Haz el montaje de la imagen.
2. Coloca una primera barrera fotoeléctrica a unos 10 cm del inicio del carril y la segunda a unos 20 cm de la primera.
3. Coloca una tarjeta delante de la primera barrera y, detrás de ella, la bola. Levanta la tarjeta y deja que la bola descienda.
4. Mide y anota la distancia entre las barreras fotoeléctricas y el tiempo empleado por la bola en recorrerla.
5. Desplaza la segunda barrera para que esté a unos 40 cm de la primera. Repite el procedimiento indicado en los puntos 3 y 4.
6. Repite el paso 5 haciendo que la segunda barrera esté a 60 cm y a 80 cm de la primera.

Resultados

Haz en tu cuaderno una tabla como esta y complétala para cada una de las cuatro medidas realizadas.

	MRU		MRUA	
Medida 1	$s_1 =$	$t_1 =$	$s_1 =$	$t_1 =$
…	…	…	…	…

ACTIVIDADES

11. Para cada movimiento, representa s frente a t. Analiza la gráfica e indica la relación entre las variables.
12. En el MRU, ¿se ha mantenido constante la velocidad? Justifícalo. Si no es así, explica el motivo.
13. En el MRUA, representa gráficamente s frente a t^2. Deduce de ellos la aceleración del movimiento.
14. Compara los datos de los diferentes grupos de la clase y determina la relación entre:
    a) La velocidad del MRU y la altura desde la que se deja caer la bola del péndulo.
    b) La aceleración del MRUA y la inclinación del perfil en «V» de aluminio.

SOLUCIÓN

1. **Comprende el enunciado.**

Datos conocidos	Resultados a obtener
• Vector de posición $\vec{r}$ en función del tiempo. • Instantes inicial $t = 0$ s y final $t = 5$ s.	• Vector $\vec{v}_m$ entre $t = 0$ s y $t = 5$ s. • Vector $\vec{a}_m$ entre $t = 0$ s y $t = 5$ s.

Apartado A

Para calcular $\vec{v}_m$ hay que conocer cómo varía el vector $\vec{r}(t)$.

2. **Calcula $\vec{r}(t)$ para los instantes indicados.**

Sustituye para los instantes señalados:

$$\vec{r}(t) = 3 \cdot t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$$

- Instante inicial, $t = 0$ s:

$$\vec{r}(t = 0\text{ s}) = 3 \cdot 0\,\vec{i} + 0^2\,\vec{j} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j}\text{ m}$$

Es decir, la partícula parte del origen de coordenadas.

- Instante final, $t = 5$ s:

$$\vec{r}(t = 5\text{ s}) = 3 \cdot 5\,\vec{i} + 5^2\,\vec{j} = 15\,\vec{i} + 25\,\vec{j}\text{ m}$$

3. **Determina el valor de $\Delta\vec{r}$.**

A partir del valor de $\vec{r}$ en $t = 0$ y $t = 5$ s.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 5\text{ s}) - \vec{r}(t = 0\text{ s})$$
$$\Delta\vec{r} = (15\,\vec{i} + 25\,\vec{j}) - (0\,\vec{i} + 0\,\vec{j})$$
$$\Delta\vec{r} = 15\,\vec{i} + 25\,\vec{j}\text{ m}$$

4. **Determina la velocidad media, $\vec{v}_m$.**

Se sabe que $\Delta t = 5\text{ s} - 0\text{ s} = 5$ s.

A partir de la definición de velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{15\,\vec{i} + 25\,\vec{j}\text{ m}}{5\text{ s}} = \frac{15\,\vec{i}}{5} + \frac{25\,\vec{j}}{5}\text{ m/s}$$
$$\vec{v}_m = 3\,\vec{i} + 5\,\vec{j}\text{ m/s}$$

5. **Calcula el módulo de la velocidad media.**

A partir del vector $\vec{v}_m$ y aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v}_m| = |3\,\vec{i} + 5\,\vec{j}|$$
$$|\vec{v}_m| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}\text{ m/s}$$
$$|\vec{v}_m| \approx \mathbf{5{,}83\text{ m/s}}$$

Apartado B

Para calcular $\vec{a}_m$ hay que conocer cómo varía el vector $\vec{v}(t)$.

6. **Expresa $\vec{v}$ en función del tiempo.**

Según la definición de la velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Opera:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[3(t + \Delta t)\,\vec{i} + (t + \Delta t)^2\,\vec{j}] - [3\,t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}]}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3\,\Delta t\,\vec{i} + 2 \cdot t \cdot \Delta t\,\vec{j} + \Delta t \cdot \Delta t\,\vec{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (3\,\vec{i} + 2 \cdot t\,\vec{j} + \Delta t\,\vec{j})$$

$$\vec{v} = 3\,\vec{i} + 2 \cdot t\,\vec{j} + 0\,\vec{j} = 3\,\vec{i} + 2 \cdot t\,\vec{j}\text{ m/s}$$

7. **Determina $\vec{v}(t)$ para los instantes indicados.**

Sustituye para $t = 0$ s y $t = 5$ s:

$$\vec{v}(t) = 3\,\vec{i} + 2 \cdot t\,\vec{j}$$

- Instante inicial, $t = 0$ s:

$$\vec{v}(t = 0\text{ s}) = 3\,\vec{i} + 2 \cdot 0\,\vec{j} = 3\,\vec{i}\text{ m/s}$$

- Instante final, $t = 5$ s:

$$\vec{v}(t = 5\text{ s}) = 3\,\vec{i} + 2 \cdot 5\,\vec{j} = 3\,\vec{i} + 10\,\vec{j}\text{ m/s}$$

8. **Calcula el vector $\vec{a}_m$.**

A partir de su definición:

$$a_m = \frac{\vec{v}_{\text{final}} - \vec{v}_{\text{inicial}}}{\Delta t} = \frac{(3\,\vec{i} + 10\,\vec{j}) - (3\,\vec{i})}{5 - 0} = \mathbf{2\,\vec{j}\,\frac{m}{s^2}}$$

9. **Calcula el módulo del vector $\vec{a}_m$.**

Como el vector $\vec{a}_m$ solamente tiene una componente, el módulo es **2 m/s²**.

10. **Evalúa el resultado.**

El vector $\vec{v}_m$ tiene una componente en el eje horizontal que no depende del tiempo; es constante. Sin embargo, como la componente vertical sí depende del tiempo, habrá una aceleración. El móvil lleva una trayectoria curvilínea.

4.1. Componentes intrínsecos de la aceleración

Al variar el vector velocidad puede cambiar su módulo o su dirección. Por eso definimos estas componentes:

- **Aceleración tangencial, $\vec{a}_T$**: cuando cambia el módulo de la velocidad.
- **Aceleración normal, $\vec{a}_N$**: cuando cambia la dirección de la velocidad.

Componentes de la velocidad

Podemos expresar el vector velocidad así:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_T$$

donde $\vec{u}_T$ es un vector de módulo uno con dirección tangente a la trayectoria. Entonces:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_T)}{dt}$$

Derivamos según la regla del producto:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_T}_{\vec{a}_T} + \underbrace{v \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt}}_{\vec{a}_N} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Vemos que $\vec{a}_T$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{u}_T$. $\vec{a}_N$ es perpendicular a $\vec{a}_T$.

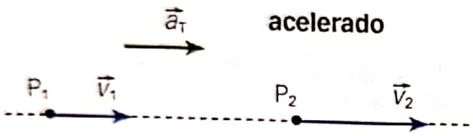
La aceleración tangencial

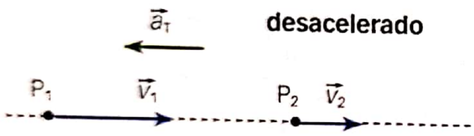
En el lenguaje común llamamos aceleración a la **aceleración tangencial**.

Aceleración tangencial

La aceleración tangencial indica cómo cambia el módulo de la velocidad con el tiempo.

$$\vec{a}_T = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \vec{u}_T$$





En los **movimientos rectilíneos:**

- Cuando el módulo de la velocidad aumenta, el sentido de $\vec{a}_T$ coincide con el sentido de la velocidad.
- Cuando el módulo de la velocidad disminuye, el sentido de $\vec{a}_T$ es contrario al sentido de la velocidad.

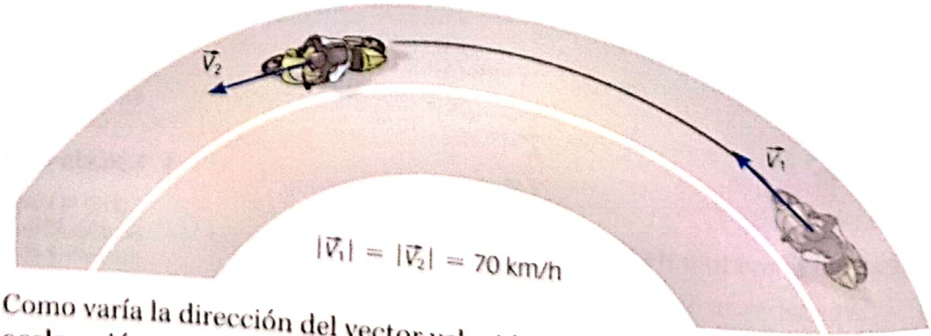
La aceleración tangencial es un vector que tiene la misma dirección que el vector velocidad.

- Tiene el mismo sentido del movimiento si el módulo de la velocidad aumenta.
- Tiene el sentido contrario al movimiento si el módulo de la velocidad disminuye.

La aceleración normal

Piensa en una moto que toma una curva manteniendo constante el módulo del vector velocidad (70 km/h). En este caso, la dirección del vector velocidad cambia continuamente, pero el módulo no varía; es decir, la aceleración tangencial es cero.

Aunque la moto toma la curva con el módulo de la velocidad constante, la dirección del vector cambia. Esta variación la mide la **aceleración normal**.



Como varía la dirección del vector velocidad, existe una aceleración llamada **aceleración normal o centrípeta**, $\vec{a}_N$. Siempre con $|\vec{v}|$ constante.

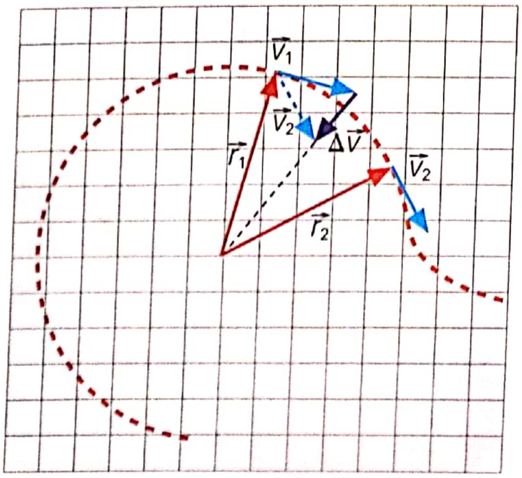
$$\vec{a}_N = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t}$$

Se llama **aceleración centrípeta** porque el vector $\vec{a}_N$ va dirigido hacia el centro de la curva.

- La **dirección** de la aceleración normal.

Tomando un intervalo de tiempo muy pequeño podemos ver que $\vec{a}_N$ apunta hacia el centro de la circunferencia (o el centro de curvatura). Por esta razón la aceleración normal es también un vector cuya dirección es la misma que el radio de curvatura.

La **aceleración normal** tiene la dirección del radio de curvatura y el sentido hacia el centro de la curva.



Al calcular $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ observamos que apunta hacia el centro de la circunferencia. Por tanto, la aceleración normal también lo hace. Por eso se la denomina **aceleración centrípeta.**

- El **módulo** de la aceleración normal.

En el valor de la aceleración normal de la moto que toma una curva solo influyen el módulo de la velocidad, $|\vec{v}|$, de la moto y R, el radio de la curva. Cuanto más rápido vaya la moto y cuanto más cerrada sea la curva, más intensa es la aceleración normal.

Aceleración normal

Esta expresión permite calcular el **módulo de la aceleración normal:**

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

EJEMPLO RESUELTO 8

¿Cómo se modifica el valor de la aceleración normal cuando la velocidad se triplica sin modificar el radio de la trayectoria?

Como a_N depende del cuadrado de la velocidad, se hace nueve veces mayor. En efecto:

$$\frac{a_{N,2}}{a_{N,1}} = \frac{\frac{(v_2)^2}{\cancel{R}}}{\frac{(v_1)^2}{\cancel{R}}} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot \cancel{v_1}}{\cancel{v_1}}\right)^2 = 9 \Rightarrow \boldsymbol{a_{N,2} = 9 \cdot a_{N,1}}$$

$a_{N,1}$ y $a_{N,2}$ son las aceleraciones correspondientes a las velocidades v_1 y v_2, respectivamente.

ACTIVIDADES

15 Imagina que te llevan en coche por una curva con forma de arco de circunferencia con velocidad constante. Como te han vendado los ojos y tapado los oídos, solo puedes notar que te estás moviendo porque hay aceleración (si el movimiento fuese uniforme y en línea recta, no te darías cuenta).

a) ¿De qué factores depende que notes más o menos que el coche está tomando una curva? O, dicho de otra manera, ¿de qué depende la aceleración normal de este movimiento circular uniforme?

b) ¿Qué magnitudes físicas relacionadas con la trayectoria y la forma de recorrerla influyen en que se note más el cambio de dirección?

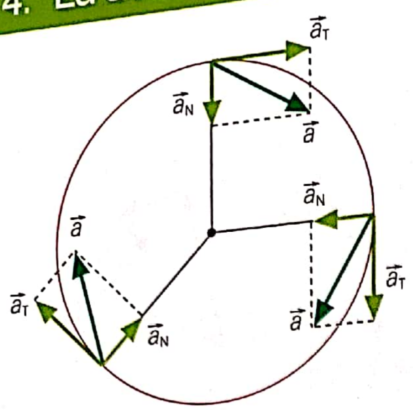
16 ¿Qué factor influye más en a_N, la velocidad o el radio de la curva? Supón que decides duplicar tu velocidad en una curva (de v a $2 \cdot v$) y, para compensar, pides al Ministerio de Fomento que haga la curva más abierta, duplicando también su radio (de R a $2 \cdot R$).

a) Calcula la expresión del módulo de la aceleración normal antes y después de duplicar la velocidad.

b) Halla los valores numéricos de a_N para una curva de 20 m de radio tomada a 60 km/h.

c) Averigua el valor de a_N para otra curva de 40 m de radio que se toma a una velocidad de 120 km/h. Compara los resultados con los obtenidos en el apartado anterior.

Solución: b) $13,\widehat{8}$ m/s²; c) $27,\widehat{7}$ m/s²

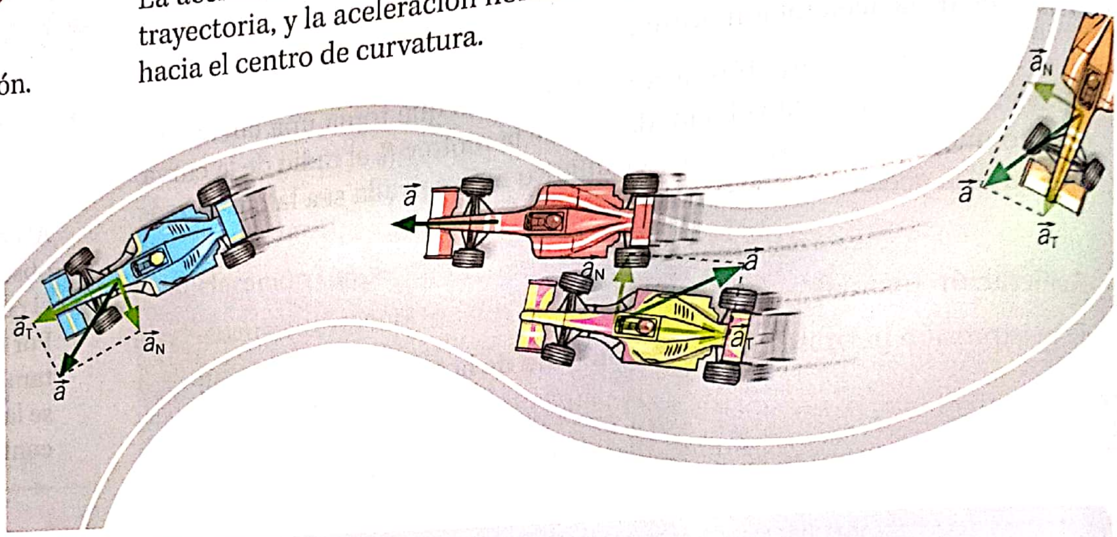


Componentes de la aceleración.

4.2. Las componentes de la aceleración también son vectores. El módulo de la aceleración

En un movimiento general, que no sea rectilíneo ni uniforme ni circular, la aceleración tendrá componentes tangencial y normal. Tangencial, porque varía el módulo de la velocidad; y normal, porque también lo hace la dirección de la misma. Resulta que el vector aceleración siempre es la suma de esas dos componentes perpendiculares entre sí.

La aceleración tangencial es paralela a la velocidad, es decir, tangente a la trayectoria, y la aceleración normal es perpendicular a la velocidad, dirigida hacia el centro de curvatura.



En una carrera de Fórmula 1, la velocidad cambia constantemente en módulo y dirección; por tanto, existen $\vec{a}_N$ y $\vec{a}_T$.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Según el teorema de Pitágoras, el módulo de $\vec{a}$ se podrá expresar así:

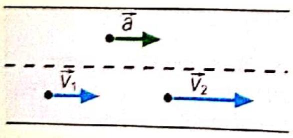
$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

Como $\vec{a}_N$ y $\vec{a}_T$ son **perpendiculares**, se puede aplicar el teorema de Pitágoras para calcular $|\vec{a}|$.

Según la dirección y el sentido entre el vector velocidad inicial y el vector aceleración, obtenemos distintas situaciones.

Aceleración de un móvil en distintas situaciones

A. Acelera en una recta.

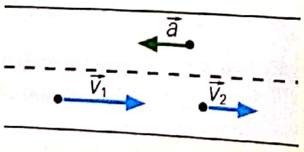


$a_N = 0$

$\vec{a} = \vec{a}_T$

$\vec{a}$ tiene la misma dirección y sentido que la velocidad $\vec{v}$.

B. Frena en una recta.

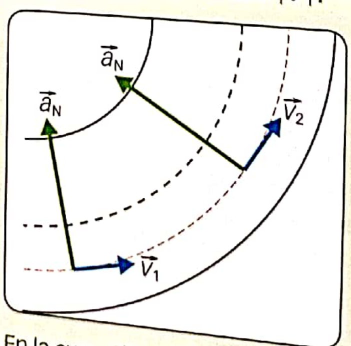


$a_N = 0$

$\vec{a} = \vec{a}_T$

$\vec{a}$ tiene la misma dirección y sentido contrario a la velocidad $\vec{v}$.

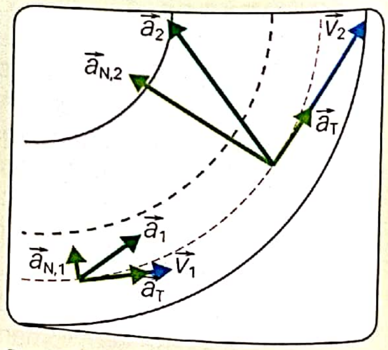
C. Toma una curva a velocidad constante en módulo $|\vec{v}|$.



En la curva $\vec{a}_N$ es perpendicular a $\vec{v}$.

- $a_T = 0$
- $a_N = \dfrac{v^2}{R}$
- $\vec{a} = \vec{a}_N$

D. Toma una curva variando la dirección y el módulo de la velocidad (acelerando en este caso).



En este caso la aceleración es la suma de las dos componentes.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

La aceleración y el sistema de referencia

bservador sometido a aceleración percibe el movimiento de los objetos de diferente a como lo hace un observador en reposo. La **observadora en** so en el banco, en la imagen (B), ve al ciclista (A) desarrollar una acelera- $\vec{a}_{obj}$ y también ve al **observador en movimiento** (C) deslizándose con una ración $\vec{a}_{sis}$. Mientras, el observador en movimiento puede ver que el ciclis- a una aceleración $\vec{a}_{rel}$. Sin embargo, el movimiento del ciclista es uno.

relación entre estas tres aceleraciones es:

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{obj} - \vec{a}_{sis}$$

stemas de referencia se clasifican en inerciales y no inerciales.

sistema de referencia inercial es aquel en que $\vec{a}_{sis} = \vec{0}$. Puede darse o no e entre los dos observadores haya movimiento; si hay movimiento, ha de con velocidad constante. En este caso, $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{obj}$.

sistema de referencia no inercial es aquel donde $\vec{a}_{sis} \neq \vec{0}$. Sí hay movi- ento entre ambos observadores y es acelerado.

erra es nuestro sistema de referencia inercial habitual, pero gira sobre sí a y este giro lleva consigo una aceleración centrípeta. Al estudiar el movi- to de objetos sobre la superficie terrestre próximos entre sí, no la tenemos enta, pues todos experimentan la misma aceleración. Pero al estudiar el miento de objetos alejados de la superficie, no se puede despreciar.

El movimiento del ciclista se describe de diferente manera desde el tobogán, movimiento acelerado, que desde un asiento en reposo junto a la calzada.

EMPLOS RESUELTOS 9 Y 10

Un ascensor se eleva con aceleración 0,2 m/s² dirigida hacia arriba. Un objeto cae desde cierta altura por la gravedad con $a = 9,8$ m/s². Un observador en el ascensor, ¿qué aceleración percibe del objeto que cae?

Definimos los vectores que intervienen: $\vec{a}_{sis} = +0,2\,\vec{j}$ m/s²; $\vec{a}_{obj} = -9,8\,\vec{j}$ m/s².

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{obj} - \vec{a}_{sis} = (-9,8\,\vec{j}\ \text{m/s}^2) - (+0,2\,\vec{j}\ \text{m/s}^2) = \mathbf{-10\,\vec{j}\ m/s^2}$$

El observador que asciende con el ascensor acelerado percibe la caída del objeto con mayor aceleración que otro observador en reposo desde el suelo.

Desde un carrusel con velocidad de 3,5 m/s y radio 7 m, una persona ve cómo cae un objeto, bajo la acción de la gravedad, 9,8 m/s², desde cierta altura. La persona del carrusel, ¿qué aceleración percibe del objeto que cae?

Vectores que intervienen: $\vec{a}_{sis} = v^2/R\,\vec{i} = (3,5\ \text{m/s})^2/7\,\vec{i} = 1,75\,\vec{i}$ m/s²; $\vec{a}_{obj} = -9,8\,\vec{j}$ m/s². Aplicando la relación definida:

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{obj} - \vec{a}_{sis} = (-9,8\,\vec{j}\ \text{m/s}^2) - (+1,75\,\vec{i}\ \text{m/s}^2) = \mathbf{-1,75\,\vec{i}\ m/s^2 - 9,8\,\vec{j}\ m/s^2}$$

ACTIVIDADES

Observa la figura. El Sol, la Tierra y Marte pueden estar alineados. Si la Tierra está entre Marte y el Sol, se llama oposición. Si el Sol está entre Marte y la Tierra, se llama conjunción. Calcula el módulo de la aceleración relativa de Marte para un observador en la Tierra.

a) En oposición.

b) En conjunción.

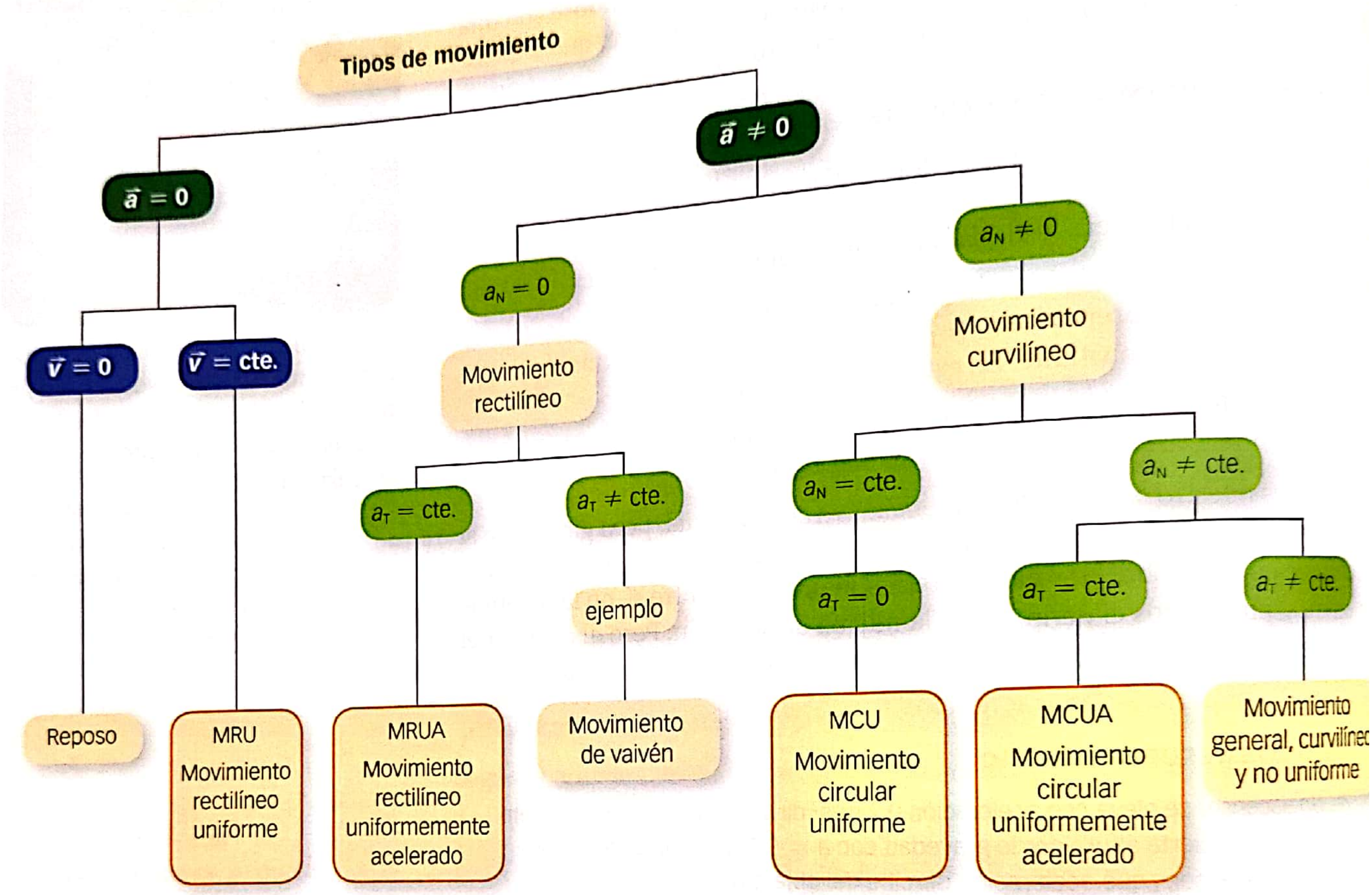
Datos: periodos de traslación: $T_{Marte} = 687$ días, $T_{Tierra} = 365,25$ días; radios orbitales: $r_{Marte} = 2,3 \cdot 10^8$ km, $r_{Tierra} = 1,5 \cdot 10^8$ km

Solución: a) $3,36 \cdot 10^{-3}$ m/s²; b) $8,52 \cdot 10^{-3}$ m/s²

Conjunción y oposición de Marte.

4.4. Clasificación de los movimientos según su aceleración

La clasificación de los movimientos según su aceleración nos ayuda a identificarlos.



Determinando la velocidad y la aceleración podemos clasificar los diferentes tipos de movimiento:

- MRU $\longrightarrow \begin{cases} v = \text{cte.} \\ \vec{a} = 0 \end{cases}$
- MRUA $\rightarrow \begin{cases} a_N = 0 \\ a_T = \text{cte.} \end{cases}$
- MCU $\longrightarrow \begin{cases} a_N = \text{cte.} \neq 0 \\ a_T = 0 \end{cases}$
- MCUA $\rightarrow \begin{cases} a_N \neq 0 \\ a_T = \text{cte.} \end{cases}$

ACTIVIDADES

18 Adapta el dibujo del cuadro «Aceleración en distintas situaciones», punto D, al caso en que se toma la misma curva, pero frenando.

19 Clasifica estos movimientos usando las categorías anteriores:

a) Una estudiante da siete vueltas a ritmo constante a una pista de atletismo.

b) Otro estudiante corre una carrera de 100 m.

c) Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra en una órbita perfectamente circular a velocidad constante dando una vuelta completa cada 11 horas.

d) Un trabajador va todos los días (laborables) a trabajar en tren recorriendo 35 km en 30 minutos.

e) Un autobús recorre un tramo recto de autopista a una velocidad de 90 km/h.

f) Movimiento de un punto del tambor de una lavadora cuando esta comienza a centrifugar.