# 8 El movimiento

## ¿Cómo determinar la posición exacta?

Imagina una avería de una bici, una moto o un coche en carretera. En muchos casos será necesario llamar para pedir asistencia técnica. ¿Cómo se determina la posición del vehículo? Pues, generalmente, indicando en qué carretera está y en qué kilómetro de la misma ha ocurrido el percance.

Para fijar las distancias en una carretera se toma como origen (km 0) una intersección con otra carretera o el centro de una ciudad, por ejemplo. En la calzada, unos postes separados normalmente un kilómetro unos de otros ayudan a fijar nuestra posición sobre el mapa. De esta manera, es fácil indicar a otras personas en qué lugar de una carretera determinada nos encontramos.

## RECUERDO LO QUE SÉ

- ¿Cuál es la diferencia entre la velocidad media durante un trayecto y la velocidad instantánea?
- ¿Depende el consumo de combustible de un coche únicamente de la velocidad media mantenida durante su recorrido?
- Pon ejemplos de movimientos donde la velocidad instantánea coincida con la velocidad media.

## INTERPRETO LA IMAGEN

Observa la imagen. La estela se forma cuando el vapor de agua expulsado por el avión se condensa al entrar en contacto con materia de la atmósfera a una temperatura mucho más baja.

- ¿Qué relación guardan las marcas dejadas en el cielo con la trayectoria del avión?
- ¿Qué tipo de trayectoria lleva el avión en ese tramo?
- ¿Puedes saber a partir de la imagen si el avión está acelerando o frenando? Justifica tu respuesta.

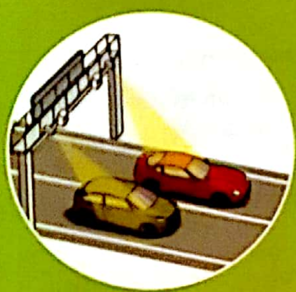
## EN ESTA UNIDAD...

1 **Introducción**

2 **La posición**

3 **La velocidad**

4 **La aceleración**



**APLICO LO APRENDIDO**
Controles de velocidad en tramo

# 1. Vectores

## Magnitudes vectoriales

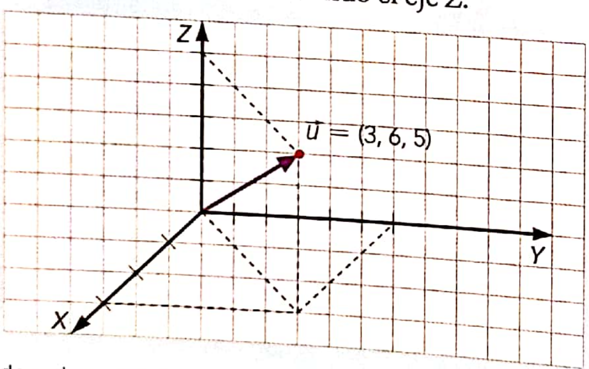
Hay magnitudes que quedan perfectamente definidas por un número con las unidades apropiadas. Por ejemplo, la temperatura. Basta decir que su valor es de 3 °C. Sin embargo, si queremos describir completamente el viento, no basta decir que su velocidad es de 85 km/h, porque ¿hacia dónde sopla?

Decimos que una magnitud es **vectorial** cuando, además de intensidad o **módulo** (dado por un número), tiene **dirección y sentido.**

Para distinguir las magnitudes vectoriales pondremos una flecha sobre la letra que las represente, por ejemplo, $\vec{v}$. La misma letra sin la flecha representará el módulo del vector, $v$.

## Componentes de un vector

Para trabajar con vectores resulta útil expresarlos en sus componentes. Si llamamos $\vec{u}$ a un vector cualquiera, nosotros trabajaremos con sus componentes cartesianas, a las que llamaremos $(u_x, u_y)$ en los ejes $X$ e $Y$ en el plano y $(u_x, u_y, u_z)$ en el espacio añadiendo el eje $Z$.




Coordenadas cartesianas en el espacio: $u_x = 3$, $u_y = 6$ y $u_z = 5$.

## Módulo de un vector

Es la «intensidad» de la magnitud que representa. En dos dimensiones, lo calculamos con el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{u}| = u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Es fácil generalizar a tres dimensiones:

$$|\vec{u}| = u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

## Multiplicación de un vector por un número

Al multiplicar un vector $\vec{u}$ por un número $c$ (escalar), el resultado es un vector $c \cdot \vec{u}$ de la misma dirección. El valor de su módulo es $|c| \cdot |\vec{u}|$.

- Si $c$ es positivo, $\vec{u}$ y $c \cdot \vec{u}$ tienen la misma dirección y sentido.
- Si $c$ es negativo, $c \cdot \vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}$.

## Vector unitario

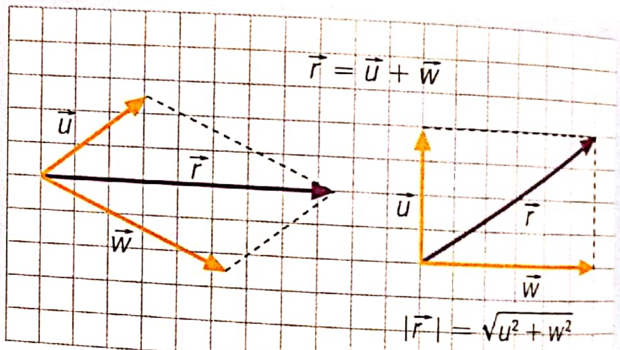
Un **vector unitario** es aquel que tiene módulo unidad. S consigue al dividir un vector por su módulo.

$\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son vectores unitarios en la dirección de los eje cartesianos.

## Suma y resta de vectores

Para **sumar** vectores gráficamente se emplea la «regla d paralelogramo». Se construye un paralelogramo uniend los vértices de cada vector y se cierra con los paralelos d cada uno. La diagonal del paralelogramo es el vecto suma.

Si los vectores forman un ángulo de 90°, la suma es la dia gonal del paralelogramo y el módulo del vector suma s calcula con el teorema de Pitágoras.




Suma de vectores.

La **resta** $\vec{u} - \vec{w}$ no es más que la suma de $\vec{u}$ y $-\vec{w}$:

$$\vec{u} - \vec{w} = \vec{u} + (-\vec{w})$$

Para sumar y restar vectores se opera componente a componente:

$$\vec{u} + \vec{w} = (u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}) + (w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k})$$

$$\vec{u} + \vec{w} = (u_x + w_x)\vec{i} + (u_y + w_y)\vec{j} + (u_z + w_z)\vec{k}$$

Es decir, para sumar dos vectores debemos sumar la componente $x$ de un vector y la componente $x$ del otro. Y hacer lo mismo con las componentes $y$ y $z$.

**ACTIVIDADES**

**1** Calcula el módulo del vector $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Solución: $|\vec{a}| = 3$

**2** Dados los siguientes vectores:

- $\vec{u} = -\vec{j} + 2\vec{k}$
- $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$

a) Calcula el producto $-4 \cdot \vec{u}$.

b) Realiza gráfica y algebraicamente la suma $\vec{u} + \vec{v}$.

c) Realiza gráfica y algebraicamente la resta $\vec{v} - \vec{u}$.

Solución: a) $4\vec{j} - 8\vec{k}$; b) $\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$; c) $\vec{i} + \vec{j}$

## 1. Sistema de referencia y posición

Un cuerpo se mueve cuando cambia de posición con respecto a un punto fijo a medida que pasa el tiempo.

Cuando estás sentado en un autobús en marcha, te mueves con respecto a un observador que tenga como referencia la calle, pero no te mueves con respecto a otra persona que está en el propio autobús. El movimiento es relativo, ya que depende del sistema de referencia.

Un **sistema de referencia** es un punto que utilizamos para determinar si un cuerpo se mueve.

- Un cuerpo está **en movimiento** si cambia de posición con respecto al sistema de referencia.
- Está **en reposo** si su posición no cambia.

El **vector de posición**, $\vec{r}$, tiene su origen en el origen del sistema de referencia y su extremo en el punto donde se encuentra el cuerpo.

La posición es una magnitud vectorial. En el sistema internacional (SI) se mide en metros, m.

## 2. La trayectoria y el desplazamiento

La **trayectoria** es el camino que describe el cuerpo que se mueve. Es el conjunto de puntos por los que pasa un móvil en su movimiento.

El movimiento puede ser:

- **Rectilíneo**, si la trayectoria es una línea recta.
- **Curvilíneo**, si la trayectoria es una línea curva.

La distancia sobre la trayectoria medida en unidades de longitud es el **espacio recorrido**, *s*.

Se llama **desplazamiento**, $\Delta\vec{r}$, de un móvil a un vector que tiene su origen en el punto inicial del movimiento y su extremo en el punto final.


El módulo del vector desplazamiento, $\Delta\vec{r}$, coincide con la distancia mínima que separa esos dos puntos.

El desplazamiento solo coincide con el espacio recorrido por el móvil cuando la trayectoria es una línea recta y no varía el sentido del movimiento.

## 3. La velocidad

Se llama **velocidad**, $\vec{v}$, de un móvil al desplazamiento que experimenta por unidad de tiempo.
La velocidad media en un intervalo de tiempo:

$$\vec{v} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_0}{t_f - t_0} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La velocidad es una **magnitud vectorial**. En el SI se mide en m/s. 1 m/s = 3,6 km/h.

El vector velocidad es un vector que siempre es tangente a la trayectoria.

GeoGebra

## 4. La aceleración

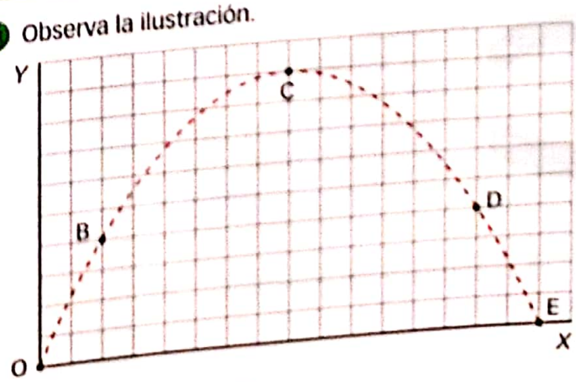
La **aceleración**, $\vec{a}$, es una magnitud que mide lo que varía la velocidad de un móvil por unidad de tiempo.
La aceleración media en un intervalo de tiempo es:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{t_f - t_0} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La aceleración es una **magnitud vectorial**. En el SI se mide en (m/s)/s = m/s².

### ACTIVIDADES

**3** Observa la ilustración.




Dibuja en tu cuaderno:

a) El vector de posición para cada uno de los puntos señalados: B, C, D y E.

b) El vector desplazamiento entre los puntos B y E.

¡Todo se mueve! La gente por la calle, los coches, los átomos, las galaxias en el universo. En unos casos se mantiene la velocidad constante, como por ejemplo en el sonido; mientras que en otros se acelera o frena, como en los coches. Algunos movimientos son en línea recta, como el de la luz (al viajar por el vacío o por un medio homogéneo), mientras que otros varían constantemente la dirección, por ejemplo, las golondrinas. Unos son rápidos, como el del rayo, y otros lentos, como el de la tortuga.

La **cinemática** es la parte de la física que se encarga del estudio de los movimientos sin tener en cuenta las causas que los producen.

**RECUERDA**

### Sistema GPS

Hoy aplicamos la cinemática en muchos ámbitos. Por ejemplo, en los dispositivos dotados de **GPS** *(Global Positioning System)*, capaces de determinar nuestra posición sobre el planeta o la velocidad a la que nos movemos con exactitud.

El GPS utiliza una flota de **32 satélites artificiales** que orbitan la Tierra y emiten continuamente señales de radio con información sobre su posición en cada instante. La antena del receptor GPS recibe esas señales y, a partir de la información recibida, determina la posición del receptor con exactitud en cada instante.

Esto permite, por ejemplo, que los aviones puedan despegar o aterrizar casi «a ciegas».

## 1.1. El punto material

Para empezar a estudiar física es importante describir el movimiento de los cuerpos más sencillos sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Se define como **punto material** un objeto sin tamaño alguno, pero con masa. También lo llamaremos **móvil**.

Es decir, lo que quedaría de un cuerpo después de reducir sus dimensiones, pero conservando la misma masa.

Salvo las partículas elementales, cuyo tamaño es difícil de precisar, vivimos en un mundo de objetos extensos, con cierto tamaño: gatos, pájaros, balones de fútbol, aviones, planetas... ¿Por qué estudiamos partículas sin tamaño, pero con masa? Hay varias razones:

- Porque es más **sencillo**. Es importante empezar por comprender lo más fácil e ir avanzando a partir de ello.
- Porque, en ocasiones, se puede hacer una **descripción aproximada** ignorando el tamaño de un objeto.
- Porque el **centro de masas** (o centro de gravedad) de un cuerpo se mueve como si fuera una partícula con toda la masa del cuerpo concentrada en ese punto y sometida a la acción de una fuerza externa.

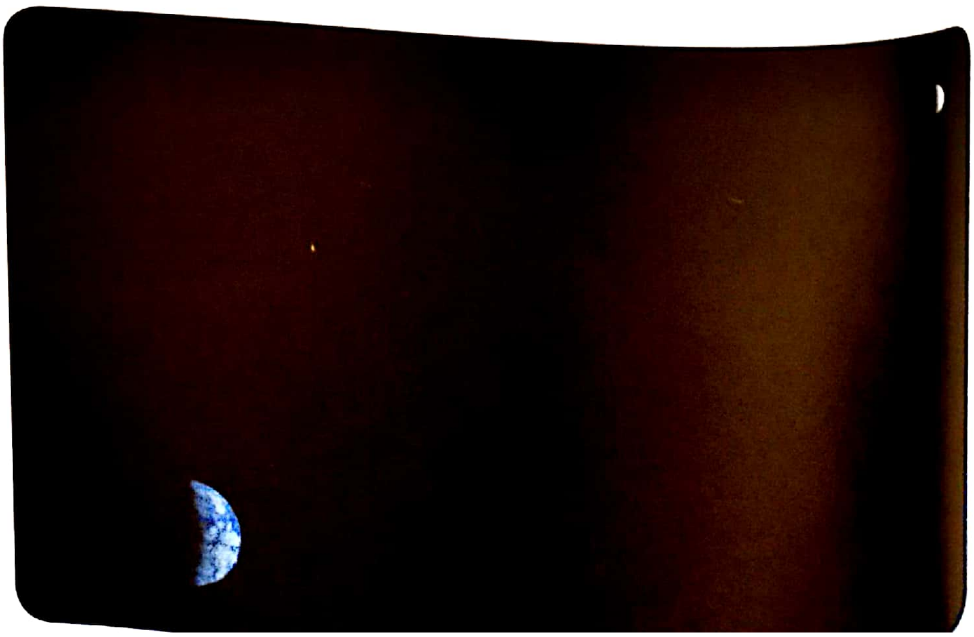
**RECUERDA**

### El centro de masas

El centro de masas de un cuerpo puede estar situado dentro o fuera del cuerpo. En los cuerpos con forma regular, el centro de masas coincide con el centro geométrico.

Pero en una **herradura**, por ejemplo, el centro de masas está situado fuera del cuerpo.

A nosotros puede parecernos que la Tierra no es un punto. Pero si fuésemos astrónomos en Marte, a decenas de miles de kilómetros, veríamos la pareja Tierra-Luna como en la imagen tomada por el proyecto MRO, de la NASA. Podríamos considerar cada astro como un punto material.



## 2. La posición

Para estudiar el movimiento de un móvil se debe saber dónde está en cada momento. Hay dos formas diferentes de expresarlo: **indicar la posición a lo largo de una trayectoria** o con **un sistema de coordenadas**.

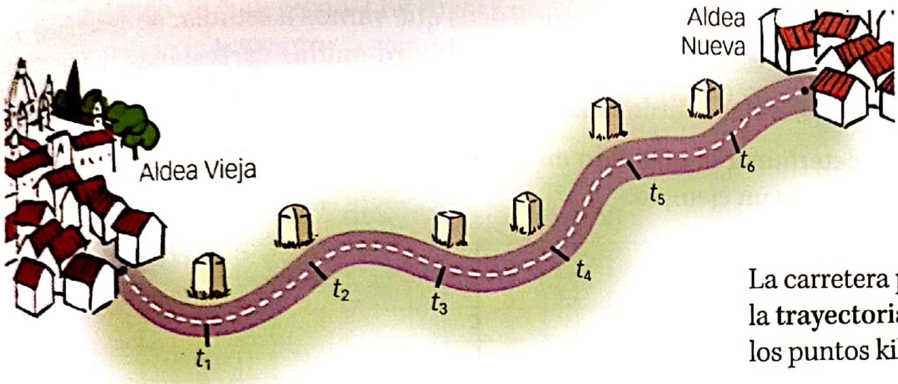
### 2.1. La posición a lo largo de la trayectoria

Es posible indicar dónde está un objeto cuando se conoce **la trayectoria** que sigue.

> La **trayectoria** es el conjunto de puntos por los que pasa el móvil.


La trayectoria no da información sobre la velocidad del movimiento ni del tiempo transcurrido, solo del cambio de posición.

Estudiemos, por ejemplo, un recorrido por la carretera que une dos pueblos.




La carretera por la que circulamos define la **trayectoria**. En las carreteras están señalados los puntos kilométricos, que nos sirven de referencia.

Se suele emplear la letra $s$ para indicar la posición a lo largo de la trayectoria, pero es necesario definir un **origen, $s_0 = 0$**, a partir del cual se midan las distancias. Este origen es arbitrario y se escoge según convenga. En muchos casos, si el móvil está inicialmente en reposo, su posición inicial se toma como $s_0 = 0$.

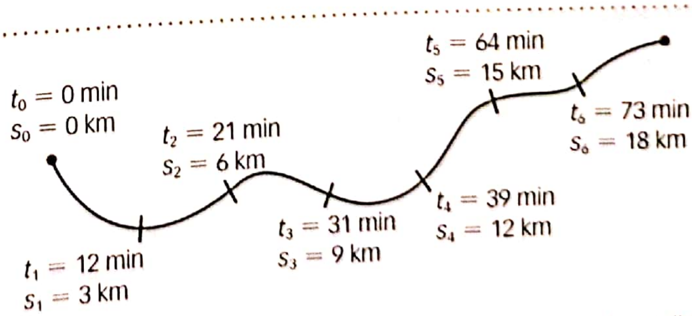
La trayectoria se define mediante un registro de las posiciones sucesivas $s_0$, $s_1$, $s_2$... que tiene el móvil en los instantes sucesivos $t_0$, $t_1$, $t_2$... Esto supone que expresamos esos tiempos a partir de un **origen, $t_0 = 0$**. A menudo se toma el origen de tiempos cuando el móvil comienza a moverse, pero no siempre.

**EJEMPLO RESUELTO 1**

El gráfico representa un paseo en bicicleta desde Aldea Vieja a Aldea Nueva.

a) Define con una tabla la función $s(t)$ que indica la posición respecto del tiempo.

b) ¿Qué espacio recorrió desde $t_2$ a $t_5$?




a) El registro de datos se puede ordenar en una tabla:

| t (min) | 0 | 12 | 21 | 31 | 39 | 64 | 73 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s (km) | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |

b) Tomamos la posición sobre la trayectoria para cada medida:

$$t_2 = 21 \text{ min}, s_2 = 6 \text{ km}$$

$$t_5 = 64 \text{ min}, s_5 = 15 \text{ km}$$

Basta hacer la resta entre la posición final y la inicial:

$$s_5 - s_2 = 15 \text{ km} - 6 \text{ km} = 9 \text{ km}$$

Este espacio recorrido se suele representar por $\Delta s$.
En nuestro caso $\mathbf{\Delta s = 9}$ **km**.


Un receptor GPS proporciona información sobre la latitud y la longitud. El **sistema de referencia** en este caso está formado por los meridianos y los paralelos.

## 2.2. La posición mediante coordenadas en un sistema de referencia

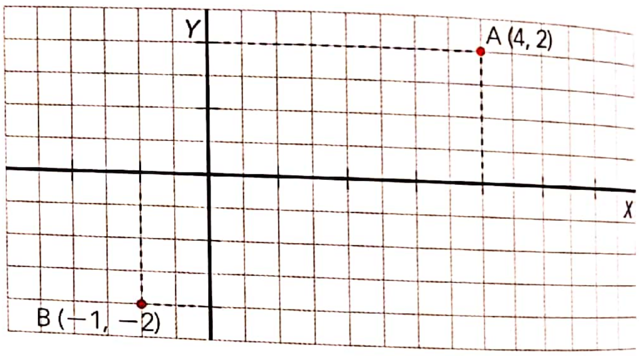
Otra manera de describir la posición de un punto es la que se usa en los mapas o los navegadores GPS, y consiste en dar las **coordenadas** en algún **sistema de referencia** determinado, como, por ejemplo, longitud, latitud y altura para un objeto sobre la Tierra.

> Un **sistema de referencia** (o de coordenadas) proporciona una forma de situar un punto respecto a otro que hayamos establecido previamente y que sirve de referencia.

Todos los sistemas de referencia son igualmente válidos. Pero no todos son igual de convenientes. Los fenómenos físicos que vamos a estudiar se describen empleando un sistema simple, como el de **coordenadas cartesianas**.

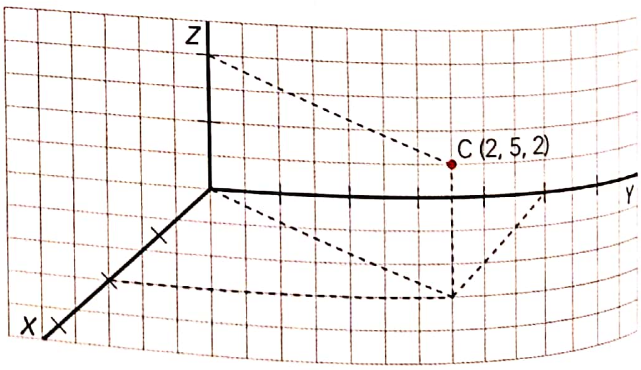
Estudiaremos las coordenadas cartesianas en el plano *XY* o en el espacio *XYZ*.

Para determinar la **posición en un plano** solo necesitaremos dos coordenadas. Veamos un ejemplo:




Posición de los puntos A y B, en el plano.

Para la **posición en el espacio** basta añadir un tercer eje, *Z*, perpendicular a los otros dos. Habitualmente, el plano *XY* determina la posición en el plano horizontal y el eje *Z* indica el vertical. Ahora cada punto tendrá tres coordenadas: $(x, y, z)$. Dependiendo del problema, los ejes pueden representarse como en la figura inferior o girando alrededor del eje *Z* vertical.




Posición del punto C en el espacio.

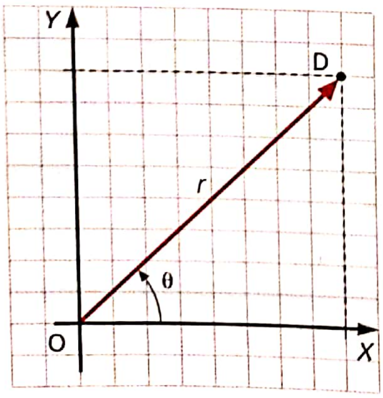
Por simplicidad, normalmente trabajaremos en el plano. Aunque hay muchos casos reales en los que el movimiento no es plano, sino tridimensional.

**RECUERDA**

### Coordenadas polares

Cuando estudiemos el movimiento circular o el movimiento de los planetas, veremos que las coordenadas cartesianas no son las más adecuadas.

Para localizar un punto que está dando vueltas alrededor de otro es mucho más intuitivo dar su distancia al origen del sistema y un ángulo que marque su posición a lo largo de la órbita. Esos dos números $(r, \theta)$ son **coordenadas polares**.




Posición del punto D en coordenadas polares. O: origen de coordenadas.

| **Cartesianas** | **Polares** |
|---|---|
| $(x, y)$ | $(r, \theta)$ |
| (8, 8) | (11,3; 45°) |

**ACTIVIDADES**

**4** Escribe las coordenadas cartesianas para un punto a 1000 m del origen en dirección noroeste.

Solución: (−707, 707) m

## 2.3. El vector de posición

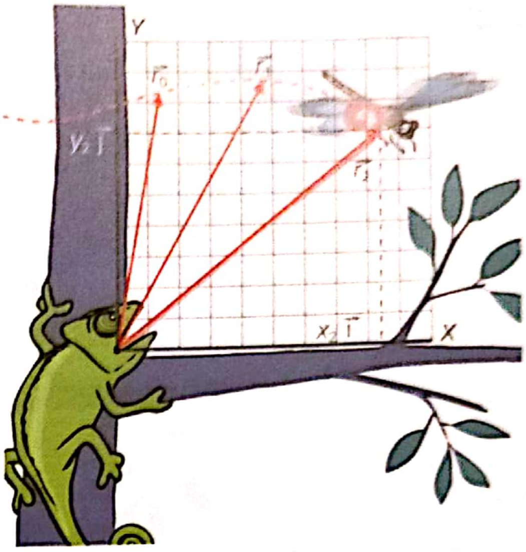
Existe una forma de hacer más sencilla y manejable la descripción del movimiento en un sistema de referencia empleando vectores.

**El vector de posición** en el instante $t$, $\vec{r}\,(t)$, se representa mediante una flecha que va desde el origen de coordenadas, O, hasta la posición del móvil, P.

En coordenadas cartesianas en el plano, las dos componentes del vector $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ coinciden con las coordenadas cartesianas del punto.

Observa el dibujo de la derecha. Los sucesivos vectores de posición van conformando la **trayectoria** seguida por nuestro móvil (en este caso, la libélula), que se puede resumir en la función $\vec{r}\,(t)$. En cada punto de la trayectoria $\vec{r}\,(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$.

**El vector de posición,** $\vec{r}\,(t)$, determina la posición en función del tiempo.




Sucesivos **vectores de posición** a lo largo de una trayectoria.

### EJEMPLO RESUELTO 2

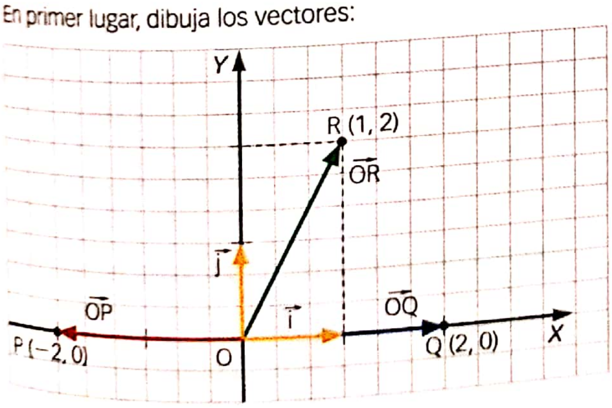
Dibuja en el plano *XY* los vectores de posición de los puntos P = (−2, 0) m, Q = (2, 0) m y R = (1, 2) m.

Recuerda que los vectores que representan magnitudes físicas deben tener unidades.

a) Represéntalos en función de los vectores unitarios.

b) Calcula sus módulos y di cuál es el significado físico de esta cantidad.

En primer lugar, dibuja los vectores:




a) Cuando los vectores unitarios están en el sentido negativo del eje, se antepone el signo −.

- $\vec{OP} = -2\,\vec{i}$ m
- $\vec{OQ} = 2\,\vec{i}$ m
- $\vec{OR} = \vec{i} + 2\,\vec{j}$ m

b) Como las componentes del vector son perpendiculares entre sí, puedes calcular el módulo aplicando el teorema de Pitágoras. El módulo se calcula fácilmente a partir de las componentes:

- $|\vec{OP}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \mathbf{2\ m}$
- $|\vec{OQ}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \mathbf{2\ m}$
- $|\vec{OR}| = \sqrt{(1)^2 + 2^2} = \mathbf{\sqrt{5}\ m}$

Los módulos representan la **longitud de los segmentos**. Es decir, la distancia al origen.

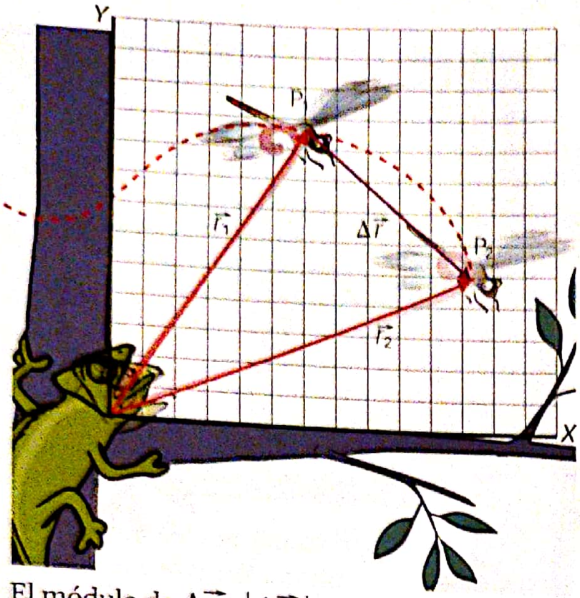
### ACTIVIDADES

**5** Un punto en una trayectoria (−3, 2, 6) está determinado por el vector de posición $\vec{r_1}$ y otro punto (6, −2, 3) está determinado por el vector $\vec{r_2}$. Con las distancias expresadas en metros, ¿cuáles serán las coordenadas del vector $\vec{r_2} - \vec{r_1}$?

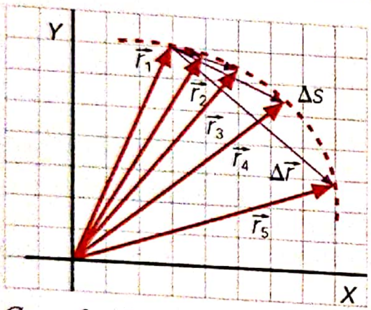
Solución: $9\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$ m

**6** Una pelota se desplaza desde el punto $P_1$, $\vec{r_1} = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ m, hasta el punto $P_2$, $\vec{r_2} = -\vec{i} + 3\,\vec{j}$ m. Calcula la distancia entre los puntos $P_1$ y $P_2$ en metros. ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{r_2} - \vec{r_1}$?

Solución: 7,62 m; $-3\,\vec{i} + 7\,\vec{j}$ m




El módulo de $\Delta\vec{r}$, $|\Delta\vec{r}|$ es la distancia entre $P_1$ y $P_2$. $\vec{r_1}$ es el vector que determina la posición inicial y $\vec{r_2}$ el que determina la posición final.




Cuando el intervalo de tiempo es muy pequeño se puede aproximar que $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$.

## 2.4. El vector desplazamiento

En el lenguaje común se entiende el concepto de desplazamiento como espacio recorrido. Pero en física no siempre es lo mismo.

Definimos el **vector desplazamiento** entre dos puntos $P_1$ y $P_2$ cuyos vectores de posición son $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ como la diferencia entre estos dos vectores, así:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

El desplazamiento $|\Delta\vec{r}|$ entre dos puntos coincide con el espacio recorrido a lo largo de una trayectoria solo si esta es rectilínea y se recorre sin cambios de sentido.

Un caso en el que se ve claramente la diferencia entre el módulo del desplazamiento, $|\Delta\vec{r}|$, y el espacio recorrido, $\Delta s$, es el de las trayectorias cerradas, en las que el móvil vuelve al punto de partida, para las que el desplazamiento es nulo ($\Delta\vec{r} = 0$ y $|\Delta\vec{r}| = 0$), ya que el vector de posición final coincide con el inicial, pero el espacio recorrido, $\Delta s$, no es nulo.

Para puntos próximos entre sí, la diferencia entre desplazamiento y espacio recorrido se hace menor, tal como se muestra en la figura de la izquierda. Esto quiere decir que para intervalos de tiempo muy pequeños se cumple que $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$, siendo mejor la aproximación cuanto menor sea el intervalo de tiempo.

Cuando hay cambios de sentido en una trayectoria también hay que ser riguroso; por ejemplo, si salgo de mi casa y vuelvo por el mismo camino, recorreré unos 500 m, pero el vector de posición de salida es el mismo que el del punto de llegada: mi casa. Por tanto, $|\Delta\vec{r}| = 0$.

### EJEMPLO RESUELTO 3

**Los vectores de posición de un móvil en dos instantes $t_1$ y $t_2$ son $\vec{r_1} = (3, 6)$ m y $\vec{r_2} = (6, 7)$ m, respectivamente. Calcula el vector desplazamiento.**

El vector $\Delta\vec{r}$ se calcula restando ambos vectores:

$$\vec{r_1} = 3\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\,;\ \vec{r_2} = 6\,\vec{i} + 7\,\vec{j}$$

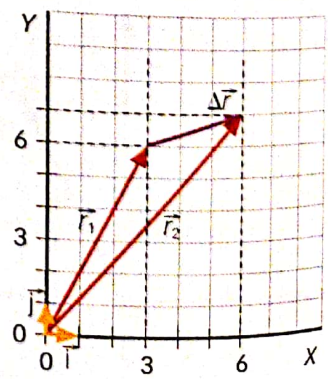
$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (6\,\vec{i} + 7\,\vec{j}) - (3\,\vec{i} + 6\,\vec{j})$$

$$\Delta\vec{r} = (6-3)\,\vec{i} + (7-6)\,\vec{j} = 3\,\vec{i} + \vec{j}$$

Observa en la ilustración de la derecha que las componentes del vector $\Delta\vec{r}$ son $3\,\vec{i}$ en el eje $X$ y $\vec{j}$ en el eje $Y$, pero se dibuja como diferencia entre los dos vectores $\vec{r_2}$ y $\vec{r_1}$.

$$\mathbf{\Delta\vec{r} = 3\,\vec{i} + \vec{j}\ m}$$

Su módulo es $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \mathbf{\sqrt{10}\ m}$




### ACTIVIDADES

**7** Los vectores de posición de un móvil en dos instantes $t_1$ y $t_2$ son:

$$\vec{r_1} = 6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} \text{ y } \vec{r_2} = 6\,\vec{j}$$

Calcula el vector desplazami ento $\Delta\vec{r}$.

Solución: $-6\,\vec{i} + 10\,\vec{j}$ m

**8** El vector de posición de una pelota en función del tiempo es: $\vec{r}(t) = 3 \cdot t\,\vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot t^2\,\vec{k}$ m

Calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ entre los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 5$ s.

Solución: $9\,\vec{i} + $ …

## Determinar el vector desplazamiento

El vector de posición de una pelota que se mueve en el plano $XY$ es este:

$$\vec{r}(t) = (6 + t)\,\vec{i} + 2 \cdot t\,\vec{j} \quad \text{(en metros)}$$

Calcula el vector desplazamiento entre los instantes $t = 0$ s y $t = 3$ s, y su módulo.

GeoGebra

**SOLUCIÓN**

**1. Comprende el enunciado.**

| Datos conocidos | Resultados a obtener |
|---|---|
| • Vector de posición $\vec{r}$ en función del tiempo.<br>• Instantes inicial $t = 0$ s y final $t = 3$ s. | • Vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ entre $t = 0$ s y $t = 3$ s.<br>• Módulo del vector desplazamiento. |

**2. Calcula el vector de posición $\vec{r}$ en cada instante.**

Debes conocer el valor de $\vec{r}$ en los instantes $t = 0$ s y $t = 3$ s para calcular el desplazamiento.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 3\text{ s}) - \vec{r}(t = 0\text{ s})$$

Escribe el valor del vector de posición $\vec{r}(t)$ en función del tiempo y sustituye para los instantes que indica el enunciado:

- Inicial, $t = 0$:

$$\vec{r}(t) = (6 + t)\,\vec{i} + 2 \cdot t\,\vec{j}\text{ m}$$

Sustituye:

$$\vec{r}(t = 0\text{ s}) = (6 + 0)\,\vec{i} + 2 \cdot 0\,\vec{j}\text{ m}$$

Opera:

$$\vec{r}(t = 0\text{ s}) = 6\,\vec{i} + 0\,\vec{j}\text{ m}$$

Simplifica:

$$\vec{r}(t = 0\text{ s}) = 6\,\vec{i}\text{ m}$$

- Final, $t = 3$:

$$\vec{r}(t) = (6 + t)\,\vec{i} + 2 \cdot t\,\vec{j}\text{ m}$$

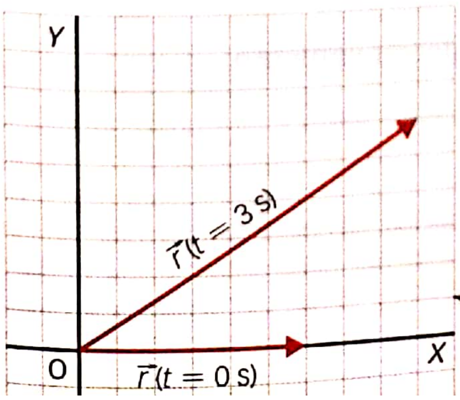
Sustituye:

$$\vec{r}(t = 3\text{ s}) = (6 + 3)\,\vec{i} + 2 \cdot 3\,\vec{j}\text{ m}$$

Opera:

$$\vec{r}(t = 3\text{ s}) = 9\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\text{ m}$$

Puedes dibujar estos dos vectores sobre el plano:




Cada cuadro representa una unidad

**3. Determina el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$.**

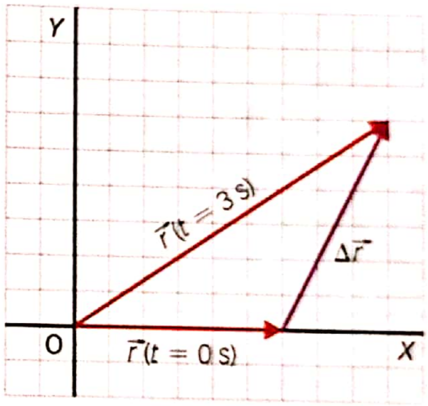
Resta los dos vectores de posición obtenidos antes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 3\text{ s}) - \vec{r}(t = 0\text{ s})$$

$$\Delta\vec{r} = (9\,\vec{i} + 6\,\vec{j}) - (6\,\vec{i})\text{ m}$$

$$\Delta\vec{r} = (9 - 6)\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\text{ m} = \mathbf{3\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\text{ m}}$$

Dibuja este vector:




**4. Determina el módulo de $\Delta\vec{r}$.**

A partir de sus componentes:

$$|\Delta\vec{r}| = |3\,\vec{i} + 6\,\vec{j}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \mathbf{\sqrt{45}\text{ m}}$$

**5. Evalúa el resultado.**

La pelota se ha desplazado una distancia aproximada a $\sqrt{45} = 6{,}71$ m, pues en el enunciado dicen que $\vec{r}(t)$ se expresa en metros.

Si te fijas en el dibujo, el módulo de $\Delta\vec{r}$ corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 m y 6 m, es decir, las componentes del vector $\Delta\vec{r}$.