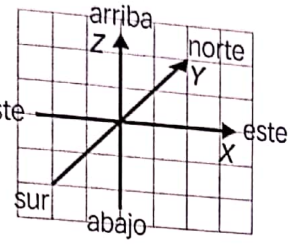
EJEMPLO RESUELTO 11

Para estudiar el movimiento en una pequeña región vamos a utilizar un sistema cartesiano de coordenadas en tres dimensiones con origen en nuestra posición actual. Calcula los vectores desplazamiento y los vectores de posición tras los siguientes movimientos sucesivos: 25 m hacia el oeste, 10 m hacia el sur, 15 m hacia el este, 20 m hacia abajo. ¿Cuál es la distancia final al origen?

Primero, establece el sistema de referencia. Observa la figura de la derecha:



La posición inicial es:

$\vec{r}_0 = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\,\text{m}$

El primer desplazamiento es 25 m hacia el oeste:

$$\Delta\vec{r}_{01} = \mathbf{-25\,\vec{i}\ m}$$

Nos lleva a la posición:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}_{01} = (0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\,\text{m}) + (-25\,\vec{i}\ \text{m}) =$$
$$= \mathbf{-25\,\vec{i}\ m}$$

El segundo desplazamiento es 10 m hacia el sur:

$$\Delta\vec{r}_{12} = \mathbf{-10\,\vec{j}\ m}$$

Nos lleva a la posición:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_{12} = (-25\,\vec{i}\ \text{m}) + (-10\,\vec{j}\,\text{m}) =$$
$$= \mathbf{-25\,\vec{i} - 10\,\vec{j}\ m}$$

El tercer desplazamiento es 15 m hacia el este:

$$\Delta\vec{r}_{23} = \mathbf{15\,\vec{i}\ m}$$

Nos lleva a la posición:

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_{23} = (-25\,\vec{i} - 10\,\vec{j}\,\text{m}) + (15\,\vec{i}\ \text{m}) =$$
$$= \mathbf{-10\,\vec{i} - 10\,\vec{j}\ m}$$

El último desplazamiento es 20 m hacia abajo:

$$\Delta\vec{r}_{34} = \mathbf{-20\,\vec{k}\ m}$$

Nos lleva a la posición:

$$\vec{r}_4 = \vec{r}_3 + \Delta\vec{r}_{34} = (-10\,\vec{i} - 10\,\vec{j}\,\text{m}) + (-20\,\vec{k}\,\text{m}) =$$
$$= \mathbf{-10\,\vec{i} - 10\,\vec{j} - 20\,\vec{k}\ m}$$

El módulo de este vector es la distancia al origen:

$$|\vec{r}_4| = \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2 + (-20)^2} = \sqrt{600}\ \text{m} = \mathbf{24{,}49\ m}$$

20 Describe un viaje en coche o en tren con una tabla de distancias en kilómetros y los tiempos de paso por cada posición. Especifica debidamente el origen del sistema de referencia de tu descripción.

21 Los vectores de posición de un móvil en dos instantes dados son:

- $t_1 \rightarrow \vec{r}_1 = 5{,}25\,\vec{i} - 2{,}5\,\vec{j}\,\text{m}$
- $t_2 \rightarrow \vec{r}_2 = 7{,}5\,\vec{i} + 2{,}5\,\vec{j}\,\text{m}$

Representa en tu cuaderno dichos vectores, calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y su módulo.

Solución: $\Delta\vec{r} = 2{,}25\,\vec{i} + 5\,\vec{j}\,\text{m}$; 5,48 m

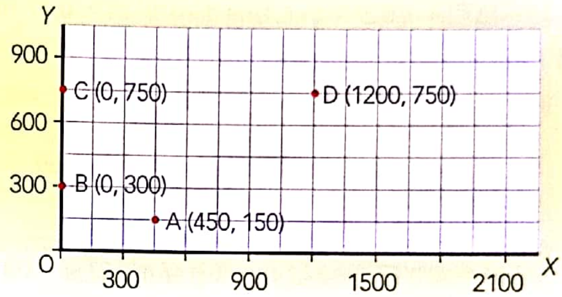
22 Una estrella está situada en $\vec{r}_E = (6\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot 10^{10}$ m y un planeta en $\vec{r}_P = (-\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}) \cdot 10^{10}$ m, respecto a un cierto sistema de referencia.

a) ¿Cuál es el vector $\vec{r}_{EP}$ que va de la estrella al planeta? ¿Cuánto vale su módulo? ¿Qué significado físico tiene?

b) ¿Cuál es el vector $\vec{r}_{PE}$ que va del planeta a la estrella?

Solución: a) $(-7\,\vec{i} + 13\,\vec{j} - 4\,\vec{k}) \cdot 10^{10}$ m, $1{,}53 \cdot 10^{11}$ m;
b) $(7\,\vec{i} - 13\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) \cdot 10^{10}$ m

23 Calcula el vector desplazamiento y su módulo para cada uno de los tramos del recorrido de un vehículo teledirigido que realiza el desplazamiento entre los puntos A, B, C y D de la figura, en ese orden. Las distancias están expresadas en metros.

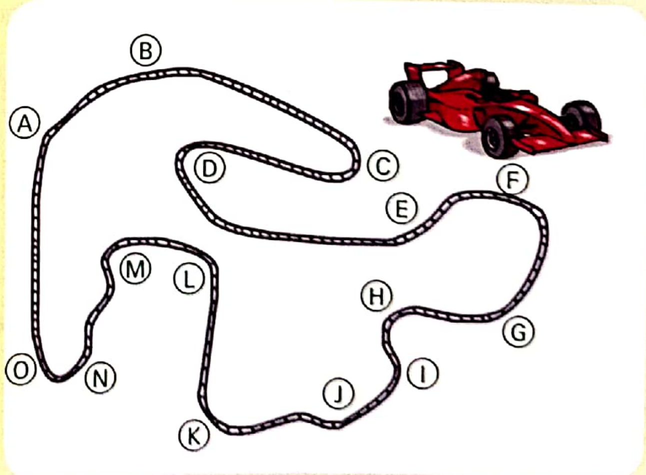


Solución: $\Delta\vec{r}_{AB} = -450\,\vec{i} + 150\,\vec{j}$ m, $|\Delta\vec{r}_{AB}| = 474{,}3$ m; $\Delta\vec{r}_{BC} = 450\,\vec{j}$ m, $|\Delta\vec{r}_{BC}| = 450$ m; $\Delta\vec{r}_{CD} = 1200\,\vec{i}$ m, $|\Delta\vec{r}_{CD}| = 1200$ m

Velocidad

24 ¿Bajo qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?

25 Observa la figura y contesta.



a) ¿Qué lugares de la trayectoria de la figura son imposibles de recorrer sin aceleración?

b) ¿En qué lugares es posible el movimiento uniforme?

c) ¿Dónde puede haber movimiento sin ningún tipo de aceleración?

d) Dibuja un posible vector velocidad en cinco puntos.

EJEMPLO RESUELTO 12

En el instante $t_1 = 0$ h 47 min 27 s, la posición de un cuerpo es $\vec{r}_1 = 2\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$ m. Una décima de segundo después, en $t_2 = 0$ h 47 min 27,1 s, la posición es $\vec{r}_2 = 2{,}2\,\vec{i} + 5{,}9\,\vec{j} - 3{,}3\,\vec{k}$ m.

a) Calcula el vector desplazamiento, $\Delta\vec{r}$.

b) Calcula el vector velocidad media, $\vec{v}_m$.

a) Para calcular el vector desplazamiento hay que hacer la diferencia entre la posición inicial y final:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = (2{,}2\,\vec{i} + 5{,}9\,\vec{j} - 3{,}3\,\vec{k})\,\text{m} - (2\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 3\,\vec{k})\,\text{m}$$

$$\mathbf{\Delta\vec{r} = 0{,}2\,\vec{i} - 0{,}1\,\vec{j} - 0{,}3\,\vec{k}\,m}$$

El módulo de este vector desplazamiento es:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{0{,}2^2 + (-0{,}1)^2 + (-0{,}3)^2}\ \text{m} \approx \mathbf{0{,}37\ m}$$

b) Para calcular el vector velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Necesitas el vector desplazamiento, ya calculado en el apartado anterior, y el lapso de tiempo:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta t = (0\ \text{h}\ 47\ \text{min}\ 27{,}1\ \text{s}) - (0\ \text{h}\ 47\ \text{min}\ 27\ \text{s}) = 0{,}1\ \text{s}$$

Sustituye:

$$\vec{v}_m = \frac{0{,}2\,\vec{i} - 0{,}1\,\vec{j} - 0{,}3\,\vec{k}\ \text{m}}{0{,}1\ \text{s}} =$$

$$\mathbf{\vec{v}_m = 2\,\vec{i} - 1\,\vec{j} - 3\,\vec{k}\ m/s}$$

El módulo de este vector velocidad media es:

$$|\Delta\vec{v}_m| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}\ \text{m} \approx \mathbf{3{,}7\ m/s}$$

26 ¿Cómo es el vector velocidad media para una vuelta completa de cualquier trayectoria cerrada? ¿Depende del sistema de referencia? ¿Dice el primer resultado algo sobre el valor de la velocidad media?

27 ¿Cómo se mueve un cuerpo si la velocidad media y la instantánea son iguales en todo momento?

28 ¿Serviría de algo hablar de las componentes tangencial y normal de la velocidad?

29 Alicia dice que ha visto moverse un avión en línea recta a 980 km/h. Benito, por su parte, sostiene que el avión estaba inmóvil. ¿Es posible que se refieran al mismo avión? ¿Cómo?

30 La ganadora de una carrera ciclista recorre los últimos 10 m en 0,72 s.

a) ¿Cuál es su velocidad media en ese tramo?

b) Exprésala en las unidades más comunes, km/h.

Solución: a) $13{,}\hat{8}$ m/s; b) 50 km/h

31 Un acantilado nos devuelve eco retardando nuestra voz en 0,4 s. Sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s, ¿a qué distancia está el acantilado?

Solución: 68 m

32 Se suele elegir la superficie de la Tierra como sistema de referencia fijo respecto al que medir, pero ¿está realmente quieta la Tierra?

a) Calcula la velocidad con que se mueve un punto del ecuador en su giro alrededor del eje.

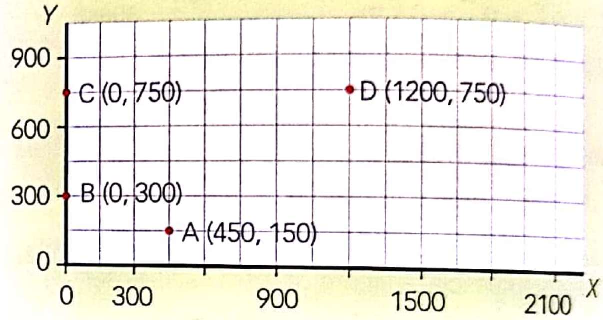
b) Calcula la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol, sabiendo que un rayo de luz desde el Sol a la Tierra tarda aproximadamente 8 minutos y 19 segundos.

c) ¿Cómo es posible que vayamos a esa velocidad sin enterarnos?

Datos: radio ecuatorial de la Tierra: 6378 km; $v_{luz} = 299\,792$ km/s; 1 año = 365,25 días; 1 día = 24 h.

Solución: a) 1670 km/h; b) $1{,}07 \cdot 10^5$ km/h

33 Para el mismo vehículo teledirigido del ejercicio 23:



a) Calcula el vector velocidad media y su módulo para cada tramo sabiendo que los tiempos empleados en recorrer cada tramo son: de A a B 15 min, de B a C 40 min y de C a D 28 min.

b) Calcula la velocidad y el vector velocidad media totales.

Solución: a) $\vec{v}_{AB} = -0{,}5\,\vec{i} + 0{,}1\hat{6}\,\vec{j}$ m/s, $v_{AB} = 0{,}527$ m/s; $\vec{v}_{BC} = 0{,}1875\,\vec{j}$ m/s, $v_{BC} = 0{,}1875$ m/s; $\vec{v}_{CD} = 0{,}714\,\vec{i}$ m/s, $v_{CD} = 0{,}714$ m/s; b) $\vec{v}_{total} = 0{,}15\,\vec{i} + 0{,}12\,\vec{j}$ m/s, $v_{total} = 0{,}427$ m/s.

34 Tras el lanzamiento de una falta, la posición de un balón de fútbol medida desde el punto en el que se le golpea cambia desde $5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ m hasta $5{,}3\,\vec{i} + 1{,}8\,\vec{j} + 3{,}1\,\vec{k}$ m en un intervalo de tiempo $\Delta t = 0{,}02$ s.

Escribe el vector velocidad del balón durante ese intervalo y calcula su módulo.

Solución: $15\,\vec{i} - 10\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$ m/s; 18,7 m/s ≈ 67 km/h

35 Un protón viaja con una velocidad $(3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 4\,\vec{k}) \cdot 10^5$ m/s y pasa por el origen de coordenadas en $t = 9{,}0$ s.

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad en el origen?

b) ¿Qué valor podemos dar para su posición en $t = 9{,}7$ s?

c) ¿Has tenido que hacer alguna suposición para calcular la posición?

Solución: a) $v = 5{,}39 \cdot 10^5$ m/s; b) $\vec{r} = (2{,}1\,\vec{i} + 1{,}4\,\vec{j} - 2{,}8\,\vec{k}) \cdot 10^5$ m

36 Calcula la velocidad en el instante $t = 2$ s de un móvil cuyo vector de posición es $\vec{r}(t) = (4 \cdot t - 4 \cdot t^2)\,\vec{i}$ m.

Solución: $-12\,\vec{i}$ m/s

37 El vect… un cuerpo viene dado por la expresión:

$$\vec{r}\,(t) = t\,\vec{i} + (t^2 + 1)\,\vec{j}\ \text{m}$$

con t en segundos y r en metros.

a) ¿En qué región del espacio se mueve: en un plano, en una recta...?

b) Calcula la posición en $t = 2$ s y en $t = 2{,}5$ s.

c) Deduce la ecuación de la trayectoria.

d) Calcula el vector velocidad media entre ambos instantes.

Solución: b) $\vec{r}(t = 2\text{ s}) = 2\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$ m, $\vec{r}(t = 2{,}5\text{ s}) = 2{,}5\,\vec{i} + 7{,}25\,\vec{j}$ m; c) $y = x^2 + 1$; d) $\vec{v}_m = 1\,\vec{i} + 4{,}5\,\vec{j}$ m/s

38 Un móvil se mueve según la siguiente ley de movimiento:

$$\vec{r}\,(t) = t\,\vec{i} + (2 + t)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}\ \text{m}$$

Calcula el vector velocidad media durante los 10 primeros segundos.

Solución: $\vec{v}_m = 1\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 10\,\vec{k}$ m/s

39 Un ciclista circula a 20 km/h y una motocicleta le rebasa a 70 km/h. ¿Qué velocidad observa el ciclista?

Solución: 50 km/h

40 El agua de un río fluye a 0,5 m/s. Una barcaza remonta el río navegando a 45 km/h. ¿Qué velocidad se observa para la barcaza desde la orilla? Expresa el resultado en m/s.

Solución: 12 m/s

Aceleración

41 Contesta.

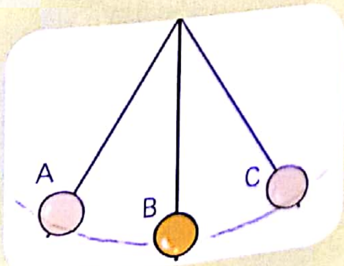
a) ¿Es posible que un movimiento uniforme tenga aceleración? Pon ejemplos.

b) ¿Es posible que un cuerpo tenga velocidad cero y aceleración distinta de cero? ¿Y al contrario? Pon ejemplos en los que se dé cada situación.

42 ¿Qué dirección tiene la aceleración de un cuerpo que se mueve en una circunferencia con el módulo de la velocidad constante?

43 Un cuerpo se mueve con movimiento circular y uniformemente acelerado. Dibuja en un punto cualquiera de la trayectoria los vectores velocidad, aceleración tangencial, aceleración normal y aceleración total.

44 Un péndulo oscila en un plano vertical.



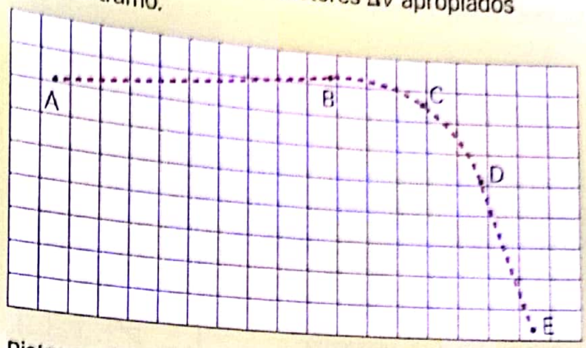
a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración en el punto medio del recorrido (B)?

b) ¿Y en los extremos?

(Recuerda que $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$ y piensa que al soltar la masa en un extremo, desde el reposo, va cada vez más deprisa hasta el punto más bajo y luego se frena hasta pararse en el otro extremo).

45 Se toma una curva como la de la figura, cuyos tramos AB y DE son rectos. Hasta el punto C la velocidad es constante y empieza a acelerar a partir de ahí.

Dibuja en tu cuaderno los vectores $\Delta\vec{v}$ apropiados en cada tramo.



Pista: ¿qué tipos de aceleración hay en cada tramo?

46 ¿Es posible que la velocidad de un cuerpo sea constante y su aceleración no sea nula?

47 ¿Cómo tiene que ser el vector velocidad para cambiar el sentido en el que se recorre una trayectoria? Pista: ten en cuenta la relación entre los vectores aceleración tangencial y velocidad.

48 ¿Puede moverse un cuerpo hacia la izquierda cuando su aceleración se dirige hacia la derecha?

49 ¿Es cierto que conocer la aceleración normal de un objeto proporciona información sobre la forma de la trayectoria que sigue? ¿Y la tangencial?

50 ¿Cómo es un movimiento en el que solo hay aceleración tangencial? Pista: en este caso, $\vec{v}$, que es un vector, solo cambia en módulo, no en dirección.

¿Qué características de este vector permanecen constantes?

51 Calcula la aceleración tangencial media de un vehículo que circula a 72 km/h y se detiene en 4 s.

Solución: -5 m/s^2

52 Un tren viaja a 120 km/h y se detiene en 29 s.

a) ¿Cuál es su aceleración tangencial media?

b) ¿Cuánto tardará en alcanzar esa misma velocidad máxima si al arrancar desde el reposo mantiene una aceleración tangencial constante de 0,7 m/s^2?

Solución: a) $-1{,}15$ m/s^2; b) 47,6 s

53 La lanzadera espacial alcanza en el despegue una aceleración de hasta $3 \cdot g$ (tres veces el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre). ¿Cuánto tiempo tardaría en alcanzar, a ese ritmo, la velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s? (Sin tener en cuenta efectos relativistas).

Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.

Solución: $1{,}02 \cdot 10^7$ s $\approx$ 118 días

54 Calcula la aceleración normal debida a la rotación en un punto del ecuador terrestre.

Datos: $R_{ec} = 6{,}378 \cdot 10^6$ m; día sidéreo, $T_s = 23$ h 56 min 4 s.

Solución: 0,0339 m/s^2

ACTIVIDADES FINALES

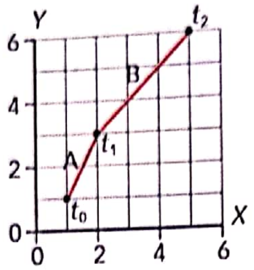
EJEMPLO RESUELTO 13

Encuentra la aceleración de un móvil del que conocemos la posición según la tabla.

$t_0 = 0$ s	$t_1 = 0{,}5$ s	$t_2 = 2$ s
$\vec{r}_0 = \vec{i} + \vec{j}$ m	$\vec{r}_1 = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ m	$\vec{r}_2 = 5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$ m

La aceleración mide los cambios en la velocidad, por eso necesitamos calcular la velocidad media en cada tramo.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



Representamos un esquema. Identificamos cada tramo con letras. Consideramos que al valor de la velocidad media le corresponde el instante medio:

$t_A = (t_1 - t_0)/2 = 0{,}25$ s	$t_B = (t_2 - t_0)/2 = 1{,}25$ s
$\vec{v}_A = \dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0}$	$\vec{v}_B = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$
$\vec{v}_A = \dfrac{[(2\vec{i} + 3\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j})]\,\text{m}}{(0{,}5 - 0)\,\text{s}}$	$\vec{v}_B = \dfrac{[(5\vec{i} + 6\vec{j}) - (2\vec{i} + 3\vec{j})]\,\text{m}}{(2 - 0{,}5)\,\text{s}}$
$\vec{v}_A = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$	$\vec{v}_B = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Ahora, con dos valores de velocidad, se puede calcular la aceleración media que corresponde al tramo completo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{t_B - t_A} = \frac{[(2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}) - (2\,\vec{i} + 4\,\vec{j})]\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{(1{,}25 - 0{,}25)\,\text{s}}$$

$$\vec{a} = -2\,\vec{j}\,\frac{\textbf{m}}{\textbf{s}^2}$$

55 Las normas que regulan la deceleración que debe sufrir un coche para que salten los airbags han pasado desde valores próximos a los $25 \cdot g$ (25 veces el valor de la aceleración de la gravedad) hasta los $60 \cdot g$ que hacen falta hoy día.

a) ¿A qué velocidad inicial hay que ir para alcanzar esa nueva aceleración (negativa) cuando un coche choca y se detiene bruscamente en 0,1 s?

b) ¿Cuál es, entonces, la aceleración mínima a la que salta el airbag?

Solución: a) 212 km/h; b) 588 m/s²

56 Para un cierto movimiento en el plano:

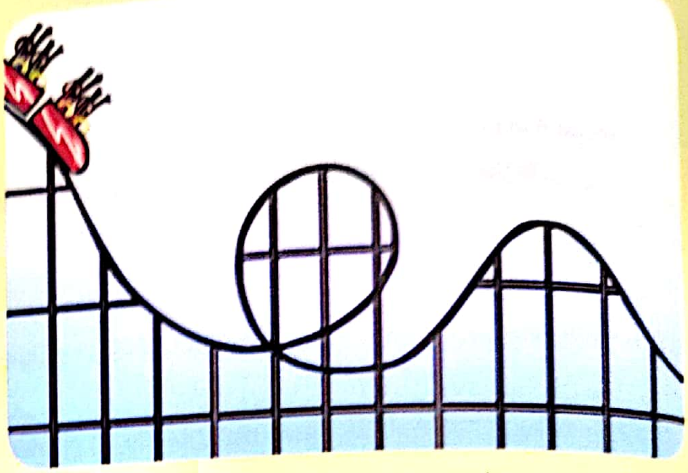
$$\vec{v}\,(t) = 5\,\vec{i} + 6 \cdot t\,\vec{j}\ \text{m/s}$$

a) Representa gráficamente los vectores velocidad en $t_1 = 0$ y $t_2 = 1$ s, así como el vector variación de velocidad $\Delta\vec{v}$. ¿Es paralelo o perpendicular a la velocidad inicial?

b) Calcula el vector aceleración media en ese intervalo de tiempo y di cuánto vale su módulo.

Solución: b) $6\,\vec{j}$ m/s², 6 m/s²

57 Los fabricantes de una montaña rusa que tiene un tramo en el que podemos viajar cabeza abajo (ver figura) nos aseguran que en dicho tramo la aceleración normal vale $2 \cdot g$, es decir, $a_N \approx 2 \cdot 9{,}8$ m/s².



a) Si en ese punto se mide para los carritos una velocidad de 50 km/h, ¿cuánto vale el radio de la curva?

b) Dibuja en tu cuaderno el vector $\vec{a}_N$.

Solución: a) 9,8 m

58 En un ascensor una de las lámparas del techo está a punto de descolgarse. El ascensor comienza a subir y arranca el movimiento con una aceleración hacia arriba de 1 m/s². En ese momento la lámpara se descuelga y cae por efecto de la gravedad con una aceleración descendente de 9,8 m/s². Para un observador en el interior del ascensor, ¿con qué aceleración cae la lámpara?

Solución: 10,8 m/s²

59 Teniendo en cuenta el resultado de la actividad 54 calcula, para un observador en el ecuador terrestre, la aceleración de la Luna en cada una de las siguientes posiciones. No debes considerar la traslación terrestre.

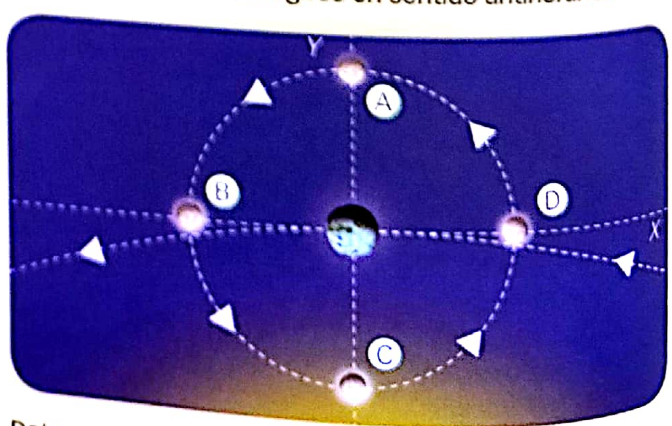
a) Luna llena.

b) Cuarto menguante.

c) Luna nueva.

d) Cuarto creciente.

Nota: el sistema de referencia está centrado en la Tierra con el eje OX en dirección tangente a la órbita terrestre y el eje OY negativo en dirección al Sol. La rotación terrestre y la traslación lunar son giros en sentido antihorario.



Datos: radio de la órbita lunar, $r_L = 3{,}84 \cdot 10^8$ m; periodo lunar, $T_L = 27$ d 7 h 43 min 11 s.

Solución: a) $0{,}0312\,\vec{j}$ m/s²; b) $0{,}0027\,\vec{i} + 0{,}0339\,\vec{j}$ m/s²; c) $0{,}0366\,\vec{j}$ m/s²; d) $-0{,}0027\,\vec{i} + 0{,}0339\,\vec{j}$ m/s²

60 La cuerda de un columpio se rompe cuando está en uno de los extremos de su trayectoria (por ejemplo, en 3).

a) ¿Hacia dónde sale volando el muchacho? Justifica gráficamente la respuesta.

b) Y, antes de haberse roto, ¿había aceleración tangencial en los extremos del movimiento? Justifica la respuesta y dibuja en tu cuaderno las dos componentes de la aceleración –cuando existan– en los tres puntos de la figura.

61 ¿Qué tipo de aceleración tiene un planeta (en un sistema de referencia anclado al Sol) sabiendo que su órbita es elíptica con el Sol en el foco y que el vector aceleración del planeta siempre apunta hacia el Sol? ¿Es posible que recorra esa órbita a velocidad constante?

62 Se lanza una bola por el aire y registramos su posición en tres instantes con los siguientes resultados:

t (s)	Posición (m)
0,0	$0\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$
1,0	$22{,}3\,\vec{i} + 26{,}1\,\vec{j}$
2,0	$40{,}1\,\vec{i} + 38{,}1\,\vec{j}$

a) ¿Se puede decir algo sobre la forma de la trayectoria?

b) Intenta predecir matemáticamente la posición en $t = 2$ s a partir de las posiciones en los dos instantes anteriores.

c) ¿Coincide tu predicción con el dato? ¿Por qué?

Solución: b) $44{,}6\,\vec{i} + 52{,}2\,\vec{j}$ m

63 Benito hace cada día un viaje de ida y vuelta al puesto de periódicos, que dista 3 km de su casa. Viaja a la velocidad constante de 6 km/h y emplea una hora en total. Un día solo consigue hacer 4 km/h en el viaje de ida y piensa que podrá arreglarlo y compensar el retraso volviendo a una velocidad de 8 km/h, pero Alicia le dice que no. ¿Cuánto tarda en realidad? ¿Cuál es la velocidad media aquel día?

Solución: 1 h 7 min 30 s; $5{,}\widehat{3}$ km/h

64 Supón que la posición de un objeto en función del tiempo es $\vec{r}(t) = (-7 + 5\,t)\,\vec{i} + 8\,t^2\,\vec{j} + (6\,t - 4\,t^3)\,\vec{k}$ en unidades del SI.

a) ¿Cuánto vale la velocidad instantánea en $t = 0$ s?

b) ¿Cuánto vale la aceleración instantánea en $t = 0$ s?

Solución: a) $5\,\vec{i} + 6\,\vec{k}$ m/s; b) $16\,\vec{j}$ m/s^2

65 En las películas de ciencia ficción, una de las formas menos fantásticas de crear «gravedad artificial» utiliza rotación uniforme alrededor de un eje dentro de una estación espacial.

a) Dibuja en una circunferencia la posición de una astronauta apoyada en el «suelo», representa la aceleración a la que está sometida y di de qué tipo es.

b) ¿A qué velocidad angular debe girar una estación espacial de 1 km de radio para que la aceleración sea numéricamente como la de la gravedad en la superficie de la Tierra? ¿Y si el radio es de 100 m?

Solución: b) $\omega_1 = 0{,}099$ rad/s; $\omega_2 = 0{,}31$ rad/s

66 Situando el origen del sistema de referencia en el Sol, las componentes del vector de posición del planeta Tierra cada 30 días vienen dadas por la siguiente tabla:

Fecha	r_x (10^{10} m)	r_y (10^{10} m)
4 de julio	15,2	0,0
3 de agosto	13,3	7,3
2 de septiembre	8,2	12,7
2 de octubre	0,9	14,9
1 de noviembre	−6,6	13,3

a) Representa en tu cuaderno los cinco vectores de posición del movimiento del planeta Tierra en cada fecha.

b) Representa en tu cuaderno la trayectoria del planeta según indican los vectores de posición.

c) Representa en tu cuaderno los cuatro vectores desplazamiento consecutivos que se pueden trazar.

d) Calcula las componentes de cuatro vectores velocidad media en unidades del SI. Escribe el resultado en una tabla similar a la anterior y asigna a cada vector la fecha intermedia de cada intervalo.

e) Representa en tu cuaderno los vectores velocidad media del movimiento del planeta Tierra. Considera la posición de la Tierra en la fecha de $\vec{v}$.

f) Calcula las componentes de tres vectores aceleración media en cm/s^2. Escribe el resultado en una tabla similar a la anterior.

g) Representa en tu cuaderno los vectores aceleración media. Considera la posición de la Tierra en la fecha de $\vec{a}$. ¿Adónde apuntan estos vectores?

67 Una paracaidista se deja caer desde un globo aerostático con aceleración 9,8 m/s^2 desde una altura de 500 m. La paracaidista observa cómo se lanza desde el suelo en vertical y hacia arriba un proyectil con velocidad inicial 50 m/s. El proyectil también está sometido a la aceleración de la gravedad de 9,8 m/s^2 hacia abajo. Determina qué velocidad del proyectil observa la paracaidista durante su caída.

Solución: $+50\,\vec{j}$ m/s

RECUERDO LO APRENDIDO

LA POSICIÓN

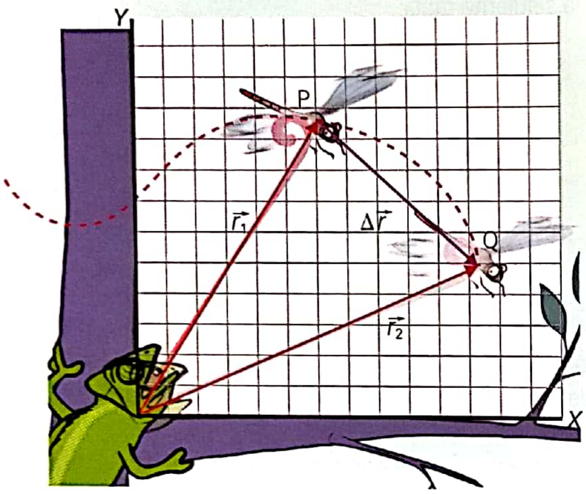
Podemos situar un móvil indicando su **posición a lo largo de la trayectoria**. La **trayectoria** es el conjunto de puntos por los que pasa el objeto (punto material).

Un **sistema de referencia** (o de coordenadas) proporciona una manera de situar un punto cualquiera respecto a otro que hayamos establecido previamente y que sirve de referencia.

El **vector de posición** en el instante t, $\vec{r}(t)$, se representa mediante una flecha que va desde el origen de coordenadas, O, hasta la posición del punto. $\vec{r}(t)$ determina la posición en función del tiempo.

Definimos el **vector desplazamiento** entre dos puntos, P y Q, cuyos vectores de posición son $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, como la diferencia entre estos dos vectores, así:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



LA VELOCIDAD

La **velocidad media** para un recorrido entre los puntos P_1 y P_2 iniciado en el tiempo t_1 y finalizado en t_2 es:

Velocidad media

- **Escalar**: $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$
- **Vectorial**: $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$

La **velocidad instantánea** para un recorrido entre los puntos P_1 y P_2 en el intervalo de tiempo Δt será:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \text{ cuando } \Delta t \text{ es «muy pequeño».}$$

El **movimiento es relativo**, depende del sistema de referencia que se use para medir. A menudo se suele elegir como sistema de referencia la superficie de la Tierra.

LA ACELERACIÓN

La **aceleración media** se define como la variación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

La **aceleración instantánea** es el límite cuando $\Delta t \to 0$ del cociente entre el vector velocidad y el incremento del tiempo.

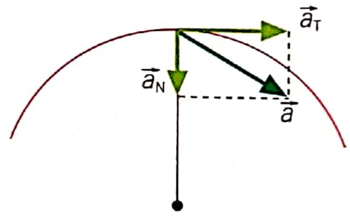
$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \text{ cuando } \Delta t \text{ es «muy pequeño».}$$

Aceleración

- **Aceleración tangencial**
  - Cuando cambia el módulo de la velocidad.
  - $a_T = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ Cuando Δt es «muy pequeño». (Tangente a la trayectoria).
- **Aceleración normal o centrípeta**
  - Cuando cambia la dirección de la velocidad.
  - $a_N = \dfrac{v^2}{R}$ (Dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria).

Las componentes de la aceleración también son vectores.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N\,;\ a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$



La aceleración relativa a un **observador en movimiento** si el sistema de referencia móvil del observador está acelerado es:

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{obj} - \vec{a}_{sis}$$

- El **sistema de referencia inercial** es aquel en que $\vec{a}_{sis} = 0$.
- El **sistema de referencia no inercial** es aquel en que $\vec{a}_{sis} \neq 0$.

Clasificación de los movimientos según su aceleración:

MRU	MRUA	MCU	MCUA
$\begin{cases} v = \text{cte.} \\ \vec{a} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a_N = 0 \\ a_T = \text{cte.} \end{cases}$	$\begin{cases} a_N = \text{cte.} \neq 0 \\ a_T = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a_N \neq 0 \\ a_T = \text{cte.} \end{cases}$

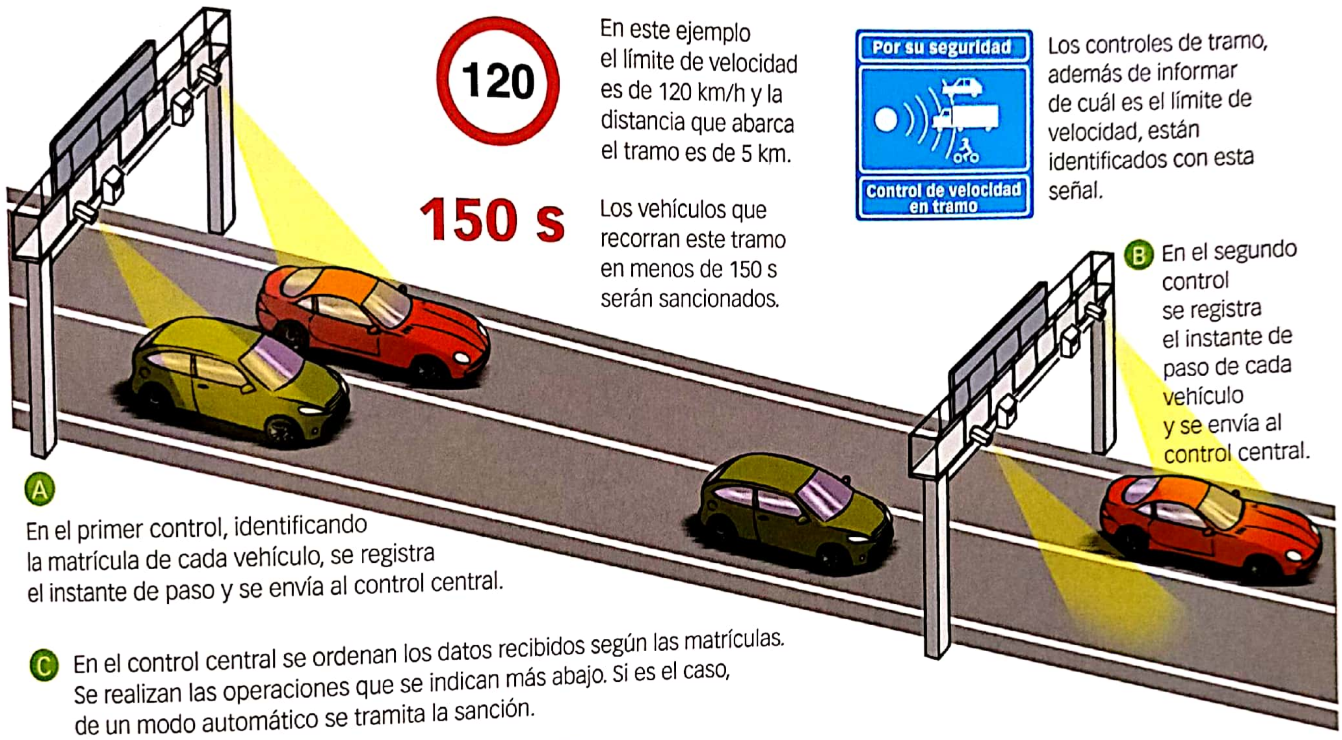
Controles de velocidad en tramo

Para mejorar la seguridad de los conductores y las conductoras, la Dirección General de Tráfico ha situado radares fijos por las carreteras. Estos aparatos miden directamente la velocidad del automóvil.

Pero es una medida puntual. Un vehículo puede circular a una velocidad mayor que la permitida, aminorar su marcha justo antes de llegar al radar para no ser sancionado y volver a circular después a una velocidad superior al límite legal.

Los controles de tramo pretenden llevar a cabo un control más exhaustivo, pues no miden la velocidad en un instante, como los radares fijos, sino la velocidad media de los vehículos durante un tramo, que puede ser de varios kilómetros. Así, si un vehículo circula con una velocidad media mayor que la permitida, será sancionado.

En el siguiente esquema se muestra cómo funcionan estos controles de velocidad de tramo.



$$v_{\text{media}} = \frac{\text{longitud del tramo}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{\text{longitud del tramo}}{t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}}$$

$$(v_{\text{media}} > v_{\text{permitida}}) \Rightarrow \text{Sanción}$$

PERFIL PROFESIONAL

Especialista en aeronáutica

¿Qué hacen?

Los especialistas en ingeniería aeronáutica se ocupan de diseñar y fabricar aeronaves y sondas espaciales. También se ocupan de controlar su funcionamiento y poner en práctica las operaciones de mantenimiento necesarias.

Asimismo, analizan el impacto ambiental de sus actuaciones.

¿Cómo lo hacen?

Analizan el movimiento de las aeronaves en la atmósfera teniendo en cuenta, por ejemplo, la resistencia del aire o las características de los materiales y los combustibles empleados por los motores.

Utilizan las matemáticas y la física constantemente en sus cálculos, y el idioma inglés es esencial en muchos proyectos, ya que a menudo implican a personal de diferentes países.