Física 2º BACH

INTRODUCIÓN

Todas as medidas de magnitudes físicas veñen afectadas dun certo erro/imprecisión/incerteza, debido a diferentes causas. No caso de medidas directas poden deberse a imperfeccións do aparello de medida, ás súas limitacións, a erros de calibración, ou tamén a erros da persoa que efectúa a medida.

O erro, incerteza ou imprecisión dunha medida defínese como a diferenza entre o valor obtido experimentalmente e o valor verdadeiro. O valor verdadeiro dunha medida non se coñece, porén o obxectivo do tratamento matemático dos erros é facer unha acotación dos posibles erros cometidos no proceso de medición, para marcar o intervalo onde se atopa o valor verdadeiro.

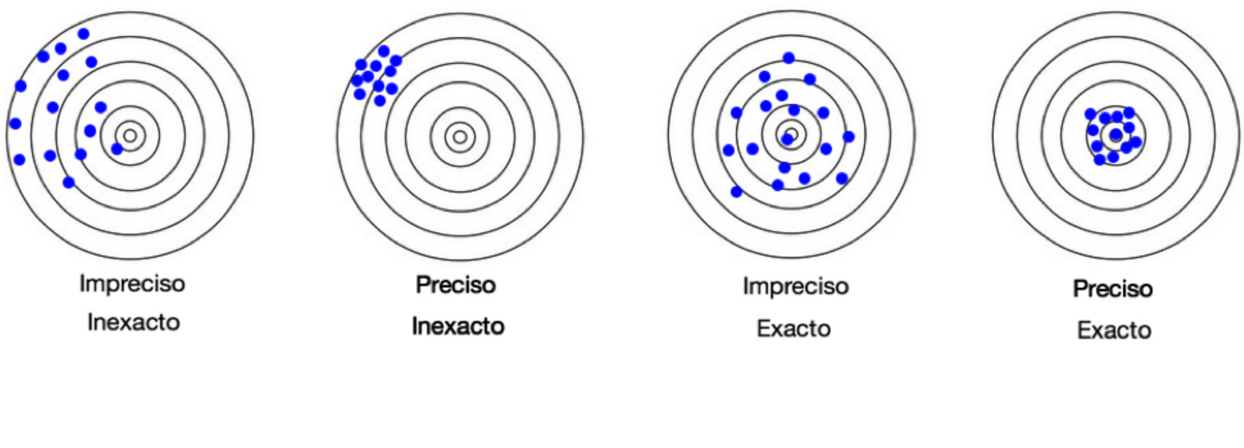
Referidos aos aparellos de medida existen tres conceptos de especial importancia: exactitude, precisión e sensibilidade.

Definicións:

Exactitude: A exactitude defínese como o grao de concordancia entre o valor verdadeiro e o medido. Dun aparello dise exacto se as medidas obtidas con el son todas moi próximas ao valor verdadeiro. Como o valor verdadeiro non se pode coñecer, poderemos comprobar a exactitude dun instrumento de medida se o intervalo onde se atopa a medida verdadeira é moi pequeno.

Precisión: A precisión é a concordancia entre as medidas obtidas da mesma cantidade, realizadas en condicións similares. Se ao realizar unha medida cun aparello obtemos valores similares dicimos que o instrumento de medida é preciso, aínda que o valor medido pode estar lonxe do valor verdadeiro da medida. A exactitude implica a precisión do aparello pero non ao revés pois un aparello preciso pode dar un valor moi afastado do valor verdadeiro. A precisión coñecese máis facilmente que a exactitude.

Sensibilidade: A sensibilidade dun instrumento de medida relaciónase co valor mínimo da cantidade dunha magnitude, que é capaz de medir. Admítese polo xeral que a sensibilidade, dun aparello de medida, é a división máis pequena da súa escala de medida (resolución do aparello), algunhas veces incluso admítese como sensibilidade a metade deste valor no caso de aparellos con escala analóxica utilizados en certos contextos (medicións de lonxitude, Tª, etc.). Exemplos: Se un reloxo dixital marca o tempo, en segundos, con dúas cifras decimais isto implica que a súa sensibilidade é 0,01 s, que é a cantidade máis pequena que pode medir. No caso dun termómetro que mida graos centígrados o erro asociado á medida podería tomarse como 0,5 ºC se o termómetro é analóxico e 1 ºC se se trata dun termómetro dixital.



CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Poderiamos definir as cifras significativas como aquelas que teñen significado (apórtanos información) sobre o resultado dunha medición. Son significativas a cifra afectada pola incerteza (último díxito) e as situadas á súa esquerda, que non sexan ceros.

9,43 g → 3 cifras significativas (c.s.)

A última cifra, aínda é significativa (apreciamos milésimas de gramo), xa no é segura. Está afectada pola incerteza da medida.

0,030 s → 2 (c.s.). O cero á dereita si é significativo (apreciamos milésimas de segundo).

Os ceros é esquerda non son significativos, só serven para situala coma.

As cifras significativas apórtannos una idea da sensibilidade do aparello co que se obtivo a medida. Nos exemplos anteriores vemos que medidos a masa cunha balanza que aprecia centésimas de gramo e, o tempo, cun cronómetro que aprecia milésimas de segundo.

Non ten sentido incluír no resultado dunha medición máis cifras significativas que as afectadas polo erro (incerteza na medida).

Ao escribir números do tipo 25 000 pode haber dúbida sobre o número de cifras significativas. Normalmente os ceros, nestes casos, non son significativos (o exemplo tería, pois, 2 c.s.), aínda que se está escrito en notación científica a dúbida deixa de existir:

$2{,}5\ 10^4$	$2{,}50\ 10^4$	$2{,}500\ 10^4$	$2{,}5000\ 10^4$
2 c. s.	3 c. s.	4 c. s.	5 c. s.

Operacións aritméticas con cifras significativas

- **Suma e resta**

  Ao sumar ou restar, o resultado debe ter un <u>número de decimais</u> igual ao do dato que teña <u>menor número de decimais.</u>

  Exemplo:

  Resultado da suma con dous decimales

  (5,423 + 6,340+ 7,45+ 6,540) g = 25,75 g

  Número con menor número de decimales (2)

- **Multiplicacións e divisións**

  Ao multiplicar ou dividir ***o resultado debe ter un número de <u>cifras significativas</u> igual ao do dato que teña <u>menor número de cifras significativas.</u>***

Exemplo:

Resultado da suma con tres cifras significativas

(5,423 x 6,340x 7,45) m = 256 m

Número con menor número de cifras significativas (3)

Ao multiplicar ou dividir por un número enteiro o resultado ten o mesmo número de cifras significativas que o dato multiplicado ou dividido.

Exemplo: 1,4 cm x 2 = 2,8 cm ; $\frac{1{,}4\ \text{cm}}{2} = 0{,}70\ \text{cm}$

Dúas cifras significativas

CÁLCULO de ERROS e INCERTEZA na MEDIDAS EXPERIMENTAIS

Erro absoluto

Unha maneira moi sinxela de estimar o erro cometido é calculando ***o erro absoluto que é a diferenza entre o valor medido ou calculado e o valor verdadeiro***.

Representa a contía da propiedade medida na que nos equivocamos con respecto ao valor considerado como verdadeiro. **Prevención de erros**: O erro absoluto **non ten signo**, e **ten unidades**.

Como **valor verdadeiro** dunha serie de medidas dunha magnitude vaise considerar a **media aritmética das medidas**.

O erro absoluto dunha medida concreta i dunha serie de medidas calcúlase mediante:

$$E_{a\ i} = \left|Valor\ medido\ ou\ calculado - Valor\ verdadeiro\right| = \left|\bar{V}_n - V_i\right|$$

$\bar{V}_n$ é a **media aritmética** da serie de medidas e asemade vai ser considerada como o valor verdadeiro. **Prevención de erros**: se unou varios dos resultados da serie de medidas están fóra da tendencia dos resultados deben desprezarse para facer o cálculo. **Exemplo**: Na serie de tempos medidos por 5 observadores/as para unha carreira de 100 m obtivéronse os seguintes resultados 12,05 s; 13,35 s; 10,80 s; 11,70 s; 11,50 s. Para calcular a media debera desprezarse claramente o valor 13,35 s. Pode haber dúbidas en desprezar o valor 10,80 s.

$\bar{V}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i}{n} = \frac{V_1 + V_2 + ... + V_n}{n}$; No caso concreto do exemplo anterior o valor verdadeiro de tempo sería

$$\bar{t} = \frac{t_1 + \cancel{t_2} + t_3 + t_4 + t_5}{\cancel{5}\,4} = \frac{12{,}05 + \cancel{13{,}35} + 10{,}80 + 11{,}70 + 11{,}50}{4} = 11{,}51\ \text{s}$$

Se só temos unha única medida non podemos calcular a media aritmética e tomaremos a sensibilidade do aparello de medida como o erro absoluto. **Exemplo**: Se medimos unha única vez a masa dunha moeda cunha balanza dixital cuxa sensibilidade é de 0,01 g e o resultado da medida é 3,13 g ; o erro absoluto da medida sería 0,01 g, igual que a sensibilidade do aparello de medida.

O erro absoluto exprésase cunha soa cifra significativa, salvo que sexa un 1, entón está permitido a expresión con dúas cifra significativas.

Exemplos: Erro: 0,067 . Aproxímase a 0,07

Erro: 1,68. Aproxímase a 1,7

IMPORTANTE: O resultado da medida exprésase do seguinte xeito:

$$\boxed{x \pm \Delta x}$$

Erro absoluto. Incerteza da medida.
Exprésase cunha soa cifra significativa

> **IMPORTANTE:**
>
> **A última cifra significativa de calquera resultado polo xeral debe ser da mesma orde de magnitude (na mesma posición decimal) que a da incerteza.**
>
> **A orde de magnitude coa que se expresa unha medida non pode ser maior que a orde de magnitude coa que se expresa o erro**. Á hora de expresar o resultado dunha medida é necesario, por tanto, **axustar o número de cifras** da medida ás das cifras da incerteza, tendo en conta que para a última cifra do resultado da medida e para a incerteza a orde de magnitude debe ser a mesma.

Exemplos:

Medida	Incerteza (erro)	Expresión
2,34 g	0,2 g	2,3 ± 0,2 g orde de magnitude décimas coincidente no resultado e no erro
4,542 s	0,003 s	4,542 ± 0,003 s orde de magnitude milésimas coincidente no resultado e no erro
5436 m Véxase aclaración	20 m	5440 ± 20 m orde de magnitude decenas coincidente no resultado e no erro
15,3 mL	2 mL	15 ± 2 mL orde de magnitude unidades coincidente no resultado e no erro

Aclaración:

$$\left.\begin{array}{l} 5,436\,.10^3 \\ 0,020\,.10^3 \approx 0,02\,.10^3 \end{array}\right\} (5,44 \pm 0,02)\,10^3 = 5440 \pm 20\text{ m}$$

Expresar medida e erro en notación científica

Axustar a medida e o erro á orde de magnitude

Se se realizou unha soa medida ou, debido á imprecisión do aparello de medida, todas as medidas dan o mesmo resultado ***tómase como erro a sensibilidade do aparello de medida.***

Exemplo:

Ao medir a lonxitude dunha mesa, cunha cinta métrica que aprecia milímetros, obtívse 1,250 m. Expresar a medida e a súa incerteza (erro).

$$\boxed{L = 1{,}250 \pm 0{,}001\,\mathrm{m}}$$

Sensibilidade da cinta métrica (1 mm)

A incerteza nunca pode ser inferior á do aparello de medida. No caso de que isto aconteza se ponse como erro a sensibilidade do aparello de medida.

Erro relativo

O erro absoluto non nos dá idea da calidade da medida realizada, xa que non é o mesmo cometer un erro de 1 cm ao medir a lonxitude dunha mesa que ao longo dunha cancha de balonmano, por exemplo.

Para determinar a calidade da medida realizada utilízase o erro relativo (que normalmente dáse en tanto por cento) e que defínese como:

Erro absoluto. Se só hai unha medida é a sensibilidade do aparello

$$E_r = \frac{E_a}{V_{verdadeiro}} \quad \text{ou} \quad E_r(\%) = \frac{E_a}{V_{verdadeiro}} \cdot 100$$

Valor verdadeiro. Se hai varias medidas é a media aritmética destas.

Se a porcentaxe de erro relativo é menor do 5% considérase que a medida é de calidade.

Exemplo:

Considera que a capacidade dun recipiente cilíndrico é de 50 mL (valor verdadeiro). Calcula o erro absoluto e relativo cometido se, mediante cálculo, obtívose como valor para a súa capacidade 48,5 mL. Expresa a medida do volume coa súa incerteza.

$$E_a = \left|V_{medido\,ou\,calculado} - V_{verdadeiro}\right| = \left|48{,}5 - 50\right| = 1{,}5\ \mathrm{mL}$$

$$E_r(\%) = \frac{E_a}{V_{verdadeiro}} \cdot 100 = \frac{1{,}5\,mL}{50\,mL} \cdot 100 = 3\,\%$$

O valor do volume do recipiente cilíndrico sería V= 49 ± 2 mL

Prevención de erros: Poderiamos pensar en escribir o volume como V= 48,5 mL ± 1,5 mL, pero o valor verdadeiro 50 mL limita o número de cifras significativas a 2, polo tanto escribimos 49 mL, e a incerteza, neste caso o erro absoluto, debe ter a mesma orde de magnitude (unidades) que o valor medido ou calculado, por iso o erro absoluto escríbese como 2 mL. V= ~~48,5~~ mL ± ~~1,5~~ mL

EXPRESIÓN DO VALOR DUNHA MAGNITUDE EXPERIMENTAL COA INCERTEZA

Como norma xeral o valor verdadeiro dunha medida coa incerteza asociada exprésase de forma xeral mediante:

valor verdadeiro ± incerteza

En función da ou das medidas das que se dispón podemos considerar varios casos ou situacións que determinarán o proceso para obter e indicar o valor verdadeiro e a incerteza asociada.

Casos a considerar:

a) Unha soa medida directa

Se só dispoñemos dun dato da propiedade a medir entón o valor verdadeiro da medida é o valor único medido expresado coas cifras significativas congruentes coa sensibilidade do aparello de medida. A incerteza da medida é a sensibilidade do aparello.

valor da medida ± sensibilidade do aparello

Exemplos:

.- Se medimos un único tempo de caída libre (3,21 s) dun obxecto cun cronómetro cuxa sensibilidade é de centésimas de segundo a expresión correcta do valor medido coa incerteza asociada é 3,21 ± 0,01 s

.- Se medimos unha única vez a masa dunha moeda (2,1 g) cunha balanza cuxa sensibilidade é de décimas de gramo debemos expresar o resultado como 2,1±0,1 g

b) Unha soa medida indirecta

Se a medida que queremos obter non se obtén de xeito directo a través dun aparello de medida senón por medio dunha fórmula (Ex.: área dun cadrado, volume dun cilindro, potencia dunha lente, índice de refracción dun medio, etc.) habería que recorrer a realizar un tratamento matemático para analizar a propagación de erros á que dá lugar a fórmula utilizada en cada caso para determinar o valor da incerteza asociada ao proceso de medida. O tratamento matemático anterior excede os obxectivos de 2º de Bacharelato.

c) Varias medidas directas (Desviación típica)

Se a propiedade a medir se obtén a través da repetición da medida certo número de veces entón temos que recorrer ao cálculo da desviación típica.

Exemplo

Ao medir o período T dun péndulo (cun cronómetro cuxa sensibilidade é de milésimas de segundo) obtivéronse os seguintes valores (ver táboa). **Prevención de erros**: Aínda que non é correcto dicir que a precisión do cronómetro é de milésimas pois se trata da sensibilidade, é moi frecuente dicir nos libros de texto de Física que “o cronómetro aprecia milésimas de segundo” referíndose á sensibilidade.

Medidas	T (s)
1	1,880
2	2,005
3	1,987
4	2,150
5	1,876
Media	**1,980**

A forma correcta de expresar o valor da medida sería calcular a media aritmética dos períodos como valor verdadeiro e realizar o cálculo da desviación típica da media dos períodos a cal sería a incerteza da medida.

valor medio ± desviación típica

A **incerteza da media aritmética** vén dada pola **desviación típica** da media (σ_m) :

$\sigma_m=\sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$ onde x_i é a medida i, $\bar{x}$ é a media aritmética da propiedade medida, neste caso o período, n é o número de datos, neste caso 5 medidas do período do péndulo.

$$\sigma_m=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{(1{,}880-1{,}980)^2+(2{,}005-1{,}980)^2+(1{,}987-1{,}980)^2+(2{,}150-1{,}980)^2+(1{,}876-1{,}980)^2}{5(5-1)}}$$

Para o exemplo: $\sigma_m = 0{,}05\ \text{s}$ $\boxed{T = 1{,}98 \pm 0{,}05\ (\text{s})}$

IMPORTANTE (**Prevención de erros**): Hai que ter en conta que se, como resultado do cálculo anterior, obtemos un erro inferior á sensibilidade do aparello de medida poremos como incerteza da medida a **sensibilidade** do aparello. Ex.: Se σ_m = 0,003 s e a sensibilidade do cronómetro fose de centésimas de segundo teriamos que considerar que a incerteza é 0,01 s e non ~~0,003 s~~.

d) Varias medidas indirectas

É frecuente en problemas de Física de 2º de Bacharelato dada unha táboa de datos experimentais dunha práctica de laboratorio na que aparecen datos de: ángulos de incidencia e refracción para calcular o índice de refracción; ou datos da distancia obxecto e distancia imaxe para calcular con fórmula a potencia dunha lente, etc. pedir a incerteza da medida indirecta. Como a medida indirecta require o uso de fórmula sería necesario realizar un tratamento de erros asociado á fórmula utilizada en cada caso para calcular a medida indirecta. O tratamento matemático anterior excede os obxectivos deste curso polo que se vai simplificar e neste caso como **valor verdadeiro** tómase a **media aritmética** dos valores obtidos indirectamente da propiedade calculada a través da fórmula. A incerteza asociada á medida calcúlase por medio do **erro absoluto medio de cada unha das medidas**. Ex.: Para determinar o índice de refracción dun vidro debemos utilizar a seguinte expresión $n_{vidro} = \dfrac{sen\,\hat{i}}{sen\,\hat{r}}$ onde $\hat{i}$ e $\hat{r}$ son os ángulos de incidencia e refracción respectivamente. O cálculo do índice de refracción do vidro a partir dos ángulos de incidencia e refracción é un caso de medida indirecta pois precisamos aplicar unha fórmula. Na seguinte táboa aparecen os datos experimentais.

$\hat{i}$ (º)	10	20	30	40	50	60

$\hat{r}$ (º)	7,5	13	20	26	32	37

IMPORTANTE: Neste caso todas os ángulos teñen dúas cifras significativas e imos expresar o índice de refracción con dúas cifras significativas. Se houbese disparidade no número de cifras significativas poderiamos chaegar a resultados absurdos. Se o primeiro dato de $\hat{r}$ fose 8º e aplicásemos o principio de utilizar o menor número de cifras significativas dos datos de partida no resultado final teriamos que expresar o índice de refracción cunha coa cifra significativa o que resulta improcedente "Cálculos tan complexos para dar un dato cunha soa cifra". Cando se cheguen a estas incoherencias recórrese a igualar todos os datos de partida co mesmo número de cifras significativas, dúas neste exemplo.
Outro aspecto a ter en conta é o de utilizar en cálculos intermedios, neste caso os do sen $\hat{i}$, sen $\hat{r}$ e a división dos resultados anteriores; polo menos dúas cifras significativas máis que as que se van utilizar para expresar o resultado final. Como imos expresar n_{vidro} con dúas cifras significativas utilizaremos polo menos catro cifras significativas en cálculos intermedios.

Experiencia nº→	1	2	3	4	5	6
n_{vidro}	1,330	1,520	1,462	1,446	1,446	1,439
sen $\hat{i}$	sen 10º	sen 20º	sen 30º	sen 40º	sen 50	sen 60º
sen $\hat{r}$	sen 7,5º	sen 13º	sen 20º	sen 26º	sen 32º	sen 37º

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{n} = \frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6}{6} = \frac{1{,}330+1{,}520+1{,}462+1{,}446+1{,}446+1{,}439}{6} = 1{,}447 \approx 1{,}5$$

Prevención de erros: O índice de refracción non ten unidades.

Aproximamos a dúas cifras significativas e expresamos n_{vidro} como 1,5.

A incerteza é $$\overline{E_{a_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_{a_i}}{n} = \frac{|n_i - \bar{n}|}{n} = \frac{E_1+E_2+E_3+E_4+E_5+E_6}{6} =$$

$$\frac{|1{,}330-1{,}447|+|1{,}520-1{,}447|+|1{,}462-1{,}447|+2\cdot|1{,}466-1{,}447|+|1{,}439-1{,}447|}{6} = 0{,}0468 \approx 0{,}05 \approx 0{,}1$$

A incerteza debe ter a mesma orde de magnitude que o valor do índice de refracción do vidro.

O valor do índice de refracción do vidro coa estimación da incerteza será:

1,5 ± 0,1