MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula os valores de m para os que A ten inversa.

b) Para $m = 1$, calcula a matriz X que verifica: $X \cdot A + X - 2A = 0$.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & m \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = -1$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Sexan $\vec{u}$, $\vec{v}$ dous vectores tales que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$. Calcula o ángulo que forman os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Calcula o produto m.ixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}]$, sendo $\vec{u} \times \vec{v}$ o produto vectorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) Dadas as rectas $r: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$; $s: \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$

estuda a súa posición relativa e calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e contén a r.

Opción 2. a) ¿Son coplanarios os puntos $A(1,0,0)$, $B(3,1,0)$, $C(1,1,1)$ e $D(3,0,-1)$? En caso afirmativo, calcula a distancia da orixe de coordenadas ao plano que os contén.

b) Calcula o punto simétrico do punto $P(0,0,1)$ respecto do plano $\pi : x - 2y + 2z - 1 = 0$.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax + b & se\ x < -1 \\ x^2 - 4x & se\ x \geq -1 \end{cases}$
sexa continua e derivable en $x = -1$.

c) Calcula a área do recinto limitado polas parábolas $y = x^2 - 4x$; $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x$.

Opción 2. a) Enunciado do teorema de Weierstrass. Se unha función $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e é estritamente decrecente nese intervalo, ¿onde alcanza a función o máximo e o mínimo absoluto?

b) Calcula o valor de m para que: $\lim_{x \to 0} \dfrac{mx^2 - 1 + \cos x}{sen(x^2)} = 0$

c) Calcula $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2 + 4x + 3} dx$.

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Estuda, segundo os valores de m, o rango da matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$

b) Para o valor $m = 1$, resolve a ecuación matricial $MX = 3A^t$, sendo $A = (1\ 0\ 1)$ e A^t= matriz transposta de A. Para este valor de m, ¿canto valerá o determinante da matriz $2M^{21}$?

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & 3z & = & m \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ mx & + & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 0$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Calcula a distancia da orixe de coordenadas ao plano que pasa polo punto $P(1,1,2)$ e é perpendicular á recta $r: \begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

b) Calcula a área do triángulo que ten por vértices os puntos de intersección do plano $\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0$ cos eixos de coordenadas. ¿É un triángulo rectángulo?

Opción 2. a) Dados os planos $\pi_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$; $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$

estuda a súa posición relativa e calcula a distancia entre eles.

b) Dado o punto $P(2,1,7)$, calcula o seu simétrico respecto ao plano π_2.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Sexa $f(x) = e^x(2x - 1)$. Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento e a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto de abscisa $x = 0$.

c) Calcula: $\int_0^1 e^x (2x-1)\, dx$

Opción 2. a) Calcula a, b, c, para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & se \quad x \le 0 \\ x + \ln(1+x^2) & se \quad x > 0 \end{cases}$

sexa continua e derivable en R e teña un extremo relativo en $x = -2$. (Nota: ln = logaritmo neperiano)

b) Sexa $g(x) = x(x - 1)$, $0 \le x \le 2$. Razoa se $g(x)$ ten máximo e mínimo absolutos no intervalo [0,2]. En caso afirmativo, calcúlaos.

c) Definición de primitiva dunha función. Enunciado da regra de Barrow.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

Opción 1

a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos por despexar X

1 punto polo cálculo de $(A+I)^{-1}$

0,5 puntos polos cálculos de $2A$ e $2A\cdot(A+I)^{-1}$

Opción 2

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención do rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada

0,5 puntos. Sistema Incompatible

0,5 puntos. Sistema Compatible Indeterminado

b) 1 punto, pola resolución do sistema

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)

Opción 1

a) 1 punto, distribuído en

0,5 puntos por obter que os vectores son perpendiculares

0,5 puntos polo cálculo do producto mixto

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto polo estudo da posición relativa das rectas

1 punto pola obtención da ecuación do plano.

Opción 2

a) 1,5 puntos, distribuídos en

0,5 puntos por probar que os puntos son coplanarios.

1 punto polo cálculo da distancia da orixe ao plano

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención da recta perpendicular ao plano

0,5 puntos polo punto de intersección da recta co plano

0,5 puntos polo cálculo do punto simétrico

BLOQUE 3 (ANÁLISE)

Opción 1

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1,5 punto, distribuído en:

0,75 puntos pola continuidade

0,75 puntos pola derivabilidade

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,75 puntos pola formulación do problema

0,75 puntos polo cálculo da integral definida.

Opción 2

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Weierstrass

0,5 puntos pola cuestión relativa ao máximo e ao mínimo da función.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

1 punto pola aplicación da regra de L'Hôpital

0,5 puntos pola obtención de m

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola descomposición en fraccións simples.

1 punto pola integración

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

Opción 1

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos por $\text{rang}(M) = 3$ se $m \neq 0$.

0,5 puntos por $\text{rang}(M) = 1$ se $m = 0$.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1,5 puntos pola obtención de X.

0,5 puntos polo cálculo do determinante da matriz $2M^{21}$.

Opción 2

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada

1 punto pola discusión do sistema:

0,5 puntos. Sistema Incompatible

0,5 puntos. Sistema Compatible Determinado

b) 1 punto, pola resolución do sistema

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)

Opción 1

a) 1,5 puntos, distribuídos en

0,5 puntos pola obtención do vector normal ao plano

0,5 puntos pola obtención do plano

0,5 puntos polo cálculo da distancia

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0, 5 puntos polo cálculo dos vértices

0,5 puntos polo cálculo da área

0,5 puntos por ver que non é rectángulo.

Opción 2

a) 1,5 puntos, distribuídos en

1 punto polo estudo da posición relativa.

0,5 puntos polo cálculo da distancia entre os planos.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención da recta perpendicular ao plano

0,5 puntos polo punto de intersección da recta co plano

0,5 puntos polo cálculo do punto simétrico

BLOQUE 3 (ANÁLISE)

Opción 1

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

1 punto polo cálculo dos intervalos de crecemento e decrecemento.

0,5 puntos pola obtención da recta tanxente.

c) 1,5 puntos, distribuídos en

1 punto pola integración por partes

0,5 puntos pola aplicación de Barrow.

Opción 2

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención de c (condición de continuidade)

0,5 puntos pola obtención de b (condición de derivable).

0,5 puntos pola obtención de a (condición de extremo relativo).

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,50 puntos polo razoamento

0,50 puntos polo máximo absoluto

0,50 puntos polo mínimo absoluto

c) 1 punto, distribuído en

0,5 puntos pola definición de primitiva.

0,5 puntos pola regra de Barrow.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) A ten inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$. Calculamos polo tanto o determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m(m-2)$$

así, A ten inversa para os valores de m distintos de 0 e 2: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{0,2\}$ **(1 punto)**

b) $\boxed{m = 1}$; $XA + X = 2A \Leftrightarrow X(A+I) = 2A$. Para poder despexar X estudamos se a matriz $A+I$ ten inversa

$$|A+I| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1-1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists (A+I)^{-1}$$

entón, $X = 2A(A+I)^{-1}$. **(0,5 puntos)**

Calculamos $(A+I)^{-1}$:

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{|A+I|}(Adj(A+I))^t = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **(1 punto)**

e así:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)

Opción 2. a)

$$\text{Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & m \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ |C| = -8+1+9+6-2-6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = 2$$

(0,5 puntos)

Calculamos o rango da matriz ampliada, orlando o menor de orde 2 non nulo anterior coa columna dos termos independentes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4+m+18+6m-4-3 = 7m+7 = 7(m+1)$$

Polo tanto

$$m \neq -1 \Rightarrow rang(A) = 3$$
$$m = -1 \Rightarrow rang(A) = 2$$

(0,5 puntos)

Discusión:

$m \neq -1$, $rang(C) = 2 \neq 3 = rang(A)$, sistema incompatible, non ten solución **(0,5 puntos)**

$m = -1$, $rang(C) = 2 = rang(A) < 3 = n^o$ *incógnitas*, sistema compatible indeterminado, infinitas solucións. **(0,5 puntos)**

b) $\boxed{m = 1}$; estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. Un sistema equivalente ao dado é:

$$2x + 3y = -1-z$$
$$x - 2y = 2-z$$

polo tanto

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & 3 \\ 2-z & -2 \end{vmatrix}}{-7} = -\frac{5}{7}z + \frac{4}{7}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-7} = \frac{1}{7}z - \frac{5}{7}$$

e as infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{7}\lambda + \frac{4}{7} \\ y = \frac{1}{7}\lambda - \frac{5}{7}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$ **(1 punto)**

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a)

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = 3 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} = 9 \\ |\vec{v}| = 4 \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{v} = 16 \\ |\vec{u}-\vec{v}| = 5 \Leftrightarrow 25 = (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u + v\cdot v - 2u\cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$25 = 9 + 16 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é nulo e polo tanto son dous vectores perpendiculares. **(0,5 puntos)**

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}] = [\vec{u}\times\vec{v},\vec{u},\vec{v}] = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = |\vec{u}\times\vec{v}|^2 =$$

$$|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot sen^2(\vec{u},\vec{v}) = 9\cdot16\cdot1 = 144$$ **(0,5 puntos)**

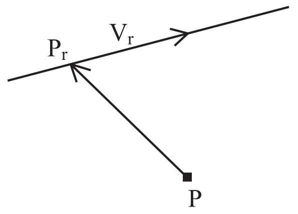
b) A partir das ecuacións das rectas podemos comparar os seus vectores directores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = (3,2,-2) \\ \vec{v_s} = (6,4,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_r} \text{ e } \vec{v_s} \text{ son paralelos} \Rightarrow \text{ as rectas}$$

son paralelas ou coincidentes.

Pero o punto $P_r(3,1,–1) \in r$ e $P_r(3,1,–1) \notin s$. Polo tanto as rectas son paralelas non coincidentes **(1 punto)**

As coordenadas do punto $P(1,1,1)$ non cumpren as ecuacións da recta r, e polo tanto $P(1,1,1) \notin r$.



O plano pedido quedará determinado por:

$P(1,1,1)$, punto exterior a r;

$\vec{v}_r = (3,2,–2)$, vector director de r

$\overrightarrow{PP_r} = (2,0,–2)$

Así, a ecuación xeral do plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{e desenvolvendo o determinante}$$

obtense $2x – y + 2z – 3 = 0$ **(1 punto)**

<u>Opción 2</u>. a)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,1,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,1) \end{array}\right\}$$ son dous vectores non nulos e non proporcionais; polo tanto, o punto A e os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinan un plano π que será o plano que contén aos puntos A, B e C:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \pi: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Como as coordenadas do punto D verifican a ecuación anterior, os puntos son coplanarios. **(0,5 puntos)**

A ecuación do plano que os contén é:

$$\pi : x – 2y + 2z – 1 = 0$$

A distancia da orixe $O(0,0,0)$ ao plano π será:

$$d(O,\pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{1+4+4}} = 1/3 \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Sexa r a recta perpendicular a π pasando por $P(0,0,1)$, entón r ten como vector director $\vec{v}_r$ = vector normal a $\pi = (1,–2,2)$; polo tanto, as ecuacións paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \qquad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Substituindo na ecuación de π, calculamos a intersección de r con π

$$\lambda + 4\lambda + 2 + 4\lambda – 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = –1/9$$

e así, o punto de intersección da recta co plano é $M(–1/9, 2/9, 7/9)$ **(0,5 puntos)**

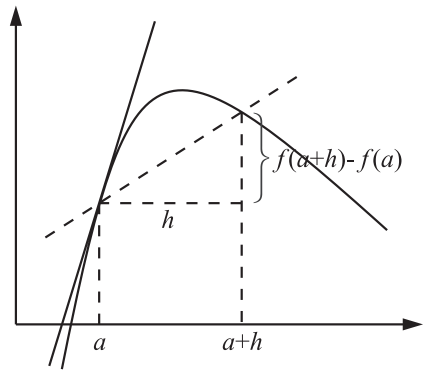
Como $M(–1/9, 2/9, 7/9)$ é o punto medio de $P(0,0,1)$ e o seu simétrico $P´(x,y,z)$, entón

$$\left.\begin{array}{r} -1/9 = x/2 \\ 2/9 = y/2 \\ 7/9 = z+1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow P'(-2/9, 4/9, 5/9) \qquad \textbf{(0,5 puntos)}$$

<u>BLOQUE 3 (ANÁLISE)</u> *(Puntuación máxima 4 puntos)*

<u>Opción 1</u>. a) Dada a función $y = f(x)$, dise que $f(x)$ é derivable en $x = a$, se existe e é finito o límite:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ represéntase por $f'(a)$ e chámase derivada de $f(a)$ en $x = a$. **(0,5 puntos)**



Interpretación xeométrica: o cociente $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ coincide coa pendente da recta secante que pasa por $(a,f(a))$ e $(a+h,f(a+h))$. A medida que vai diminuíndo a amplitude do intervalo $[a, a+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convértese na tanxente.

Así: a derivada de $f(x)$, en $x = a$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(a, f(a))$. **(0,5 puntos)**

b)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (ax+b) = -a+b \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 - 4x) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow -a+b = 5, \text{para}$$

que sexa continua en $x = –1$ **(0,75 puntos)**

Para ser derivable en $x = –1$ ten que ser continua nese punto, polo tanto $–a + b = 5$ e ademais,

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{-\cancel{a} + ah + \cancel{b} - \cancel{5}}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{ah}{h} = a \\ f'(-1^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{\cancel{1} - 2h + h^2 + \cancel{4} - 4h - \cancel{5}}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} (-6+h) = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -6 \Rightarrow b = -1$$

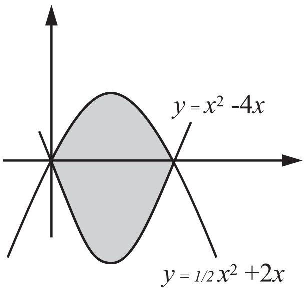
(0,75 puntos)

c)

$$y = x^2 - 4x \begin{cases} \text{puntos de corte cos eixos: } (0,0),\ (4,0) \\ \left.\begin{array}{l} y'=2x-4;\ y'=0 \Leftrightarrow x=2 \\ y''=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mínimo } (2,-4) \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \begin{cases} \text{puntos de corte cos eixos: } (0,0),\ (4,0) \\ \left.\begin{array}{l} y'=-x+2;\ y'=0 \Leftrightarrow x=2 \\ y''=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{máximo } (2,2) \end{cases}$$

Puntos de corte das parábolas:



$$x^2 - 4x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Polo tanto a área da rexión limitada polas parábolas estará dada pola integral definida

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - x^2 + 4x \right) dx$$ **(0,75 puntos)**

Calculamos agora a integral anterior:

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - x^2 + 4x \right) dx = \int_0^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x \right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \right]_0^4 = -32 + 48 = 16u^2$$ **(0,75 puntos)**

Opción 2. a) Teorema de Weierstrass: Se unha función $f(x)$ é continua nun intervalo pechado $[a,b]$, a función alcanza nese intervalo o máximo e o mínimo absolutos. **(0,5 puntos)**

Por ser $f(x)$ continua en $[a,b]$, polo teorema anterior alcanza nese intervalo o máximo e o mínimo absolutos. Entón, como por hipótese a función é estritamente decrecente

$a < x \le b \Rightarrow f(a) > f(x) \Rightarrow f(x)$ alcanza o máximo absoluto en $x = a$

$a \le x < b \Rightarrow f(b) < f(x) \Rightarrow f(x)$ alcanza o mínimo absoluto en $x = b$ **(0,5 puntos)**

b) $\lim_{x\to 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{sen(x^2)}$ é unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$.

Utilizamos a regra de L´Hôpital dúas veces xa que despois de utilizala a primeira vez segue sendo unha indeterminación do tipo tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{sen(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx - senx}{2x \cdot \cos(x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2m - \cos x}{2\cos(x^2) - 4x^2 sen(x^2)} = \frac{2m-1}{2}$$ **(1 punto)**

entón $\lim_{x\to 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{sen(x^2)} = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1/2$

(0,5 puntos)

c) Factorizamos o denominador $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \text{ (raíces simples)}$$

descompoñemos o integrando en fraccións

$$\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

e calculamos A e B

$$x = -1 \Rightarrow 4 = 2A \Rightarrow A = 2$$

$$x = -3 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$$ **(0,5 puntos)**

polo tanto

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$= 2\ln|x+1| - \ln|x+3| + C$ **(1 punto)**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) $$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{vmatrix} = -m^2 \ ;\ |M| = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Polo tanto: $m \ne 0 \Rightarrow rang(M) = 3$ **(0,5 puntos)**

$m = 0 \Rightarrow rang(M) = 1$

(2^a e 3^a columnas son de ceros) **(0,5 puntos)**

b) $\boxed{m = 1}$

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ matriz cadrada de orde } 3 \\ A^t \text{ matriz columna de orde } 3\times 1 \end{array}\right\} \Rightarrow X \text{ é unha matriz}$$

columna de orde 3×1

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x & -z & = 3 \\ -x & & = 0 \\ 2x - y & + z & = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$ **(1,5 puntos)**

$m = 1 \Rightarrow \det(M) = -1.$

$\det(M^{21}) = (-1)^{21} = -1 \Rightarrow \det(2M^{21}) = 2^3 \cdot (-1) = -8$ **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Cálculo do rango da matriz C dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 + m + 3m + 9 + 2 = 4m + 8$$

Polo tanto:

$m \neq -2 \Rightarrow rang(C) = 3$

$m = -2 \Rightarrow rang(C) = 2$ **(0,5 puntos)**

Cálculo do rango da matriz ampliada A (polo anterior xa podemos dicir que ten rango 3 se $m \neq 2$), para $m = 2$ temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 9 + 6 - 2 - 4 - 9 + 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$rang(A) = 3$ **(0,5 puntos)**

Discusión do sistema:

$m = -2 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$. Sistema incompatible, non ten solución. **(0,5 puntos)**

$m \neq -2 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = n^o incógnitas$. Sistema compatible determinado, solución única. **(0,5 puntos)**

b) $\boxed{m = 0}$ Estamos no caso de sistema compatible determinado, solución única. Resolvémolo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{8} = 5/8; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{8} = 3/4;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{8} = 3/8$$ **(1 punto)**

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) Poñendo $z = \lambda$, obtemos as ecuacións paramétricas da recta r:

$$\begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Polo tanto, $\vec{v} = (1/2, -1, 1)$= vector director da recta r = vector normal aos planos perpendiculares a r.

Entón o plano π perpendicular a r pasando polo punto $P(1,1,2)$ será:

$1/2(x-1) - (y-1) + (z-2) = 0$; é dicir

$\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0$ **(1 punto)**

e a distancia da orixe $O(0,0,0)$ ao plano π será:

$$d(O,\pi) = \frac{|-3|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$$ **(0,5 puntos)**

b) Intersecando o plano cos eixes de coordenadas obtemos as coordenadas dos vértices do triángulo:

A(3,0,0); B(0,-3/2,0); C(0,0,3/2) **(0,5 puntos)**

Polo tanto $\vec{AB} = (-3, -3/2, 0)$; $\vec{AC} = (-3, 0, 3/2)$;

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3/2 & 0 \\ -3 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j} - \frac{9}{2}\vec{k}$$

$$\text{Área } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{81}{16} + \frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = 27/8\ u^2$$

(0,5 puntos)

Ademais, como os produtos escalares

$$\left.\begin{matrix} \vec{AB} \cdot \vec{AC} \neq 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{BC} \neq 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{BC} \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Non hai dous lados perpendiculares}$$

e polo tanto o triángulo non é rectángulo. **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Das ecuacións paramétricas do plano π_2 dedúcese que un punto deste plano é (3,0,1) e dous vectores do plano son (2,2,1) e (2,-2,-3). Podemos entón obter a ecuación xeral deste plano:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ; } -4(x-3) + 8y - 8(z-1) = 0;$$

$\pi_2 : x - 2y + 2z - 5 = 0$

Polo tanto, comparando os coeficientes das ecuacións xerais dos dous planos, temos:

$\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} \neq \frac{-5}{-1} \Rightarrow$ Os planos son paralelos e distintos. **(1 punto)**

A distancia entre π_1 e π_2 será

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|-5-(-1)|}{\sqrt{1+4+4}} = 4/3$$ **(0,5 puntos)**

b) Para obter as ecuacións paramétricas da recta r perpendicular a π_2 pasando por $P(2,1,7)$, basta ter en conta que o vector (1,-2,2) normal a π_2 é un vector director de r. Polo tanto:

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 7+2\lambda \end{cases}$$ **(0,5 puntos)**

Substituindo na ecuación de π_2, calculamos a intersección de r con π_2

$2 + \lambda - 2(1-2\lambda) + 2(7+2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

e así, o punto de intersección de r con π_2 é $M(1,3,5)$ **(0,5 puntos)**

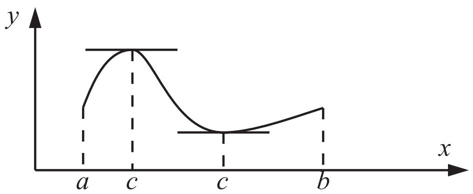
Como $M(1,3,5)$ é o punto medio de $P(2,1,7)$ e o seu simétrico $P'(x,y,z)$, entón

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \dfrac{x+2}{2} \\ 3 = \dfrac{y+1}{2} \\ 5 = \dfrac{z+7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{P}'(0,5,3)$$ **(0,5 puntos)**

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1.

a) Teorema de Rolle: sexa $f(x)$ unha función continua en [a,b], derivable en (a,b) e con $f(a) = f(b)$. Entón, existe algún punto $c \in (a,b)$ no que a derivada da función se anula, $f'(c) = 0$. **(0,5 puntos)**



Interpretación xeométrica:

Baixo as hipóteses do teorema de Rolle, podemos garantir a existencia de polo menos un punto c en (a,b) tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(c,f(c))$ é paralela ao eixe OX. **(0,5 puntos)**

b) $f(x) = e^x(2x-1)$

$f'(x) = e^x(2x-1) + 2e^x = e^x(2x+1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$ (a función exponencial non se anula en ningún punto)

Estudamos o signo de $f'(x)$ nos intervalos $(-\infty,-1/2)$ e $(-1/2,\infty)$: **(1 punto)**

$x \in (-\infty,-1/2) \Rightarrow f'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo.

$x \in (-1/2,-\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

x	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,-\infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	decrecente	crecente

A ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(0,f(0))$ está dada por: $y - f(0) = f'(0)(x-0)$. Entón, como $f(0) = -1$, e $f'(0) = 1$, a ecuación da recta tanxente pedida é: $y = x + 1$ **(0,5 puntos)**

c) Calculamos a integral indefinida polo método de integración por partes:

$\int e^x(2x-1)dx = e^x(2x-1) - \int 2e^x dx = e^x(2x-3) + C$

$u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ **(1 punto)**

e aplicando a regra de Barrow

$\int_0^1 e^x(2x-1)dx = [e^x(2x-3)]_0^1 = e(-1) - (-3) = 3 - e$

(0,5 puntos)

Opción 2.

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = c \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = c \end{array}\right\} \Rightarrow c = 0,\ \text{para que sexa continua en}$$

$x = 0$ **(0,5 puntos)**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ax^2+bx}{x} = b \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\ln(1+x^2)}{x} = 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x}{1+x^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{b=1,}$$

para que sexa derivable en $x = 0$ **(0,5 puntos)**

Finalmente, analizamos a condición de extremo relativo:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2ax+1, \ \text{se x<0} \\ f'(-2) = -4a+1 \\ f'(-2) = 0, \ \text{por ser un extremo relativo} \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1/4$$

(0,5 puntos)

b) $g(x) = x^2 - x$ é continua no intervalo pechado [0,2] xa que é unha función polinómica. Polo teorema de Weierstrass, $g(x)$ alcanza en [0,2]o máximo e o mínimo absolutos. **(0,5 puntos)**

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) = 2x-1 \\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2 \\ g''(x) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mínimo relativo en } \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$$

Como nos extremos do intervalo $g(0)=0$; $g(2)=2$ entón, $g(x)$ alcanza o mínimo absoluto en $x = 1/2$ **(0,5 puntos)**

e alcanza o máximo absoluto en $x = 2$. **(0,5 puntos)**

c) Dada unha función $f(x)$, dise que a función $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ **(0,5 puntos)**

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón cúmprese que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. **(0,5 puntos)**