Sistemas e Inecuacións

1. Introdución

A linguaxe alxébrica facilita a resolución de problemas de distinta natureza. Os sistemas de ecuacións e de inecuacións son un paso máis nesa dirección.

2. Sistemas Lineais

Unha **ecuación lineal** é unha ecuación de 1º grao que pode ter unha o varias incógnitas. A solución dunha ecuación lineal é o conxunto de valores que, ao substituílos no lugar das incógnitas, cumpren a ecuación.

Exemplo 1

Dada a ecuación lineal, $3x + y = 0$ Calcula alguna solución. Cántas podes atopar?

$Podemos\ comprobar\ que\ \ x = 1\ e\ y = -3\ é\ unha\ solución\ da\ ecuación \Rightarrow 3 \cdot 1 + (-3) = 0$

$Se\ tomamos\ por\ exemplo\ x = 0, y = 0\ tamén\ é\ solución\ \ \Rightarrow 3 \cdot 0 + 0 = 0$

$ou\ x = 2\ , y = -6 \Rightarrow 3 \cdot 2 + (-6) = 0 \ldots e\ así\ sucesivamente\ poderemos\ atopar$

$infinitas\ solucións.$

Exemplo 2

$3x + 4y - 2z + t = 15\ \ Podemos\ comprobar\ que\ son\ solucións\ desta\ ecuación$

$x = 0, y = 0, z = 0\ e\ t = 15\ ou\ tamén\ x = 1, y = 3, z = 2\ e\ t = 4$, ambos valores verifican a ecuación.

$Nestes\ casos\ a\ única\ forma\ de\ dar\ todas\ as\ solucións\ e\ facendo\ a\ súa\ representación$

Un **sistema de ecuacións lineais** é un conxunto de ecuacións de dous ou máis ecuacións lineais. Expresións xeral:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{array}\right\}$$

x,y, z son incógnitas e o resto números reais.

Unha **solución** dun sistema de ecuacións son os valores das incógnitas que verifican todas as ecuacións.

Exemplo

Dado o sistema lineal de dúas incógnitas $\left.\begin{array}{r} 6x-5x=8 \\ -x+4y=5 \end{array}\right\}$, verifiquemos se x=3 e y=2 é solución.

$$\left.\begin{array}{r} 6x-5x=8 \\ -x+4y=5 \end{array}\right\} \; verificar\ se\ é\ solución\ x=3\ e\ y=2\ e\ substituir\ os\ valores$$

$$das\ incógnitas\ no\ sistema\ e\ verificar\ as\ igualdades:$$

$$\left.\begin{array}{r} 6\cdot 3-5\cdot 2=8 \\ -3+4\cdot 2=5 \end{array}\right\} Certo!!$$

2.1 Resolución Gráfica

Para resolver graficamente un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas, represéntase nos mesmos eixes de coordenadas cada unha das rectas definida por cada unha das ecuacións. O punto de corte das mesmas é a solución do sistema.

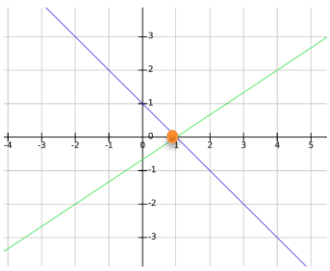
Exemplo

Resolve o seguinte sistema gráficamente $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-3y=2 \end{array}\right\}$

Debemos representar ambas rectas, despexamos a incógnita *y* e construímos una táboa de valores. Recorda que para representar unha recta necesitamos calcular dous valores.

x	y
0	1
1	0

$y=1-x$



x	y
0	-2/3
1	0

$$y=\frac{2x-2}{3}$$

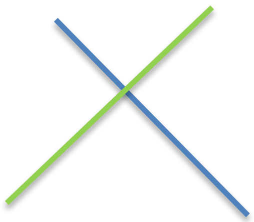
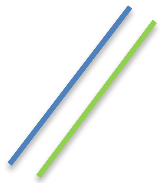
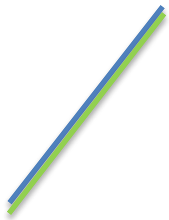
A solución é o punto de corte (1,0).

Os sistemas os clasificamos segundo o número de solucións, entón un sistema de ecuacións pode ser**:**

- **Compatible**: cando ten algunha solución
    - **Compatible determinado**: se a solución é única.
    - **Compatible indeterminado**: se existe máis dunha solución.
- **Incompatible**: cando non ten solución

Interpretación gráfica dun sistema lineal con dúas incógnitas

Dado un sistema de ecuacións $\left.\begin{array}{r} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$

Clasificación	Compatible determinado	Incompatible	Compatible indeterminado
Criterio	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
Interpretación gráfica	Rectas Secantes 	Rectas Paralelas 	Rectas Coincidentes 

2.2 Resolución alxébrica

Un **sistema de ecuacións lineais de dúas incógnitas** é da forma : $\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\}$ onde *x* e *y* son as incógnitas e o resto números reais. Para resolver estes sistemas podemos usar diferentes métodos:

- *Método de substitución*: consiste en despexar unha incógnita dunha das ecuacións e substituíla na outra.

Exemplo

$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y=1} \\ \boldsymbol{2x-3y=2} \end{array}\right\}$ $\textit{Despexamos unha incógnita por exemplo a, y, da } 1^{\underline{a}} \textit{ ecuación } y=1-x$

$\textit{e substituimos na segunda ecuación } 2x-3(1-x)=2 \textit{ e resolvemos a ecuación. Obtemos}$

$x=1 \textit{ por último con este valor calculamos o valor da } y=1-1=0$

$\textit{A solución do sistema}$ x=1 y=0

- *Método de igualación*: consiste en despexar a mesma incógnita de ámbalas dúas ecuacións e igualalas.

Exemplo

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{x+y=1} \\ \boldsymbol{2x-3y=2} \end{matrix}\right\} \text{Despexamos a mesma incógnita por exemplo a}, y \Rightarrow \begin{cases} y = 1-x \\ y = \dfrac{2x-2}{3} \end{cases}$$

$$igualamos \quad x-1 = \frac{2x-2}{3} \quad e\ resolvemos\ a\ ecuación \Rightarrow\ 3x-3 = 2x-2 \Rightarrow$$

$Obtemos\ x = 1\ por\ último\ con\ ese\ valor\ calculamos\ o\ valor\ da\ y = 1-1 = 0$

$A\ solución\ do\ sistema$ x=1 e y=0

- *Método de redución*: consiste en igualar mediante multiplicacións os coeficientes dunha das incógnitas, de modo que ao sumar ou restar as ecuacións do sistema eliminemos dita incógnita.

Exemplo

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{x+y=1} \\ \boldsymbol{2x-3y=2} \end{matrix}\right\} Igualamos\ os\ coeficientes\ dunha\ das\ \ incógnita\ por\ exemplo\ \ x,$$

$$multimplicamos\ a\ primeira\ ecuación\ por -2 \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-2 \\ \ \ 2x-3y=2 \end{cases}$$

$$Sumamos\ as\ dúas\ ecuacións\ + \ \begin{cases} -\cancel{2x}-2y=-2 \\ \ \ \cancel{2x}-3y=2 \end{cases} resolvemos\ a\ ecuación. Obtemos$$

$$-5y \quad = 0 \Rightarrow y = 0$$

$por\ último\ con\ este\ valor\ calculamos\ o\ valor\ da\ x = 1-0 = 1$

$A\ solución\ do\ sistema$ x=1 y=0

3. Método de Gauss

Para resolver un sistema de ecuacións lineais con tres incógnitas usaremos o **método de Gauss**,tamén chamado método de redución xeneralizado. Este consiste en atopar, mediante as transformacións axeitadas, outro sistema equivalente no que cada unha das ecuacións ten, polo menos, unha incógnita menos ca anterior, isto é transformamos o sistema nun sistema graduado (o escalonado).

Para aplicar Gauss, en primeiro lugar ordenamos as ecuacións e as incógnitas, de forma que o primeiro coeficiente da primeira incógnita sexa o número máis sinxelo, a poder se un. É axeitado indicar en cada paso as operacións que se realizan entre as ecuacións, para facilitar o repaso das operacións.

Vexamos o procedemento cun exemplo.

Exemplo 1

Resolve polo método de Gauss o seguinte sistema: $\left.\begin{aligned} \mathbf{3x+2y-z=3} \\ \mathbf{x+y-2z=-5} \\ \mathbf{2x+y+3z=16} \end{aligned}\right\}$

a) Escribimos a segunda ecuación en primeiro lugar

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z=-5 \\ 3x+2y-z=3 \\ 2x+y+3z=16 \end{aligned}\right\}$$

b) Elimínase o termo *x* da segunda e da terceira ecuación, aplicando o método de reducción entre a 1ª e 2ª ecuación e a 1ª e 3ªecuación.

- No lugar da segunda ecuación escribimos: $3 \cdot 1^{a} - 2^{a}$
- No lugar da terceira ecuación escribimos: $2 \cdot 1^{a} - 3^{a}$

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z=-5 \\ y-5z=-18 \\ y-7z=-26 \end{aligned}\right\}$$

c) Elimínanse o termo *y* da terceira ecuación, polo método de reducción entre a 2ª e 3ª ecuación.

- No lugar da terceira ecuación escribimos: $2^{a} - 3^{a}$

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z=-5 \\ y-5z=-18 \\ 2z=8 \end{aligned}\right\}$$

d) Resolvemos o sistema graduado

$Da\ terceira\ ecuación\ obtemos\ z=4$

$Da\ segunda\ obtemos\ y=2$

$Da\ primeria\ obtemos\ x=1$

Solución: x=1, y=2, z=4

Sistema compatible determinado, solución única

Exemplos

Resolve o seguinte sistema polo método de Gauss $\begin{cases} \boldsymbol{x - y + 3z = 4} \\ \boldsymbol{2x - y - z = 6} \\ \boldsymbol{3x - 2y + 2z = 10} \end{cases}$

a) Eliminamos a x da 2ª e 3ª ecuación: no lugar da segunda poñemos a 2ª-2 · 1ª, e no lugar da 3ª poñemos a $3^{o} - 3 \cdot 1^{a}$

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \\ y - 7z = -2 \end{cases}$$

b) Eliminamos a y da terceira ecuación no seu ligar poñemos a 3ª-2ª

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Temos o sistema graduado, pero a terceira ecuación é certa para calquera valor de z, polo tanto o sistema ten infinitas solucións. Tratase dun sistema compatible indeterminado.

Solución: $z = \lambda$; $y = -2 + 7\lambda$; $x = 4 + (-2 + 7\lambda) - 3\lambda = 2 + 4\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Resolve o seguinte sistema polo método de Gauss $\begin{cases} \boldsymbol{x - y + z = 3} \\ \boldsymbol{2x - y + 3z = 6} \\ \boldsymbol{4x - 2y + 6z = 9} \end{cases}$

a) Eliminamos x de la 2ª e 3ª (2ª- 2· 1ª e $3^{a} - 4 \cdot 1^{a}$) e obtemos:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + z = 0 \\ 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

b) Eliminamos y da terceira ecuación(3ª-2· 2ª) e obtemos:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + z = 0 \\ 0z = -3 \end{cases}$$

Observamos que a terceira ecuación é algo falso, non tes sentido. Polo tanto o sistema é incompatible, non ten solución

A vista dos exemplos podemos concluír que ao resolver un sistema usando o método de Gauss:

- Se ao reducir o sistema dado a forma triangular aparece algunha ecuación 0z=b, o sistema é incompatible, sen solución.
- Se ao reducir un sistema non sucede o anterior é compatible, pos ten solución:
  - Se o número de ecuacións non triviais é igual ao número de incógnitas o sistema é compatible determinado(Solución única)
  - Se o número de ecuación é menor que o número de incógnitas o sistema ten infinitas solucións, sistema compatible indeterminado.

4. Sistemas de ecuacións non lineais

Un sistema de ecuacións non lineais é un conxunto de dúas o máis ecuacións onde algunha delas non é lineal. Neste caso o sistema o resolvermos polo método máis axeitado en cada caso.

Exemplo

Resolve o seguinte sistema non lineal:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{y - x^2 = 4x + 2} \\ \boldsymbol{y + x = -2} \end{array}\right\}$$

Neste caso o resolveremos polo método de substitución

- Por sustitución da ecuación máis sinxela despexamos una incógnita, neste caso da segunda ecuación despexamos a *y.*

  $y = -x - 2$

- Sustituimos na primeira ecuación e resolvemos

  $-x - 2 - x^2 = 4x + 2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \end{cases}$

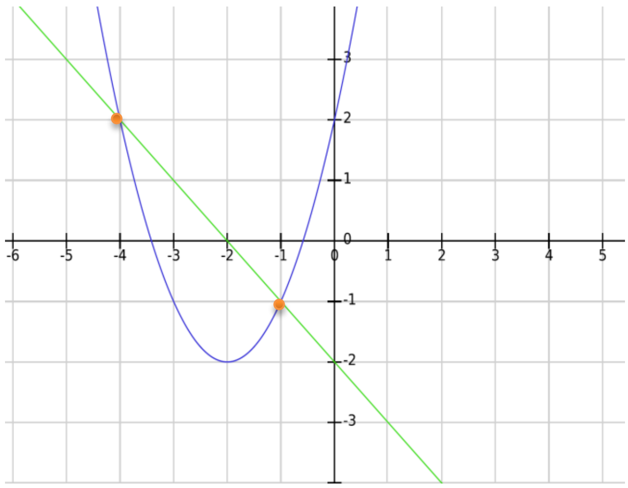
- Calculamos os valores da y

  $Para\ x = -4 \ \Rightarrow y = 2\ \ Para\ x = -1 \ \Rightarrow y = -1$

Temos neste caso dúas solucións $x = -4, y = 2 \Rightarrow (-4,2)\ \ x = -1, y = -1 \ \Rightarrow (-1,-1)$

A interpretación gráfica deste sistema é a seguinte:

As solucións representan os puntos de corte das dúas ecuacións. Neste caso trátase a primeira ecuación dunha parábola, a súa representación xa se viu en cursos anteriores. E a segunda ecuación trátase dunha recta.



5. Inecuacións

Unha inecuación é unha desigualdade entre expresións alxébricas. As solucións son os valores das incógnitas que verifican a desigualdade.

Exemplo

Son inecuacións: $x+1<2, \quad y+x\leq 3, \quad x^2-2>-y$

5.1. Inecuacións de 1º e 2º grao cunha incógnita

Unha **inecuación de 1º grao cunha incógnita**, ten coma expresión xeral $ax+b<0$ ou ben $ax+b>0$,as desigualdades tamén poden ser $\leq ou \geq$.Para resolvelas procédese de forma similar a como facemos cas ecuacións, pero tendo en conta as desigualdades. As súas solucións veñen dada por un intervalo.

Exemplos

$\mathbf{a)}\ -\mathbf{2x}+\mathbf{1}<\mathbf{7} \Rightarrow -2\mathrm{x}<7-1 \Rightarrow -2\mathrm{x}<6 \Rightarrow$

$\text{Ao dividir ente} -2 \text{ cambia desigualdade} \Rightarrow x>-3$

$Solucións=\{x\in\mathbb{R}, x>-3\}=(-3,\infty)$

$b)\left.\begin{matrix}\mathbf{3x-9<0}\\ \mathbf{2x+4\geq 0}\end{matrix}\right\} Neste\ caso\ temos\ un\ sistema, resolveremos\ as\ dúas\ ecuacións\ e$

$tomaremos\ as\ solucións\ comúns$

$\begin{cases}3x<9\\2x\geq -4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<3\\x\geq -2\end{cases} Solucións=\begin{cases}(-\infty,3)\\(-2,\infty)\end{cases} \Rightarrow [-2,3)$

Unha **inecuación de 2º grao cunha incógnita** é da forma $ax^2+bx+c<0$ ou $ax^2+bx+c>0$, as desigualdades tamén poder ser $\leq ou\ \geq$. As súas solucións pódense obter de diferentes formas.Calculado os puntos de corte co eixe OX(solucións da ecuación) e dando valores os intervalos para estudar o signo, ou ben estudado a posición da parábola respecto ao eixe OX.

Recorda:

Para representar unha parábola debemos calcular:

- **Concavidade (a>0 cóncava hacia arriba; se a <0 cóncava hacia abaixo)**
- **Vértice ($x=-\frac{b}{2a}$)**
- **Cortes cos eixes**
- **Se é necesario dar algún valor**

Para resolver as inecuacións non é preciso unha representación exacta

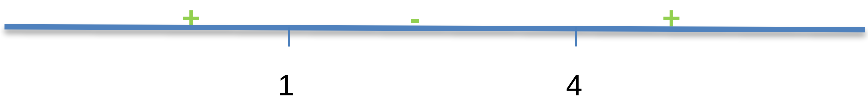
Exemplo 1

a)$\boldsymbol{x^2 - 5x + 4 \leq 0}$

- Facemos os puntos de corte co eixe OX, isto é, resolvemos a ecuación

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

- Representamos os puntos nunha recta e estudamos o signo de cada intervalo



Tomamos x=0 na expresión da ecuación obtemos 4 $\Rightarrow$ Positivo

Tomamos x=2 na expresión da ecuación obtemos -2$\Rightarrow$ Negativo

Tomamos x=5 na expresión da ecuación obtemos 4 $\Rightarrow$ Positivo

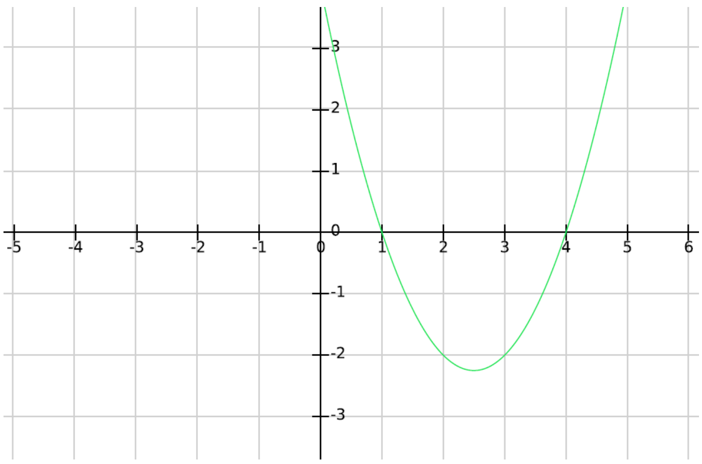
- Como a inecuación pídenos os valores ≤ 0 a solución é: $[1,4]$. Os extremos tamén son solución, xa que por seres a solución da ecuación verifican a igualdade.

Exemplo 2

b) $\boldsymbol{x^2 - 5x + 4 > 0}$

Se nos fixamos a ecuación é a mesma ca anterior cambia a desigualdade polo tanto os pasos son os mesmos pero agora para elixir a solución nos fixamos nos valores >0, neste caso a solución é: $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$.

Sen estudar o signo unha vez calculados os puntos de corte tendo en conta que o coeficiente de a=1, indícanos que a parábola é cóncava hacia arriba non teríamos que dar valores xa no lo índica a forma da parábola.



5.2. Inecuacións lineais con dúas incógnitas

Unha **inecuación lineal de dúas incógnitas** adopta unha das formas seguintes:

$$ax + by + c < 0 \quad ou\; ax + by + c > 0$$

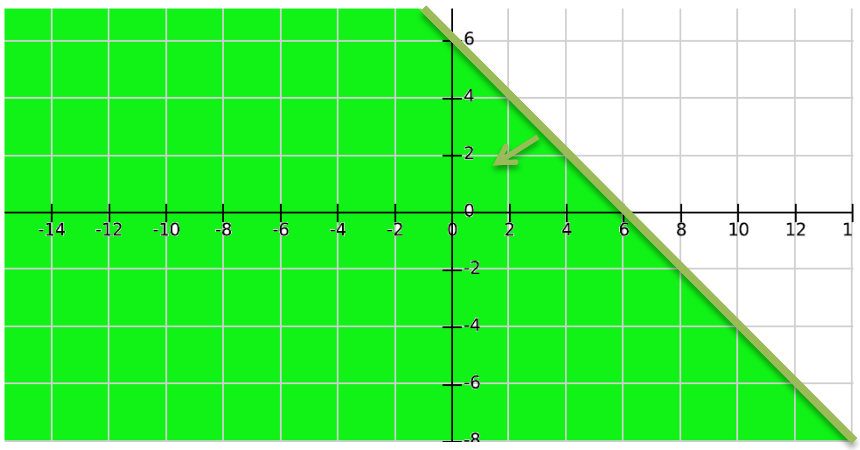
no lugar de <, > pode ser $\leq, \geq$.

As súas solucións están formadas polo semiplano que están a un dos lados da recta $ax + by + c = 0$. Cando na desigualdade está incluído o igual, os puntos da recta tamén son solución, isto o representaremos cun trazo continuo. Se os puntos da recta non están incluídos o representamos cun trazo descontinuo da recta.

Exemplo 1

$\boldsymbol{Resolve\; x + y \leq 6}$

Representamos a recta $x + y = 6$ precisamos dous puntos (0,6) (1,5)



Este divide o plano en dous semiplanos, para saber cal dos dous é solución tomamos un punto do plano, por exemplo (0,0) e comprobamos se verifica ou non a inecuación $0 + 0 \leq 6$ certo!

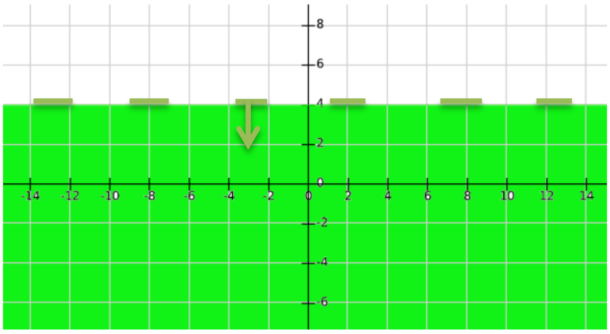
Polo tanto a solución é o semiplano indicado, incluída a recta, xa que na inecuación temos o igual.

Exemplo 2

$\boldsymbol{Resolve\ a\ inecuación\ y < 4}$

Representamos a reta y=4, é paralela o eixe OX e pasa polos puntos (0,4),(1,4),(2,4)...

Eliximos o semiplano solución estudando o signo dun punto, por exemplo (0,0)⇒ 0<4 certo!

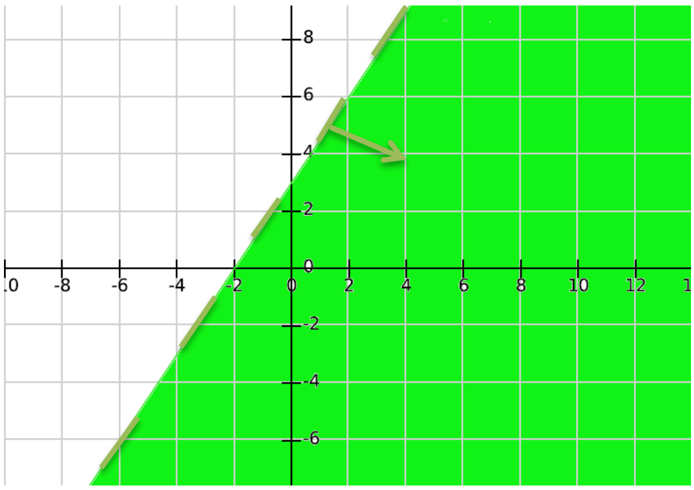


Solución o semiplano indicado, sen a recta, a poñemos descontinua.

Exemplo 3

$\boldsymbol{Resolve\ 3x - 2y > 6}$

Razoando de forma similar aos exercicios anteriores, obtemos que o recinto solución é:



Os puntos da rectas non son válidos e a poñemos descontinua.

5.3. Sistemas de inecuacións lineais con dúas incógnitas

Varias inecuacións formarán un sistema as solucións comúns a todas serán a solución do sistema. O conxunto das solucións dun sistema de inecuacións é a intersección dos semiplanos, e dicir, un recinto poligonal ou ben un recinto aberto. É posible que os semiplanos non teñan ningún punto en común, neste caso o sistema non ten solución e dise incompatible.

Exemplo

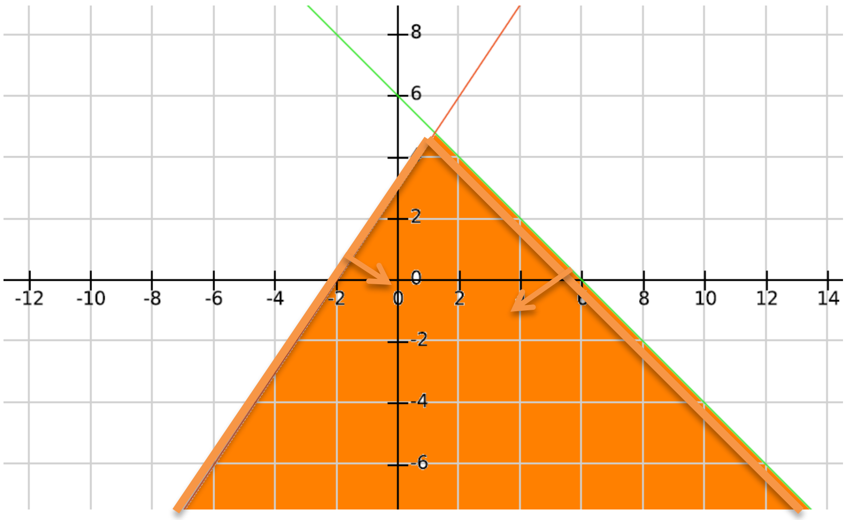
$$\boldsymbol{Resolve\ o\ seguinte\ sistema}\ \left.\begin{matrix} \boldsymbol{x+y\leq 6} \\ \boldsymbol{3x-2y\geq -6} \end{matrix}\right\}$$

Debemos resolver cada inecuación por separado, coma no apartado anterior.

A inecuación $x + y \leq 6$ está resolta no exemplo 1 , apartado anterior.

A inecuación $3x - 2y \geq -6$ é o exemplo 3, salvo que neste caso a recta está incluída.

A solución é a intersección dos semiplanos solucións de ambas inecuacións. Polo tanto a solución é o recinto sinalado:



6. Resolución de problemas

A linguaxe alxebraica é unha ferramenta para resolver problemas, para elo débense seguir os seguintes pasos:

- Formulación: Traducir o enunciado a ecuacións.
- Resolución: Resolver o sistema.
- Discusión: Comprobar que a solución obtida cumpre as condicións do enunciado.

Exemplo

Unha multinacional ten delegacións en Madrid, Barcelona e Valencia. O número total de altos executivos das tres delegacións ascende a 31. Para que o número de altos executivos da delegación de Barcelona fose igual ao de Madrid terían que trasladarse 3 de Madrid a Barcelona. Ademáis, o número dos de Madrid exceden nun á suma dos destinados nas outras dúas cidades. Cantos altos executivos están destinados en cada cidade?

Sexan x, y, z os altos executivos de Madrid, Barcelona e Valencia respectivamente.

Lendo de o problema obtemos as seguintes ecuacións:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x-1=y+z \end{array}\right\}$$

Facemos contas e resolvemos o sistema polo método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=31 \\ x-y=6 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\}$$

Eliminamos x da segunda e terceira ecuación facendo 2ª-1ª e 3ª-1ª

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=31 \\ -2y-z=-25 \\ -2y-2z=-30 \end{array}\right\}$$

Eliminamos y da terceira ecuación facendo 3ª-2ª

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=31 \\ -2y-z=-25 \\ -z=-5 \end{array}\right\}$$

Resolvemos e obtemos z=5, y= 10 e x=16

Os executivos son 16 en Madrid, 10 en Barcelona e 5 en Valencia.