MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Estuda, segundo os valores de m, o rango da matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

b) Coincide A coa súa inversa para algún valor de m?

c) Determina unha matriz simétrica X de orde 2 tal que $X \cdot \binom{1}{1} = \binom{3}{5}$ e o determinante da matriz $3X$ sexa -9

2. a) Calcula o punto simétrico do punto $P(-2,0,2)$ respecto ao plano $\pi: 3x + 2y + z - 3 = 0$.
b) Sexa r a recta perpendicular ao plano $\pi: 3x + 2y + z - 3 = 0$ e que pasa polo punto $P(-2,0,2)$.
Consideremos a recta $s: \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - z - 10 = 0 \end{cases}$
Estuda a posición relativa de r e s. Calcula a ecuación do plano paralelo a s que contén a r.

3. a) Define función continua nun punto. ¿Que tipo de discontinuidade ten $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ nos puntos $x = 0$ e $x = 2$?
b) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ no seu punto de inflexión.

4. a) Calcula $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 - \sqrt{x}}$ (Nota: ln = logaritmo neperiano)
b) Calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= m + 9 \\ mx + 3y - z &= 0 \\ 3x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = -9$.

2. a) Define o producto vectorial de dous vectores. Dados os vectores $u = (2,2,0)$, $v = (1,1,-1)$, calcula os vectores unitarios e perpendiculares aos dous vectores u e v.
b) Calcula o valor de a para que a recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ non corte ao plano $\pi: 5x + ay + 4z = 5$. Para ese valor de a, calcula a distancia da recta ao plano.

3. a) Dada a función $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$ calcula os valores de a, b, c sabendo que $x = \frac{1}{2}$ é unha asíntota vertical e que $y = 5x - 6$ é a recta tanxente á súa gráfica no punto correspondente a $x = 1$. Para os valores de a, b, c calculados, posúe $f(x)$ máis asíntotas?
b) Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Pódese aplicar, no intervalo $[0,1]$, este teorema á función $f(x) = \frac{1}{2-x}$? En caso afirmativo calcula o punto ao que fai referencia o teorema.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2$ e a recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 1$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2puntos, exercicio 4= 2puntos)

OPCIÓN A

1. a) Define menor complementario e adxunto dun elemento nunha matriz cadrada.

b) Sexan I a matriz identidade de orde 3 e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina os valores de λ para os que $A + \lambda I$ non ten inversa.

c) Calcula a matriz X que verifica $AX - A = 2X$, sendo A a matriz dada no apartado b).

2. Dado o plano $\pi: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = 4 + 3\mu \end{cases}$ e a recta $r: \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π e r. Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula o ángulo que forman π e r. Calcula o plano que contén a r e é perpendicular a π.

3. a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{cosx - e^{-2x} - 2x}{sen^2 x}$

b) Queremos dividir un fío metálico de 70 metros de lonxitude en tres partes de maneira que unha delas teña dobre lonxitude que outra e ademais que ao construír con cada parte un cadrado, a suma das áreas dos tres cadrados sexa mínima. Calcula a lonxitude de cada parte.

4. a) A segunda derivada dunha función $f(x)$ é $f''(x) = 4e^{2x} - 2x$. Ademais a tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(0,1)$ é paralela á recta $x - y + 3 = 0$. Calcula $f(x)$.

b) Calcula $\int_0^{\pi/2} xsen(2x + \pi)dx$

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:

$$\begin{aligned} x + my + (m-1)z &= m \\ (m-1)y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, para $m = 3$.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x + y - 2z - 5 = 0 \\ y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa. Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral e as ecuacións paramétricas do plano que contén a r e a s.

c) Calcula a distancia do punto $Q(1,1,4)$ á recta s.

3. Dada a función $f(x) = \begin{cases} mx & se \ \ x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & se \ \ x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula os valores de a, b e m para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$ e teña un extremo relativo en $x = 3$.

b) Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Para os valores $a = 1$, $b = -6$ e $m = -4$, calcula, se existe, un punto $c \in (0,5)$ tal que a tanxente á gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sexa paralela ao segmento que une os puntos $(0,0)$ e $(5,-4)$.

4. a) Calcula $\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x} dx$

b) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Se $F(x) = \int_0^x \frac{2}{3+3e^t} dt$, calcula $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1)

- **1** punto
- 0,5 puntos
- 1,5 puntos

2)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola recta perpendicular ao plano π e pasando polo punto P.
- 0,25 puntos polo punto de intersección da recta anterior con plano π.
- 0,25 puntos polo cálculo das coordenadas do punto simétrico.

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo da posición relativa das dúas rectas.
- 1 punto pola ecuación (vectorial, paramétrica ou implícita) do plano que contén a unha recta e é paralelo á outra.

3)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de función continua nun punto.
- 0,25 puntos polo estudo da continuidade en $x = 0$.
- 0,25 puntos polo estudo da continuidade en $x = 2$.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0, 5 puntos pola obtención do punto de inflexión.
- 0, 5 puntos pola obtención da recta tanxente no punto de inflexión.

4)

a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo cambio de variable.
- 0,5 puntos pola descomposición en fraccións simples e o cálculo das integrais que resultan.
- 0,25 puntos por aplicar Barrow

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

1)

a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m.
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto

2)

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,75 puntos pola definición do produto vectorial de dous vectores.
- 0,75 puntos pola determinación dos vectores pedidos.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo cálculo de a.
- 1 punto pola distancia da recta ao plano

3)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo cálculo de c.
- 0,5 puntos polo cálculo de a e b.
- 0,25 puntos pola asíntota horizontal.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,25 puntos pola xustificación de que se pode aplicar o teorema do valor medio do cálculo diferencial á función dada e no intervalo dado.
- 0,25 puntos pola obtención do punto ao que fai referencia o teorema.

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,25 puntos pola representación da parábola.
- 0,5 puntos pola recta normal no punto pedido.
- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. a) 0,5 puntos

b) 1 punto

c) 1,5 puntos

2. a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa da recta e o plano
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.

b) 1,5 puntos, distribuidos en:

- 0,5 puntos pola determinación do ángulo que forman a recta e o plano.
- 1 punto polo plano que contén á recta e é perpendicular ao plano dado.

3. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola expresión da función a minimizar
- 0,5 puntos pola determinación do punto crítico e xustificar que é mínimo.

4. a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención de $f'(x)$
- 0,5 puntos polal obtención de $f(x)$

b) 1 punto

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

1. **a) 2 puntos,** distribuidos en:

   - 1 punto pola determinación dos rangos segundo os valores de m.
   - 1 punto pola discusión do sistema.

   b) 1 punto.

2. **a) 1,5 puntos**, distribuidos en:

   - 1 punto pola posición relativa das rectas.
   - 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

   b) 0,75 puntos

   c) 0,75 puntos

3. **a) 1 punto**

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
   - 0,5 puntos pola determinación do punto

4. **a) 1 punto**

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
   - 0,5 puntos pola aplicación do teorema fundamental do cálculo integral.

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(A) \;\geq\; 2$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + \boldsymbol{3m} + 2 - 3m - 2m^2 - 3 = m^2 - 1;$$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } m = 1 \; ou \; m = -1, \text{ entón } rang(A) = 2 \\ \text{Se } m \neq \pm 1 \text{ , entón } rang(A) = 3 \end{array}}$$

b) $A = A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+4 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Como $m^2 + 4 \neq 1, \forall m$
Podemos afirmar:

$$\boxed{A^2 \neq I, \forall m}$$

c) Por ser unha matriz simétrica de orde 2: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Facendo o produto das matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a + b = 3 \\ b + c = 5 \end{cases}$$

E a condición sobre o determinante:

$$-9 = \det(3X) = 9\det(X) \;\Rightarrow\; \det(X) = -1 \;\Rightarrow\; ac - b^2 = -1$$

Temos así un sistema de tres ecuacións con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ b + c = 5 \\ ac - b^2 = -1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b = 3 - a \\ c = 5 - b = 2 + a \\ a(2+a) - (3-a)^2 = -1 \end{cases} \;\Rightarrow\; a = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Polo tanto:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Vector normal ao plano π: $\vec{n}_\pi = (3,2,1)$

Recta perpendicular a π pasando por $P(-2,0,2)$:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Calculamos o punto de intersección de r con π:

$$3(-2+3\lambda) + 4\lambda + 2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2 \quad \Rightarrow M = (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{5}{2})$$

Para obter as coordenadas do punto $P'(x,y,z)$, simétrico de $P(-2,0,2)$, basta ter en conta que M é o punto medio do segmento que une P con P'. Polo tanto:

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{1}{2} = \frac{x-2}{2} \\ 1 = \frac{y+0}{2} \\ \frac{5}{2} = \frac{z+2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P'(1,2,3)}$$

b) Determinamos un punto e un vector director de cada unha das dúas rectas:

$P_r = P(-2,0,2) \in r$; $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (3,2,1)$

$$P_s = (0,30,-10) \in s; \quad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

E como

$$rang\left(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right) = rang\begin{pmatrix} 2 & 30 & -12 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

4+36+30+24+2-90 ≠ 0

Polo tanto:

$$\boxed{\text{As rectas } r \text{ e } s \text{ crúzanse}}$$

Sexa α o plano que contén a r e é paralelo a s. Entón, o punto $P_r = P(-2,0,2) \in r$ é un punto de α e $\vec{v}_r = (3,2,1)$, $\vec{v}_s = (1,-1,1)$ son dous vectores paralelos a dito plano. Polo tanto:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+2 & y & z-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x+2) + 2y + 5(z-2) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: 3x - 2y - 5z + 16 = 0}$$

Nota: Non se pedía ningún tipo de ecuación do plano, polo que tamén valía a vectorial ou paramétricas.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Una función $f(x)$ dise continua nun punto x_0 se:

1) Existe e é finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$
2) Existe $f(x_0)$
3) O valor da función no punto coincide co límite anterior: $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

Discontinuidade en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = -\infty \end{array}\right\}$$

Discontinuidade de salto infinito

Discontinuidade en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = 2 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = 2 \end{array}\right\}$$

Discontinuidade evitable.
Evítase definindo $f(2) = 2$

b)
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1 \\ f'(x) = 6x^2 - 12x \\ f''(x) = 12x - 12 \\ f''(x) = 0 \iff x = 1 \\ f'''(x) = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
No punto (1,-3), $f(x)$ ten un punto de inflexión.

$f'(1) = 6$ = pendente da recta tanxente á grafica de $f(x)$ no punto (1,-3). Polo tanto, a ecuación da recta tanxente no punto (1,-3) é:

$y + 3 = -6(x - 1)$

É dicir: $\boxed{y = -6x + 3}$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{3/2} = \boxed{\frac{4}{3}}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Substitución: $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

b) $\int \frac{\boldsymbol{e^x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \int \frac{dt}{t^2+3t+2}$

Calculamos as raíces do denominador e facemos a descomposición en fraccións simples:

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t+A+2B}{(t+2)(t+1)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ \\ A + 2B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -1;\ B = 1$$

Entón:

$$\int \frac{dt}{t^2+3t+2} = -\int \frac{dt}{t+2} + \int \frac{dt}{t+1} = ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$$

Tendo en conta que $e^x = t$ e aplicando Barrow:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \left[ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(e+2) - ln2 + ln3 = \ln(3e+3) - \ln(2e+4)$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = ln\left(\frac{3e+3}{2e+4}\right)}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ m & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & m+9 \\ m & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C) \;\geq\; 2$$

$$|C| = 45 + 2m + 3 + 18 - 3 + 5m = 63 + 7m$$

Polo tanto

Se $m = -9$, entón $rang(C) = 2$
Se $m \neq -9$, entón $rang(C) = 3$

Calculamos o rango de C^* para $m = -9$ (nos demais casos, o rango é 3 pois sempre $rang(C^*) \geq rang(C) = 3$ e C^* ten 3 filas). Pero para $m = -9$, todos os elementos da cuarta columna de C^* son 0, polo que podemos prescindir dela a efectos do rango e así, neste caso, temos que $rang(C^*) = rang(C) = 2$

Entón
$m = -9 \Rightarrow rang(C^*) = 2$
$m \neq -9 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

Discusión:

$m = -9 \;\Rightarrow\; rang(C) = 2 = rang(C^*) < número\ de\ incógnitas.$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.
$m \neq -9 \;\Rightarrow\; rang(C) = 3 = rang(C^*) = número\ de\ incógnitas.$ Sistema compatible determinado. Solución única

b) $\boxed{m = -9}$
Tendo en conta o apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. O sistema é equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} -y - 2z = -3x \\ 3y - z = 9x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3y - 6z = -9x \\ 3y - z = 9x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y = 3x \end{array}\right.$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) O produto vectorial de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é outro vector que se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$ e que se obtén do seguinte modo:

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son non nulos e non proporcionais, entón $\vec{u} \times \vec{v}$ e o vector de
   i. Módulo: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\widehat{u,v})$
   ii. Dirección: perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$
   iii. Sentido: cara arriba se $(\widehat{u,v}) < 180^0$ e cara abaixo se $(\widehat{u,v}) > 180^0$ (tomando o ángulo en sentido positivo, é dicir, contrario ao movemento das agullas do reloxo).
2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son linearmente dependentes, é dicir, se algún deles é $\vec{0}$ ou se teñen a mesma dirección, entón $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Os vectores pedidos serán:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}; \quad \vec{w}_2 = -\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

Como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,2,0); \qquad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

Entón:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{w}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ \vec{w}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \end{array}}$$

b) A recta e o plano serán paralelos se o vector director da recta é perpendicular ao vector normal ao plano:

$$r \parallel \pi \iff \vec{v}_r = (2,6,-4) \perp \vec{n}_\pi = (5,a,4)$$

Polo tanto:

$r \parallel \pi \iff 10 + 6a - 16 = 0$

Así: $\boxed{r \parallel \pi \iff a = 1}$

Como, para $a = 1$, a recta e o plano son paralelos, a distancia da recta ao plano é a distancia dun punto da recta ao plano:

$$P_r(0,2,2); \quad \vec{n}_\pi = (5,1,4)$$

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|0+2+8-5|}{\sqrt{25+1+16}} = \frac{5}{\sqrt{42}}$$

Polo tanto:

$$\boxed{d(r,\pi) = \frac{5\sqrt{42}}{42}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) $x = {}^{1}/_{2}$ asíntota vertical $\Rightarrow$ $\boxed{c = 2}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(2x-1) - 2(ax+b)}{(2x-1)^2} = \frac{\cancel{2ax} - a - \cancel{2ax} - 2b}{(2x-1)^2} = \frac{-a-2b}{(2x-1)^2}$$

Como a recta $y = 5x - 6$ é tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -5 \\ f'(1) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} a + b = -1 \\ -a - 2b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{a = 3} \\ \boxed{b = -4} \end{array}\right.$$

Para estes valores de a, b e c, $f(x)$ ten unha asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-4}{2x-1} = {}^{3}/_{2} \Rightarrow \boxed{\text{Asíntota horizontal: } y = {}^{3}/_{2}}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo $[a, b]$ e derivable en (a, b) entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

A función dada é unha función racional e o denominador non se anula no intervalo $[0,1]$. Polo tanto, é continua en $[0,1]$ e derivable en $(0,1)$ e podemos aplicar o teorema do valor medio do cálculo diferencial:

$$f(0) = \frac{1}{2}, \ f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(2c-1)^2} = \frac{1 - 1/2}{1-0} \Rightarrow c^2 - 4c + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - \sqrt{2} \in (0,1) \\ c_2 = 2 + \sqrt{2} \notin (0,1) \end{cases}$$

Polo tanto, o punto que cumple a igualdade do teorema é:

$$\boxed{c = 2 - \sqrt{2}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

$f(x) = -x^2 \;\Rightarrow\; f(1) = -1$

$f'(x) = -2x \;\Rightarrow\; f'(1) = -2 =$ pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(1,-1)$

Entón, $m = {}^{1}/_{2}$ = pendente da recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto $(1,-1)$

Ecuación da recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto $(1,-1)$:

$y + 1 = \frac{1}{2}(x-1) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

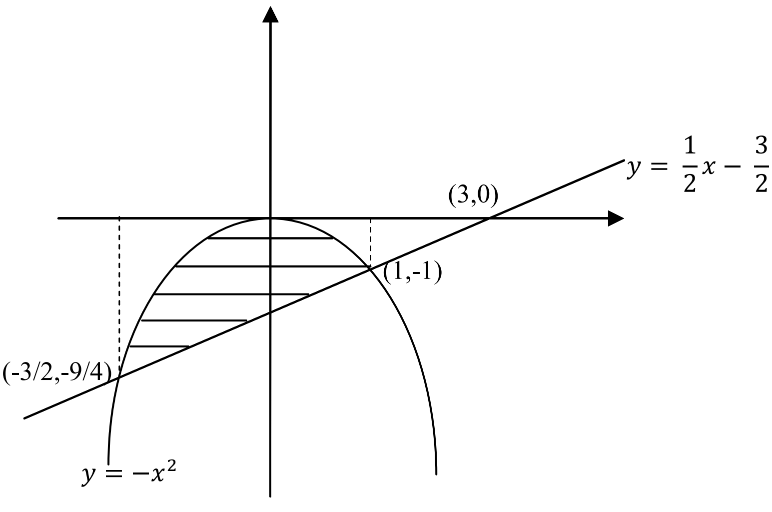
$f''(x) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ é cóncava

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ ten un máximo en $(0,0) \;\Rightarrow\; (0,0)$ é o vértice da parábola

Puntos de corte cos eixes: $\begin{cases} \text{parábola: } (0,0) \\ \text{recta normal: } (3,0), (0,-3/2) \end{cases}$

Puntos de corte da parábola e a recta normal:

$-x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; 2x^2 + x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x_1 = -3/2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; (-3/2, -9/4);\; (1,-1)$



$A = \int_{-3/2}^{1}\left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{-3/2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{16} - \frac{9}{4}\right) =$
$\frac{-4-3+18}{12} - \frac{18-9-36}{16} = \frac{11}{12} + \frac{27}{16} = \frac{125}{48}$

$$\boxed{Área = \frac{125}{48}\ u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) Dada unha matriz cadrada de orde n, chámase menor complementario do elemento a_{ij}, ao valor do determinante da matriz de orde n-1 que resulta de suprimir a fila i e a columna j. Represéntase por α_{ij}.
Chámase adxunto do elemento a_{ij} a: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, é dicir é o menor complementario co seu signo ou con signo cambiado, segundo que $i+j$ sexa par ou impar.

b) $A + \lambda I$ non ten inversa $\Leftrightarrow |A + \lambda I| = 0$

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^3 - 4(1+\lambda) = (1+\lambda)[(1+\lambda)^2 - 4] =$$
$$= (1+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = (1+\lambda)(\lambda-1)(\lambda+3)$$

Polo tanto

$$\boxed{A + \lambda I \; non\ ten\ inversa \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = \;\;\,1 \end{cases}}$$

por b), $\exists(A-2I)^{-1}$

c) $AX - A = 2X \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{A}-2\mathrm{I})\mathrm{X} = \mathrm{A} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{X} = (\mathrm{A}-2\mathrm{I})^{-1}\cdot \mathrm{A}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad |A - 2I| = -1 + 4 = 3$$

$$(\mathrm{A}-2\mathrm{I})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director da recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1)$$

Determinamos un vector normal ao plano:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6,-6,0)$$

Entón:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 6 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r\ e\ \pi\ córtanse\ nun\ punto}$$

O vector $(1,1,0)$ ten a dirección de $\vec{n}_\pi$ e o punto $P(2,1,4) \in \pi$. Así, a ecuación implícita do plano π é:

$$x - 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow \pi: x + y - 3 = 0$$

Para calcular o punto de corte, resolvemos o sistema formado polas ecuacións da recta e a do plano:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Punto\ de\ corte: (0,3,4)}$$

b) Se α = ángulo que forman π e r, entón:

$$sen\alpha = \cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{6}{\sqrt{2}\,\sqrt{72}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

Chamemos β ao plano que contén a r e é perpendicular a π. Os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{n}_\pi$ son polo tanto vectores contidos no plano β

Como β contén a r, os puntos da recta son puntos de β. Por exemplo,

$$(4,3,0) \in r \Rightarrow (4,3,0) \in \beta$$

Como non se especifica ningún tipo de ecuación do plano, podemos dar calquera, por exemplo as paramétricas:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 4 - \lambda + \mu \\ y = 3 + \qquad \mu \\ z = \qquad \lambda \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-2x} - 2x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 2e^{-2x} - 2}{2\operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 4e^{-2x}}{2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

b)

Lonxitudes das partes: x; $2x$; $70 - 3x$

Función a minimizar:

$$f(x) = \frac{1}{16}\left[x^2 + 4x^2 + (70 - 3x)^2\right] = \frac{1}{16}\left(14x^2 - 420x + 4900\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16}(28x - 420)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \iff x = \frac{420}{28} = 15 \\ f''(x) = \frac{28}{16} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (15, f(15)) \text{ mínimo}$$

$$\boxed{\text{Lonxitudes das partes}: 15cm; 30cm; 25cm}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$f'(x)$ é unha primitiva de $f''(x)$, así que calculamos a integral indefinida de $f''(x)$:

$\int (4e^{2x} - 2x)dx = 2e^{2x} - x^2 + C$

Para determinar a constante C usamos que $f'(0)$ = pendente da recta $x - y + 3 = 0$. Polo tanto

$1 = f'(0) = 2 + C \Rightarrow C = -1$

Entón, $f'(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$

Calculamos a integral indefinida de $f'(x)$, posto que $f(x)$ é unha primitiva de $f'(x)$

$\int (2e^{2x} - x^2 - 1)dx = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x + K$

E para determinar a constante K, usamos que $f(x)$ pasa polo punto $(0,1)$

$1 = f(0) = 1 + K \Rightarrow K = 0$

Así:

$$\boxed{f(x) = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x}$$

b)

$\int x sen(2x+\pi)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \int \frac{1}{2}\cos(2x+\pi)\, dx = -\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \frac{1}{4}sen(2x+\pi) + C$

$$\left\{\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen(2x+\pi)dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(2x+\pi)}{2} \end{array}\right\}$$

$\int_0^{\pi/2} x sen(2x+\pi)dx = \left[-\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \frac{1}{4}sen(2x+\pi)\right]_0^{\pi/2} = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 & m \\ 0 & m-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$

$|C| = m - (m-1)^2 - 1 = -m^2 + 3m - 2;\ |C| = 0 \Leftrightarrow m = 1\ ou\ m = 2$

Polo tanto:

Se $m = 1\ ou\ m = 2$, entón $rang(C) = 2$
Se $m \notin \{1,2\}$, entón $rang(C) = 3$

Calculamos o rango da matriz ampliada C^*:

Se $m \notin \{1,2\}$, entón $rang(C^*) = 3$ (sempre $rang(C^*) > rang(C)$)

<u>$m = 1$:</u>

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

<u>$m = 2$:</u>

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

<u>Discusión:</u>

$m = 1\ ou\ m = 2 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(C^*).\ Sistema\ incompatible.$
$m \notin \{1,2\} \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(C^*) = nº\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado.$

b)

Para $m = 3$, estamos no caso dun sistema compatible determinado e polo tanto ten solución única. Calculamos a solución utilizando a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2};\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{2};\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = 3$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{2} \\ y &= -\tfrac{3}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director e un punto de cada unha das rectas:

$P_r(4,1,0)$; $\quad \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-3,5,1)$

Coordenadas non proporcionais. Polo tanto, as rectas córtanse ou crúzanse

$P_s(1,2,5)$; $\quad \vec{v}_s = (1,-2,0)$

Para saber se se cortan ou se cruzan, estudiamos o $rang(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s})$, polo anterior xa sabemos que $rang(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 1 - 6 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad rang\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right) = 2$$

$$\boxed{As\ rectas\ córtanse}$$

Para calcular o punto de corte, sustituimos a x, y e z das ecuacións de s nas ecuacións de r:

$$1 + \lambda + 2 - 2\lambda - 10 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -12$$
$$2 - 2\lambda - 25 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -12$$

E substituíndo nas ecuacións de s, obtemos as coordenadas do punto de corte

$$\boxed{Punto\ de\ corte: (-11,26,5)}$$

b) Como o plano contén ás rectas, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ son dous vectores contidos no plano e polo tanto, $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ é un vector normal ao plano. Ademais, calquera punto das rectas tamén pertence ao plano, por exemplo $P_r(4,1,0)$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2,1,1)$$

Ecuación implícita:

$$2(x-4) + (y-1) + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + y + z - 9 = 0}$$

c)

$$d(Q,s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_sQ} \times \vec{v}_s\right|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{5}}$$

$$\overrightarrow{P_sQ} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-1,1)$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) $lim_{x\to 1^-} f(x) = m$

$lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b + 1 = f(1)$

$\Rightarrow \quad m = a + b + 1$ ← Para que $f(x)$ sexa continua en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} m & se \;\; x < 1 \\ 2ax + b & se \;\; x > 1 \end{cases}$$

Entón, debe cumprirse:

$\left.\begin{array}{l} m = \;\; a + b + 1 \\ m = 2a + b \end{array}\right\}$ ← Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$

$6a + b = 0$ ← $(f'(3) = \; 6a + b, f'(3) = 0,$ por ter un extremo relativo en $x = 3$.)

Resolvendo este sistema obtense:

$$\boxed{m = -4; \;\; a = 1; \;\; b = \; -6}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é continua no intervalo $[a, b]$ e derivable en (a, b), entón existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - \; f(a)}{b - \; a}$$

é dicir, a tanxente á gráfica de $f(x)$, no punto $x = c$, é paralela ao segmento que une os puntos $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Para os valores dados, a función é derivable en $\mathbb{R}$ (en $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$ é polinómica e para eses valores xa vimos que era derivable en $x = 1$) e ademais

$$f(x) = \begin{cases} -4x & se \;\; x < 1 \\ x^2 - \; 6x + 1 & se \;\; x \geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -4 & se \;\; x < 1 \\ 2x - 6 & se \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

Temos que encontrar un $c \in (0,5)$ tal que $f'(c)$ coincida coa pendente do segmento que une os puntos $(0,0), (5, -4)$, é dicir:

$$f'(c) = \frac{-4-0}{5-0} = -\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad 2c - \; 6 \; = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2c = \frac{26}{5}$$

$$\boxed{c = \; {}^{13}/_{5}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$$e^x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\int \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t}dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{2}{3}ln|t| - \frac{2}{3}ln|1+t| + C =$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t+A}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}[x - \ln(1+e^x)] + C$$

$$e^x = t \Rightarrow x = lnt$$

e aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}[x - \ln(1+e^x)]_0^1 = \frac{2}{3}[1 - \ln(1+e) + ln2]$$

$$\boxed{Solución\colon \frac{2}{3}ln\frac{2e}{1+e}}$$

b) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Indeterminación $\frac{0}{0}$ aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3+3e^x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$