CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU

XUÑO 2013

Código: 26

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sexan B^t a matriz trasposta de B e I a matriz identidade de orde 3.

a) Estuda, segundo os valores do parámetro λ, o rango de $AB^t + \lambda I$.

b) Calcula a matriz X que verifica: $AB^tX - X = 2B$.

2. Dados o plano $\pi: x + y - z - 1 = 0$ e a recta $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y \quad - \ 2 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de r e π. Calcula a distancia de r a π.

b) Calcula a ecuación xeral ou implícita do plano que contén a r e é perpendicular a π.

3. a) Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Ten a ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ algunha solución no intervalo $(0,1)$? ¿Ten esta ecuación máis dunha solución real?

b) Calcula os valores de a e b para que $\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$

4. a) Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento e os intervalos de concavidade e convexidade da función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e a bisectriz do primeiro cadrante. (Nota: para o debuxo da gráfica de $f(x)$, é suficiente utilizar o apartado anterior e calcular os puntos de corte cos eixes).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

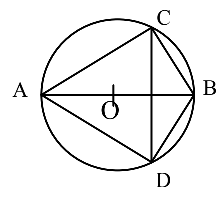
$$\begin{aligned} x + my + z &= 2 \\ mx - y + z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 1$.

2. a) Calcula as ecuacións paramétricas da recta r que pasa pola orixe de coordenadas e é perpendicular ao plano π determinado polos puntos $A(1,0,2)$, $B(2,1,3)$ e $C(3,0,0)$.

b) Calcula os posibles valores de a para que o punto $P(a, a, a)$ equidiste da recta r e do plano π do apartado anterior.

3. Nunha circunferencia de centro O e radio 10 cm. trázase un diámetro AB e unha corda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A que distancia do centro O da circunferencia debe estar a corda CD, para que a diferencia entre as áreas dos triángulos ADC e BCD sexa máxima?



4. a) Enuncia o teorema de Rolle. Determina o valor de a para que sexa aplicable o teorema de Rolle á función $f(x) = x^3 + ax - 1$, no intervalo $[0,1]$. Para este valor de a, calcula un punto $c \in (0,1)$ no que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ sexa paralela ao eixe OX.

b) Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2-x}dx$

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2puntos, exercicio 4= 2puntos)

OPCIÓN A

1. a) Sexa M unha matriz cadrada de orde 2 tal que $M^2 = 4M$. Determina a matriz X que verifica a ecuación matricial $(M - 2I)^2 X = I$, sendo I a matriz identidade de orde 2.

b) Determina todas as matrices B da forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2 = 4B$. Se algunha é inversible, calcula a súa inversa.

c) ¿Cando un sistema de ecuacións lineais se di homoxéneo?¿Pode ser incompatible un sistema de ecuacións lineais homoxéneo? Xustifica a resposta.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de r e s. Se se cortan, calcula o punto de corte. Se determinan un plano, calcula a ecuación xeral ou implícita dese plano.

b) Estuda a posición relativa de r e o plano $\pi: 4x - 4y + 2z + 7 = 0$. Calcula a distancia de r a π.

3. a) Calcula: $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x} + 1}{xe^x}$

b) Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo $[1,4]$ tal que $\int_1^2 f(x)dx = 2$ e $\int_1^4 f(x)dx = -4$, ¿cal é o valor de $\int_2^4 5f(x)dx$? Enuncia as propiedades da integral definida que utilices.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2 + 9x$, e as rectas $y = 20$; $x - y + 15 = 0$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Calcula, segundo os valores de m, o rango de A.

b) ¿Coincide A coa súa inversa para algún valor de m? Para $m = 0$, calcula A^{60}

c) Se $m = 2$ e A é a matriz de coeficientes dun sistema de tres ecuacións lineais con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que o sistema ten solución única? Xustifica a resposta

2. a) Dado o plano $\alpha: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda + \mu \\ y = -3\lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$ calcula as ecuacións en forma continua da recta r que pasa polo punto $P(2, -3, -4)$ e é perpendicular ao plano α. Calcula o punto de corte de r con α.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $P(2, -3, -3)$ e $Q(3, -2, -4)$ e é perpendicular ao plano α.

c) Calcula as ecuacións paramétricas da recta intersección do plano $\beta: 5x - 4y + z - 19 = 0$ co plano α

3. Calcula o dominio, as asíntotas, os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e mínimos de $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$

4. a) Define primitiva dunha función e enuncia a regra de Barrow.

b) Calcula $\int_2^3 \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención $AB^t + \lambda I$.
- 1 punto pola obtención do rango de $AB^t + \lambda I$, segundo os valores de λ.

b) 1,5 puntos

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa da recta e o plano.
- 1 punto pola distancia da recta ao plano.

b) 1 punto

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,25 puntos por xustificar que a ecuación ten unha solución no intervalo (0,1).
- 0,25 puntos por xustificar que a ecuación ten solución única no intervalo (0,1).

b) 1 punto, distribuído en:

- 0, 5 pola obtención de b.
- 0, 5 pola obtención de a.

4) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,5 puntos pola determinación dos intervalos de concavidade e convexidade

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,5 pola formulación do problema.
- 0,25 puntos polo cálculo da área

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

1. **a) 2 puntos**, distribuídos en:

   - 0,5 puntos pola obtención dos valores de m que anulan o determinante da matriz de coeficientes
   - 1,5 puntos pola discusión do sistema (0,5 puntos pola discusión no caso m=-1/2; 0,5 puntos pola discusión no caso m=1; 0,5 puntos pola discusión no caso m≠-1/2,1)

   b) 1 punto

2. **a) 1 punto**

   b) 2 puntos, distribuídos en:

   - 0,5 puntos pola distancia do punto ao plano
   - 1 punto pola distancia do punto á recta
   - 0,5 puntos pola obtención dos valores de a.

3. **2 puntos**, distribuídos en:

   - 0,5 puntos pola obter a expresión correspondente á diferencia das áreas en función de dúas variables
   - 0,5 puntos pola relación entre as dúas variables na función anterior e expresar a función a maximizar en función dunha variable.
   - 0,5 puntos pola obtención da derivada da función a maximizar
   - 0,5 puntos pola obtención do valor que maximiza a diferencia das áreas

4. **a) 1 punto,** distribuído en:

   - 0,5 polo enunciado do teorema de Rolle
   - 0,25 puntos pola determinación do valor de a.
   - 0,25 puntos pola determinación do valor de c.

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos pola división do numerador entre o denominador e o cálculo das raíces do denominador.
   - 0,5 puntos polas integrais que resultan.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. **a) 0,5 puntos**, pola obtención da matriz X

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención das matrices B que verifican a relación dada.
- 0,5 puntos polo cálculo da inversa

c) 1 punto, distribuido en:

- 0,5 puntos pola definición de sistema de ecuacións lineais homoxéneo
- 0,5 puntos por xustificar que todo sistema homoxéneo é compatible.

2. a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola posición relativa das rectas
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.
- 0,5 puntos pola ecuación implícita do plano.

b) 1,5 puntos, distribuidos en:

- 0,5 puntos pola posición relativa da recta e o plano.
- 1 punto polo cálculo da distancia da recta ao plano.

3. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuido en:

- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.
- 0,5 puntos polo enunciado das propiedades da integral definida.

4. **2 puntos**, distribuidos en:

- 0,5 puntos pola representación da parábola
- 1 punto pola formulación do problema
- 0,5 puntos polo cálculo da área

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

1. **a) 1 punto**

   b) 1 punto, distribuido en:

   - 0,5 puntos pola obtención do valor de m para o cal $A = A^{-1}$.
   - 0,5 puntos polo cálculo de A^{60}.

   c) 1 punto, pola xustificación da unicidade da solución.

2. **a) 1 punto**, distribuido en:

   - 0,5 puntos pola obtención das ecuacións, en forma continua, da recta r.
   - 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte da recta e o plano.

   b) 1 punto

   c) 1 punto

3. **2 puntos**, distribuidos en:

   - 0,25 puntos polo dominio.
   - 0,5 puntos polas asíntotas.
   - 1 punto polos intervalos de crecemento e decrecemento.
   - 0,25 puntos polos máximos e mínimos.

4. **a) 1 punto,** distribuido en:

   - 0,5 puntos pola definición de primitiva dunha función.
   - 0,5 puntos polo enunciado da regra de Barrow.

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos pola división do numerador entre o denominador e a descomposición en suma de fraccións simples.
   - 0,5 puntos polo cálcula das integrais que resultan.

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\det(AB^t + \lambda I) = \lambda(\lambda^2 - 1 + 1) = \lambda^3$

Polo tanto, $\det(AB^t + \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

Se $\lambda = 0$, entón

$$AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Filas proporcionais e

fila de ceros

Temos así que:

$$\boxed{rang(AB^t + \lambda I) = \begin{cases} 3 & se\ \lambda \neq 0 \\ 1 & se\ \lambda = 0 \end{cases}}$$

$\exists (AB^t - I)^{-1}$ pois para λ=-1, $rang(AB^t - I) = 3$

b) $AB^tX - X = 2B \Leftrightarrow (AB^t - I)X = 2B \Leftrightarrow X = 2(AB^t - I)^{-1}B$

Calculamos $(AB^t - I)^{-1}$:

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \det(AB^t - I) = -1$$

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{1}{\det(AB^t - I)}(Ad(AB^t - I)_{ij})^t = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$X = 2\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boxed{X = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Doutra forma:

$$AB^tX - X = 2B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 2 \\ a - 2b - c = 2 \\ -c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} a = -8 \\ b = 4 \\ c = -2 \end{array}} \end{cases}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Resolvemos o sistema de ecuacións lineais determinado polas ecuacións da recta e do plano

$$r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y \quad\; - \;\; 2 = 0 \end{cases}$$
$$\pi: x + y - z - 1 = 0$$

Discutimos o sistema formado polas tres ecuacións.

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

O rango de C é como mínimo 2 xa que os planos que determinan a recta son secantes; e dado que

$$|C| = -3 + 2 - 1 + 2 = 0$$

Podemos concluir que $rang(C) = 2$. Por outra parte

$$|C^*| = 3 + 12 + 2 - 6 - 6 - 2 = 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C^*) = 3$$

Polo tanto:
$rang(C) = 2 \neq 3 = rang(C^*)$. O sistema é incompatible e temos que

$$\boxed{r \; e \; \pi \; son \; paralelos}$$

Como a recta e o plano son paralelos, para calcular a distancia de r a π, calculamos a distancia dun punto arbitrario de r ao plano π:
se tomamos como punto de r: $P_r(1,0,3)$, entón

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|1-3-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}; \qquad \boxed{d(r,\pi) = \sqrt{3} \; unidades}$$

b) Calculamos o vector director da recta r:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,2,1)$$

Elementos que determinan o plano pedido: $\begin{cases} \text{Un punto do plano: } P_r(1,0,3) \\ \text{Dous vectores contidos no plano:} \\ \vec{v}_r = (-1,2,1) \text{ e } \vec{n}_\pi = 1,1,-1) \end{cases}$

entón, a ecuación xeral do plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x + z - 4 = 0}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Teorema de Bolzano: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir $f(a)\cdot f(b)<0$, entón existe polo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Consideremos a función real de variable real $f(x)=x^3+2x-2$

$f(x)$ é continua en $[0,1]$ xa que é continua en $\mathbb{R}$ por ser unha función polinómica.
$f(0)=-2<0$
$f(1)=1>0$

$\Rightarrow\quad \exists\, c\in(0,1)$ tal que $f(c)=0$

teorema de Bolzano

Polo tanto, $\boxed{a\ ecuación\ x^3+2x-2=0, ten\ unha\ solución\ real\ no\ intervalo\ \in(0,1).}$

Se $f(x)$ tivese dúas raíces reais c_1 e c_2 entón

$f(x)$ continua en $[c_1,c_2]$ e derivable en (c_1,c_2) por ser continua e derivable en $\mathbb{R}$
$f(c_1)=0=f(c_2)$

teorema de Rolle

$\Rightarrow\quad \exists\, d\in(c_1,c_2)$ tal que $f'(d)=0$
(a función derivada tería unha raíz real)

pero a función derivada, $f'(x)=3x^2+2$, non ten raíces reais. Polo tanto:

$$\boxed{x^3+2x-2=0, ten\ unha\ única\ solución\ real\ e\ esa\ solución\ está\ no\ intervalo\ (0,1).}$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b-2e^{2x}}{2xcos(x^2)}=\frac{b-2}{0}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Para que este límite sexa finito, ten que ser $\boxed{b=2}$.

Tomando $b=2$, resulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+2-2e^{2x}}{2xcos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2a-4e^{2x}}{2xcos(x^2)-4x^2sen(x^2)}=\frac{2a-4}{2}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Entón

$\frac{2a-4}{2}=1\ \Rightarrow \boxed{a=3}$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0; \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} \begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	Crecente	Decrecente	Crecente

Crecente nos intervalos $(-\infty, 2/3)$ e $(2, \infty)$
Decrecente no intervalo $(2/3, 2)$

$f''(x) = 6x - 8; \; f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4/3$

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	Cóncava	Convexa

Cóncava en $(-\infty, 4/3)$
Convexa en $(4/3, \infty)$

b) $x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0.$

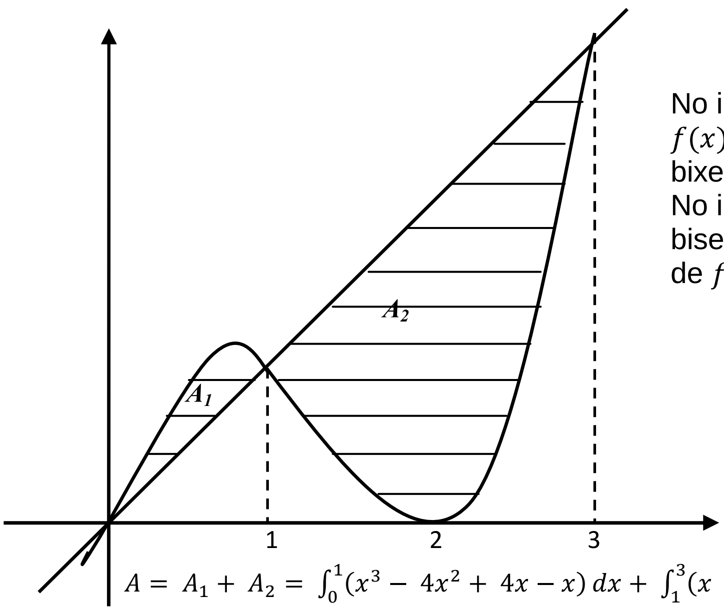
Os puntos de corte de $f(x)$ cos eixes son: $(0,0)$ e $(2,0)$

$x^3 - 4x^2 + 4x = x \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0$

$x = 0; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Os puntos de corte de $f(x)$ e a bisectriz $y = x$ son: (0,0); (1,1) e (3,3)

Con estes puntos de corte e os resultados do apartado a), podemos debuxar a rexión limitada polas gráficas de $f(x)$ e a bisectriz $y = x$



No intervalo (0,1), a gráfica de $f(x)$ está por riba da gráfica de bixectriz
No intervalo (1,3), a gráfica da bisectriz está por riba da gráfica de $f(x)$.

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 4x - x)\,dx + \int_1^3 (x - x^3 + 4x^2 - 4x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{37}{12}\,u^2}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ m & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C) \geq 2$$

$$|C| = -2 - m + 2m + 2 + 1 - 2m^2 = -2m^2 + m + 1$$

$$2m^2 - m - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

Polo tanto

Se $m = 1 \;ou\; m = -1/2$, entón $rang(C) = 2$
Se $m \neq 1 \;e\; m \neq -1/2$, entón $rang(C) = 3$

Calculamos o rango de C^* para $m = 1$ e para $m = -1/2$; (nos demais casos, o rango é 3, pois sempre $rang(C^*) \geq rang(C)$ e C^* ten 3 filas).

$\underline{m = 1}$ $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$\underline{m = -1/2}$ $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} -1/2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1/2 - 4 + 2 + 1 = -3/2 \neq 0;$

Entón
$m = 1 \Rightarrow rang(C^*) = 2$
$m \neq 1 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

<u>Discusión:</u>

$m = -1/2 \Rightarrow rang(C) = 2 \neq 3 = rang(C^*)$. Sistema incompatible. Non ten solución $m = 1 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(C^*) < número\ de\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións. $m \neq -1/2 \;e\; m \neq 1 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(C^*) < número\ de\ incógnitas$. Sistema compatible determinado. Solución única

b) $\boxed{m = 1}$
Tendo en conta o apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. O sistema é equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} -y + z &= -x \\ -y + 2z &= 1 - 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 1 - x;\; y = 1$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 1; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= 1 - \lambda \end{aligned}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ son linealmente independentes e están contidos no plano π. Polo tanto, o vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ten a dirección da recta r:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2,4,-2)$$

E podemos tomar como $\vec{v}_r = (1,-2,1)$. Tendo en conta que a recta pasa pola orixe de coordenadas, as súas ecuacións paramétricas serán:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}}$$

b) Tendo en conta que un punto da recta é $P_r(0,0,0)$, a distancia do punto $P(a,a,a)$ á recta r ven dada por:

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{v_r}\|}{\|\overrightarrow{v_r}\|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{6}} = \frac{\|(3a,0,-3a)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{18a^2}}{\sqrt{6}} = |a|\sqrt{3}$$

O plano π pasa polo punto $A(1,0,2)$ e os vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ son dous vectores contidos no plano, polo tanto a súa ecuación xeral é:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x - 2y + z - 3 = 0$$

e a distancia do punto $P(a,a,a)$ ao plano π é:

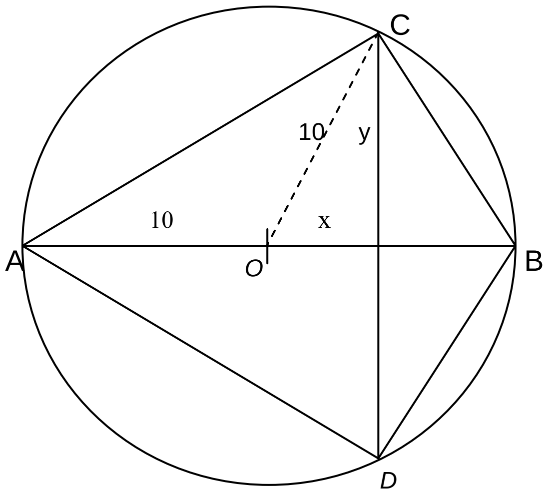
$$d(P,\pi) = \frac{|a-2a+a-3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Polo tanto,

$$d(P,r) = d(P,\pi) \Leftrightarrow |a|\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\pm a = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:



Triángulo ADC:
Base: $2y$
Altura: $10 + x$

$Área \;=\; y(10 + x)$

Triángulo BCD:
Base: $2y$
Altura: $10 - x$

$Área \;=\; y(10 - x)$

Diferencia de áreas:

$A_1 - A_2 \;= y(10 + x) - \; y(10 - x) = 2xy$

O teorema de Pitágoras proporciónanos unha relación entre x e y :

$y = \;\sqrt{10^2 - x^2}$

Polo tanto, a función a maximizar que nos proporciona a diferencia de áreas é:

$f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$

Calculamos os valores que anulan a primeira derivada

$f'(x) = 2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(100 - x^2) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow \; x = \pm 5\sqrt{2}$

Comprobamos que $x = 5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo:

$f''(x) = \; -\frac{2x}{\sqrt{100-x^2}} - \frac{4x\sqrt{100-x^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$; $\;\; f''(5\sqrt{2}\,) = \; -\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} - \frac{200+100}{50} = \; -8 < 0$

$\boxed{Solución: 5\sqrt{2}\; cm.}$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) e ademais $f(a)=f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

$f(x)=x^3+ax-1$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, xa que é unha función polinómica. Polo tanto, é continua en $[0,1]$ e derivable en $(0,1)$. Para aplicar Rolle neste intervalo, debemos impoñerlle a condición $f(0)=f(1)$

$f(0)=f(1) \quad \Rightarrow \boxed{a=-1}$

Un punto do intervalo $(0,1)$ no que a recta tanxente é paralela ao eixe OX, será un punto do intervalo no que se anule a primeira derivada (a existencia dese punto está garantida polo teorema de Rolle)

$f(x)=x^3-x-1$

$f'(x)=3x^2-1;$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, pero $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ non é un punto do intervalo $(0,1)$. Polo tanto:

$$\boxed{c=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$\frac{x^3+3}{x^2-x}=x+1+\frac{x+3}{x^2-x}$

Como $x^2-x=x(x-1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow A=-3; B=4$

Entón:

$$\int\frac{x^3+3}{x^2-x}dx=\int\left(x+1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+x-3ln|x|+4ln|x-1|+C$$

$$\boxed{Solución: \frac{1}{2}x^2+x-3ln|x|+4ln|x-1|+C}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $(M-2I)^2X = I \iff (M^2-4M+4I)X = I \Rightarrow 4X = I \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}}$

$M^2 = 4M$

b) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 2xy = 4y \\ x^2+y^2 = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow y(2x-4) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = 2$$

<u>Se $y = 0$:</u>

$x^2 = 4x \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

<u>Se $x = 2$:</u>

$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

Polo tanto, as matrices que cumpren as propiedades do exercicio son:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Destas matrices, a única que ten determinante distinto de cero, e polo tanto inversa, é a matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. A súa inversa é a matriz

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.}$$

c) Un sistema de ecuacións lineais dise <u>homoxéneo cando os termos independentes son todos cero.</u> Polo tanto, nun sistema lineal homoxéneo sempre o rango da matriz de coeficientes coincide co rango da matriz ampliada, xa que ao ser os termos independentes nulos a columna que se engade non inflúe a efectos do cálculo do rango. Polo tanto <u>un sistema de ecuacións lineais homoxéneo é sempre compatible.</u>

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos os vectores directores das dúas rectas:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_s = (1,2,2).\\[1em] \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,2)\end{array}\right\}$$

Como os vectores directoras das rectas non son paralelos, as rectas córtanse ou crúzanse.

Vemos que se cortan, calculando o punto de corte. Para iso, substituímos as expresións de x, y e z de s nas ecuacións de r:

$$\begin{aligned} 2 + t - 6 - 4t + 2 + 2t + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad t = -1 \\ 6 + 4t - 2 - 2t - 2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad t = -1 \end{aligned}$$

as dúas ecuacións son compatibles e polo tanto as dúas rectas teñen un punto común, que se obtén facendo $t = -1$ nas ecuacións de s:

$$\boxed{Punto\ de\ corte: (1,1,0)}$$

Como as rectas se cortan, determinan un plano α. Elementos que determinan o plano α:

- O punto $(1,1,0)$
- O vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$ que é un vector normal ao plano α

e a ecuación implícita do plano α será:

$$-2(x-1) + 2(y-1) - z = 0$$

é dicir

$$\boxed{\alpha : 2x - 2y + z = 0}$$

b) vector normal ao plano π: $\vec{n}_\pi = (4,-4,2)$. Entón

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r \Rightarrow r$ e π son paralelos

Un punto da recta r é o punto de corte calculado antes: $P_r(1,1,0)$. Polo tanto:

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|4-4+7|}{\sqrt{16+16+4}} = \frac{7}{6}$$

Doutro modo:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha : 2x - 2y + z = 0 \\ \pi : 4x - 4y + 2z + 7 = 0\end{array}\right\}$$

Os planos α e π son paralelos e como a recta r está contida no plano α, entón a recta r é paralela ao plano π: $2x - 2y + z + \frac{7}{2} = 0$

Polo tanto:

$$d(r,\pi) = d(\alpha,\pi) = \frac{|7/2|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{7}{6}$$

Así:

$$\boxed{d(r,\pi) = \frac{7}{6}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{xe^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{e^x + xe^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} 2e^x = \infty$$

Simplificamos

b)

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx \quad \text{(Propiedade 1)}$$

$$\int_2^4 5f(x)dx = 5\int_2^4 f(x)dx \quad \text{(Propiedade 2)}$$

Polo tanto

$$\int_2^4 5f(x)dx = 5\int_2^4 f(x)dx = 5\left[\int_1^4 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx\right] = 5(-4-2) = -30$$

Propiedade 2 Propiedade 1

Así:

$$\boxed{\int_2^4 5f(x)dx = -30}$$

Propiedade 1 (Aditividade respecto ao intervalo de integración): Se $a < b < c$ e $f(x)$ é continua en $[a, c]$ entón

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Propiedade 2: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ entón

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \text{para calquera } c \in \mathbb{R}.$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

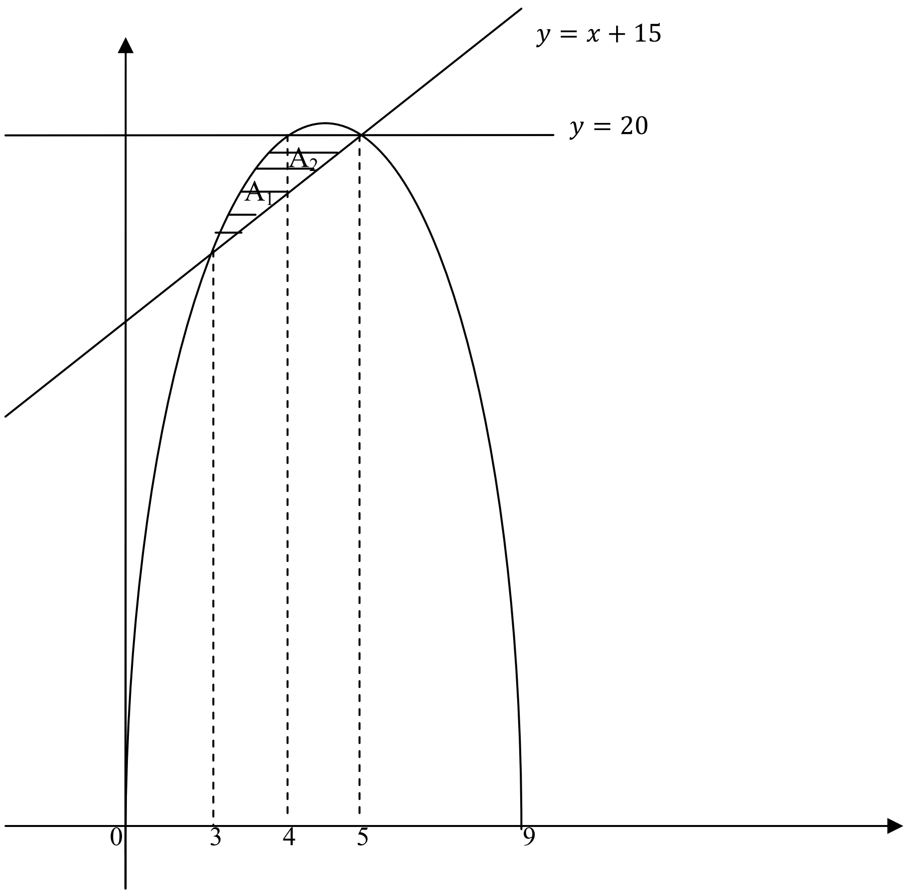
Exercicio 4:

Parábola: $y = -x^2 + 9x = x(-x+9) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{Puntos de corte cos eixes: (0,0), (9,0)} \\ \text{Vértice: } \left(9/2,\ 81/4\right) \\ \text{Cóncava (o coeficiente de } x^2 \text{ é negativo)} \end{cases}$

Puntos de corte da parábola coas rectas:

$-x^2 + 9x = 20 \;\Rightarrow\; x^2 - 9x + 20 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 4 \\ ou \\ x = 5 \end{cases}$ Puntos de corte: (4,20), (5,20)

$-x^2 + 9x = x + 15 \;\Rightarrow\; x^2 - 8x + 15 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 3 \\ ou \\ x = 5 \end{cases}$ Puntos de corte: (3,18), (5,20)



$$A = A_1 + A_2 = \int_3^4 (-x^2 + 9x - x - 15)dx + \int_4^5 (20 - x - 15)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 15x\right]_3^4 + \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_4^5 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 64 - 60 + 9 - 36 - 45 + 25 - \frac{25}{2} - 20 + 8 = \frac{7}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{7}{6}\, u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\Rightarrow rang(A) \;\geq 2$

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = -m^2 + 1 \,; \qquad -m^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; m = \pm 1$$

Polo tanto

- $m = \pm 1 \;\Rightarrow\; rang(A) = 2$
- $m \neq \pm 1 \;\Rightarrow rang(A) = 3$

b) $A = A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+1 & 0 & 2m \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & m^2+1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto

$$\boxed{A = A^{-1} \;\Leftrightarrow m = 0}$$

Se $m = 0$, acabamos de obter que $A^2 = I$, entón

$$\boxed{A^{60} = (A^2)^{30} = I^{30} = I}$$

c) Vimos no apartado a) que se $m = 2$, entón $rang(A) = 3$

Como o rango da matriz ampliada é maior ou igual que o rango da matriz de coeficientes e tampouco pode ser maior que 3, pois ten 3 filas, estamos nun caso de

Rang(matriz de coeficientes) = rang(matriz ampliada) = número de incógnitas

Polo tanto, é un sistema compatible determinado con solución única.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Como a recta é perpendicular ao plano, entón o vector director da recta é perpendicular ao plano:

$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,4,6)$. Tomamos como vector director: (1,2,3)

Entón as ecuacións da recta en forma continua son:

$$\boxed{r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3}}$$

Para calcular o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta

$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$ $\Rightarrow$ Punto xenérico $Q(2+\lambda, -3+2\lambda, -4+3\lambda)$

Calculamos a ecuación xeral do plano ($\vec{n}_\alpha = (1,2,3)$ e un punto do plano é (3,0,3))

$\alpha: x - 3 + 2y + 3(z-3) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha: x + 2y + 3z - 12 = 0$

Impoñemos a condición de que $Q \in \pi$

$2 + \lambda - 6 + 4\lambda - 12 + 9\lambda - 12 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda = 2$

Polo tanto, o punto de corte será:

$$\boxed{P(4,1,2)}$$

b) Os vectores $\overrightarrow{PQ} = (1,1,-1)$ e $\vec{n}_\alpha = (1,2,3)$ son dous vectores contidos no plano β pedido. Polo tanto,

$\vec{n}_\beta = \overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (5,-4,1)$ é un vector perpendicular ao plano β

e a ecuación xeral do plano β será:

$5(x-2) - 4(y+3) + z + 3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \boxed{\beta: 5x - 4y + z - 19 = 0}$

c) Basta resolver o sistema de ecuacións lineais dadas polas ecuacións xerais de α e β

$x + 2y + 3z - 12 = 0$

$5x - 4y + z - 19 = 0$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, o sistema anterior é equivalente ao seguinte:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 12 - 3z \\ 5x - 4y = 19 - z \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 12-3z & 2 \\ 19-z & -4 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{43}{7} - z; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12-3z \\ 5 & 19-z \end{vmatrix}}{-14} = \frac{41}{14} - z;$$

e as ecuacións paramétricas da recta intersección son:

$$\boxed{s: \begin{cases} x = \dfrac{43}{7} - \lambda \\ y = \dfrac{41}{14} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

$f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$

O denominador non se anula nunca, polo tanto

$$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}} \text{ e } \boxed{Non\ existen\ asíntotas\ verticais}$$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = 0$

Indeterminación. Aplicamos L'Hôpital

Polo tanto

$$\boxed{Asíntota\ horizontal: y = 0. Non\ ten\ asíntota\ oblicua}$$

Estudo da derivada:

$f'(x) = \frac{2e^{x^2} - (2x+1)2xe^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{e^{x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$

Como $e^{x^2} > 0$, o signo de $f'(x)$ determínao o numerador. Temos polo tanto que

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$	Decrecente	Crecente	Decrecente

Crecente en: $(-1, 1/2)$

Decrecente en: $(-\infty, -1)$ e $(1/2, \infty)$

En $x = -1$, a función pasa de decrecente a crecente e en $x = 1/2$ pasa de crecente a decrecente. Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} Mínimo: (-1, -1/e) \\ Máximo: (1/2, 2/e^{\frac{1}{4}}) \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a) Unha función $F(x)$ dise que é unha *primitiva* de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$\frac{x^3+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1}$

Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x-A+B}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A+B=1 \\ -A+B=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = -{}^1\!/_2 ; B = {}^3\!/_2$

Entón:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \int \left(x + \frac{x+2}{x^2-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1| + C$$

e aplicando a regra de Barrow:

$\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1|\right]_2^3 = \frac{9}{4} - ln2 + \frac{3}{2}ln2 - (2 - \frac{1}{2}ln3) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{2}ln3$

$$\boxed{Solución: \frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln6}$$