

MATEMÁTICAS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1=3 puntos, exercicio 2=3 puntos, exercicio 3=2 puntos, exercicio 4=2 puntos)

OPCIÓN A

- Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - Estuda, segundo os valores de m , o rango da matriz A .
 - Resolve, se é posible, o sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para o valor $m = 1$.
- Dados os puntos $A(3,0,2)$, $B(1,-2,0)$, $C(1,-1,3)$ e $D(\lambda, \lambda-2, -\lambda)$
 - Determina o valor de λ para que A, B, C e D sexan coplanares. ¿Para algún valor de λ son A, B, C e D vértices dun paralelogramo?
 - Calcula as ecuacións paramétricas do plano π que pasa polo punto C e é perpendicular á recta r que pasa polos puntos A e B .
- Enuncia o teorema de Bolzano. Probar que a función $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta o eixe OX nalgún punto do intervalo $[1,2]$ ¿Pode cortalo en máis dun punto?
 - Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right)^{1/x^2}$
- Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = 3x - x^2$ e a súa recta normal no punto $(3,0)$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

- Dado o sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 5 \\ x - 3y + 2z &= -4 \end{aligned}$$
 - Calcula o valor de α para que ao engadirle a ecuación $\alpha x + 3y + z = 9$, resulte un sistema compatible indeterminado. Resólveo, se é posible, para $\alpha = 0$.
 - ¿Existe algún valor de α para o cal o sistema con estas 3 ecuacións non ten solución?
- Se $|\vec{v}| = 6$, $|\vec{w}| = 10$ e $|\vec{v} + \vec{w}| = 14$, calcula o ángulo que forman os vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
 - Calcula as ecuacións paramétricas e a ecuación xeral do plano que pasa polos puntos $A(-1,5,0)$ e $B(0,1,1)$ e é paralelo á recta

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$
- Determina os valores de a para que a función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$
 sexa continua. ¿É derivable en $x = 1$ para algún valor de a ?
 - Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- Calcula $\int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} dx$

MATEMÁTICAS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Calcula, segundo os valores de a , o rango de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$

Para $a = 1$, calcula o determinante da matriz $2A^t \cdot A^{-1}$

- b) Sexa $B = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpra que $B^{-1} = B^t$.

(Nota: A^t , B^t representan a matriz trasposta de A e B respectivamente).

2. Dado o plano $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

- Calcula a área do triángulo de vértices os puntos de corte de π cos eixes de coordenadas.
- Calcula a ecuación xeral do plano que é perpendicular ao plano π , paralelo á recta que pasa polos puntos $B(0,3,0)$ e $C(0,0,2)$ e pasa pola orixe de coordenadas.
- Calcula o punto simétrico da orixe de coordenadas respecto ao plano $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

3. a) Calcula as asíntotas e os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

- b) Calcula $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx$

4. a) Dunha función derivable $f(x)$ sabemos que pasa polo punto $(0,1)$ e que a súa derivada é $f'(x) = xe^{2x}$. Calcula $f(x)$ e a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 0$
- b) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m , o sistema

$$\begin{aligned} x + y &= m \\ x - my &= -13 \\ 3x + 5y &= 16 \end{aligned}$$

- b) Resólveo, se é posible, para $m = 2$.

2. a) Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2: \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

Se se cortan nunha recta, escribe as ecuacións paramétricas da mesma.

- b) Calcula a ecuación do plano π_3 , que pasa pola orixe de coordenadas e é perpendicular a π_1 e π_2 . Calcula a intersección de π_1 , π_2 e π_3 .

3. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

- b) Se $c > 2$, calcula os valores de a, b, c para que a función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{se } x < 2 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[0, c]$.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, a recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención dos valores de m que anulan o determinante de A
- 1,5 puntos pola obtención do rango de A , segundo os valores de m .

b) 1 punto

2) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención do valor de λ para que sexan coplanarios.
- 1 punto xustificar que non constitúen un paralelogramo.

b) 1 punto

3) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,25 puntos por xustificar que a función corta o eixe OX nalgún punto do intervalo $[1,2]$.
- 0,25 puntos por xustificar que a función non corta o eixe OX en máis de un punto.

b) 1 punto

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos por representar a parábola.
- 0,5 puntos pola obtención da recta normal.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto por xustificar que o sistema é compatible indeterminado cando $\alpha = 0$.
- 1 punto pola resolución para $\alpha = 0$.

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola ecuación xeral do plano
- 1 punto polas ecuacións paramétricas do plano

3) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola determinación dos valores de a para que a función sexa continua.
- 0,5 puntos polo estudo da derivabilidade en $x = 1$.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 pola división do numerador entre o denominador e o cálculo das raíces do denominador.
- 0,5 puntos pola descomposición en suma de fraccións.
- 0,5 puntos pola integración.
- 0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do valor da integral

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 2 puntos

b) 1 punto

2) 3 puntos (1 punto por cada unha das cuestión formuladas)

3) a) 1 punto

b) 1 punto

4) 2 puntos (0,5 puntos pola formulación teórica e 1,5 puntos pola resolución práctica)

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos

b) 1 punto

2) a) 2 puntos

b) 1 punto

3) a) 1 punto

b) 1 punto

4) 2 puntos

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 + m^2 + m^3 - m^4 - m^3 - m = -m(m^3 - m^2 - m + 1)$$

Calculamos, por Ruffini, as raíces de $m^3 - m^2 - m + 1 = 0$

$$1) \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \quad m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Polo tanto

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \\ m = 1 \text{ (raíz doble)} \end{cases}$$

$$\boxed{m = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\boxed{m = -1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\boxed{m = 1} \Rightarrow \text{rang}(A) = 1 \text{ (as tres filas son iguais e hai un elemento non nulo)}$$

Resumindo:

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 3, \quad \text{se } m \neq -1, 0, 1}$$

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 2, \quad \text{se } m = 0 \text{ ou } m = -1}$$

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 1, \quad \text{se } m = 1}$$

b) $\boxed{m = 1}$ Neste caso o sistema é equivalente a

$$x + y + z = 1$$

Como $\text{rango}(\text{matriz coeficientes}) = \text{rango}(\text{matriz ampliada}) = 1 < n^\circ \text{ de incógnitas}$, é un sistema compatible indeterminado. As infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a)

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Non son colineais e polo tanto os puntos } A, B \text{ e } C \\ \text{determinan un plano.} \end{array}$$

Ecuación do plano α que pasa polos puntos A, B e C :

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha: 2x - 3y + z - 8 = 0$$

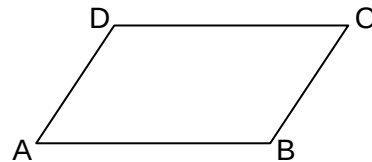
Para que o punto D esté no plano α , deberá satisfacer a súa ecuación:

$$2\lambda - 3\lambda + 6 - \lambda - 8 = 0, \text{ e polo tanto } \boxed{\lambda = -1}$$

Como un paralelogramo é unha figura plana,

bastará comprobar se para $\lambda = -1$ resulta

un paralelogramo



$$\lambda = -1 \Rightarrow D(-1, -3, 1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) \\ \overrightarrow{DC} = (2, 2, 2) \\ \overrightarrow{AD} = (-4, -3, -1) \\ \overrightarrow{BC} = (0, 1, 3) \end{cases}$$

Non son paralelos
↓
non constitúen un paralelogramo

b) Os vectores $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (0, 1, -1)$ son vectores non colineais e perpendiculares ao vector $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$. Polo tanto, o punto $C(1, -1, 3)$ e os vectores $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (0, 1, -1)$ determinan o plano π e podemos escribir as súas ecuacións paramétricas como

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) *Teorema de Bolzano*: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ teñen distinto signo, é dicir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- $f(x) = x^3 + 2x - 4$ é continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica e polo tanto continua en $[1, 2]$
 - $f(1) = -1 < 0$
 - $f(2) = 8 > 0$
- $\Rightarrow \boxed{\exists c \in (1, 2) \text{ tal que } f(c) = 0}$
Teorema de Bolzano

Como $f(x)$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, pois é unha función polinómica, tamén o será en calquera intervalo de $\mathbb{R}$ e si existisen c_1 e c_2 tales que $f(c_1) = f(c_2) = 0$, entón aplicando o teorema de Rolle, existiría un t tal que $f'(t) = 0$, pero $f'(x) = 3x^2 + 2$ non se anula en ningún punto de $\mathbb{R}$. Así pois,

$\boxed{f(x) \text{ corta ao eixe } OX \text{ soamente nun punto}}$

b) É unha indeterminación do tipo 1^∞ . Tomamos logaritmos neperianos:

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right)^{1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln(x^2+x+2)}{x^2} \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) \text{ (aplicamos a regra de L'Hôpital) } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x+2}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x+2 - 2x^2-5x-2}{2x(x+2)(x^2+x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x-4)}{2x(x+2)(x^2+x+2)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{2(x+2)(x^2+x+2)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

e polo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right)^{1/x^2} = e^{-1/2}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

$$y = 3x - x^2$$

$$y' = 3 - 2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$$

$$y'' = -2 < 0$$

$\left. \begin{array}{l} y' = 3 - 2x \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \\ y'' = -2 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{máximo: } (3/2, 9/4) = \text{vértice da parábola} \\ \Rightarrow \text{cóncava} \end{array}$

$$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \text{Puntos de corte da parábola cos eixes: } (0,0), (3,0)$$

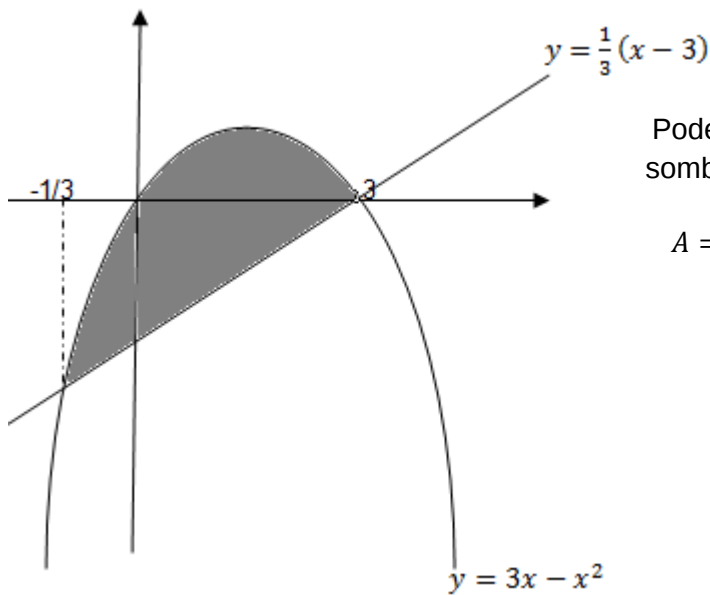
$$y'(3) = -3 \Rightarrow \text{pendente da recta normal á parábola no punto } (3,0): 1/3$$

Ecuación da recta normal á parábola no punto (3,0):

$$y = \frac{1}{3}(x - 3) \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$$

Puntos de corte da recta normal e a parábola:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = \frac{1}{3}(x - 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3}(x - 3) = 3x - x^2 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1/3, -10/9) \\ (3,0) \end{cases}$$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/3}^3 \left[3x - x^2 - \frac{1}{3}(x - 3) \right] dx = \\ &= \int_{-1/3}^3 \left[\frac{8}{3}x - x^2 + 1 \right] dx = \\ &= \left[\frac{8}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1/3}^3 = \\ &= 12 - 9 + 3 - \frac{12}{81} - \frac{1}{81} + \frac{27}{81} = \\ &= \boxed{\frac{500}{81} u^2} \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio1:

a) Matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 - 4\alpha + 9\alpha - 2 + 2 = 5\alpha$$

Polo tanto:

- Se $\alpha \neq 0$, $\text{rang}(C) = 3$
- Se $\alpha = 0$, $\text{rang}(C) = 2$

Como sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$ e o sistema será compatible indeterminado cando $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2$, calculamos $\text{rang}(A)$ cando $\alpha = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -27 + 5 + 4 + 18 = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2, \text{ se } \alpha = 0$$

Polo tanto, o sistema é compatible indeterminado cando $\boxed{\alpha = 0}$.

Cando $\alpha = 0$, un sistema equivalente é:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 5 - 3z \\ x - 3y = -4 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow y = 9 - z \Rightarrow x = 23 - 5z$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 23 - 5\lambda \\ y = 9 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) Do apartado anterior deducimos que

- $\alpha = 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$. Sistema compatible indeterminado, infinitas solucións.
- $\alpha \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas}$. Sistema compatible determinado, solución única.

Polo tanto, $\boxed{\text{o sistema sempre ten solución}}$.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio2:

a) Utilizando as propiedades do produto escalar de dous vectores, temos:

$$\begin{aligned} |\vec{v} + \vec{w}|^2 &= \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle + 2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

é dicir:

$$196 = 36 + 100 + 120 \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w})$$

e polo tanto

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{3}}$$

b) Calculamos o vector director, $\vec{v}_r$, da recta r

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k}$$

O plano queda determinado polos elementos:

- O punto $A(-1,5,0)$
- Os vectores $\vec{v}_r = (-6,9,6)$ e $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ que son paralelos ao plano e independentes entre si. (En lugar do vector $(-6,9,6)$ podemos considerar o $(-2,3,2)$ xa que $(-6,9,6) \parallel (-2,3,2)$).

$$\boxed{\text{Ecuacións paramétricas: } \begin{cases} x = -1 - 2\lambda + \mu \\ y = 5 + 3\lambda - 4\mu \\ z = 2\lambda + \mu \end{cases}}$$

Para obter a ecuación xeral, podemos eliminar os parámetros λ e μ nas ecuacións paramétricas ou ben calcular a ecuación do plano a partir dun punto do plano (por exemplo o $A(-1,5,0)$) e un vector normal ao plano $\vec{n}$:

$$\vec{n} = (-2,3,2) \times (1,-4,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

Polo tanto, a ecuación xeral do plano é:

$$11(x+1) + 4(y-5) + 5z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{11x + 4y + 5z - 9 = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio3:

a)

- $f(x)$ é continua en $x < 1$, por ser polinómica.
- Se $a \neq 0$, $f(x)$ é continua en $x > 1$ por ser racional e non anularse o denominador.
- Estudo da continuidade en $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2/a \\ f(1) = a - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que sexa continua en } x = 1, \text{ debe ser} \\ a - 1 = 2/a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ ou } a = 2 \end{array}$$

Polo tanto, $f(x)$ é continua se $a = -1$ ou $a = 2$

Se unha función é derivable nun punto, necesariamente é continua nel. Polo tanto, para estudar a derivabilidade en $x = 1$, só teremos que facelo cando $a = -1$ ou $a = 2$

Caso: $a = -1$

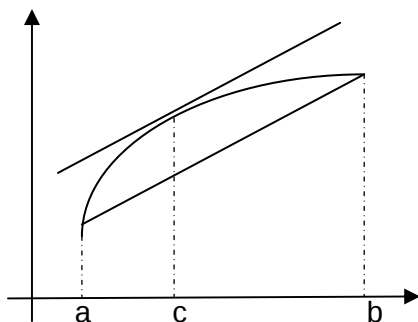
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 1 \\ 2/x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = 2 \end{array} \Rightarrow \text{Non é derivable en } x = 1.$$

Caso: $a = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 1 \\ -1/x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = -1 \end{array} \Rightarrow \text{Non é derivable en } x = 1$$

Polo tanto, $f(x)$ non é derivable en $x = 1$ para ningún valor de a .

b) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial:* Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) , entón existe algún punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Interpretación xeométrica: Nas hipótesis do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á corda que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

É a integral dunha función racional. Como o grao do numerador é igual ao grao do denominador, en primeiro lugar facemos a división para obter unha fracción cuxo numerador sexa de grao inferior ao denominador:

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} = 5 + \frac{2x + 1}{x^3 - x}$$

Calculamos as raíces do denominador:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) \Rightarrow \text{Raíces: } 0, 1, -1.$$

Son todas raíces reais sinxelas, facemos a descomposición:

$$\frac{2x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx}{x(x - 1)(x + 1)}$$

Como os denominadores son iguais, os numeradores deben ser iguais:

$$\begin{array}{lll} A + B + C = 0 & (\text{coeficiente de } x^2) & \\ B - C = 2 & (\text{coeficiente de } x) & \\ -A = 1 & (\text{termo independente}) & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3/2 \\ C = -1/2 \end{cases}$$

A integral queda:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} dx &= \int_2^3 \left[5 + \frac{2x + 1}{x^3 - x} \right] dx = \int_2^3 \left[5 - \frac{1}{x} + \frac{3/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1} \right] dx \\ &= \left[5x - \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| \right]_2^3 \\ &= 15 - \ln 3 + \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 4 - \left(10 - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 \right) \end{aligned}$$

$Solución = 5 - 1/2 \ln 3 + 3/2 \ln 2$
--

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPÇÃO A

Exercício 1:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+1) + a(a+1)^2 = a(a+1)(2a+1)$$

Polo tanto

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \\ a = -1/2 \end{cases}$$

$$a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$a = -1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$a = -1/2$$

$$\begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Resumindo:

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 3, \quad \text{se } m \neq 0, -1, -1/2}$$

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 2, \quad \text{se } m = 0 \text{ ou } m = -1 \text{ ou } m = -1/2}$$

$$a = 1$$

$a = 1 \Rightarrow \det(A) = 6$, e posto que $\det(A) = \det(A^t)$, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ e ademais que o determinante dun produto de matrices é igual ao produto dos determinantes desas matrices e que para unha matriz M de orde 3, se verifica que $\det(\lambda M) = \lambda^3 \det(M)$, temos:

$$\boxed{\det(2A^t \cdot A^{-1}) = 2^3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = 8}$$

b) $B^{-1} = B^t \Leftrightarrow B \cdot B^t = I$, é dicir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & y & 0 \\ x & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1/4 & -y/2 + x/2 & 0 \\ -y/2 + x/2 & y^2 + 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtendo:

$$x^2 + 1/4 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}/2$$

$$y^2 + 1/4 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{3}/2$$

$$-y/2 + x/2 = 0 \Rightarrow x = y$$

Posibles valores:

$$x = y = \sqrt{3}/2$$

ou

$$x = y = -\sqrt{3}/2$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Puntos de corte cos eixes de coordenadas: $A(-6,0,0)$; $B(0,3,0)$; $C(0,0,2)$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6,3,0) \\ \overrightarrow{AC} = (6,0,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-6, 12, -18)$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 144 + 324} = \frac{1}{2} \sqrt{504} = \boxed{3\sqrt{14} \text{ u}^2}$$

b) $\vec{n}_\pi = (1, -2, 3)$ é un vector do plano pedido

$\overrightarrow{BC} = (0, -3, -2)$ é un vector do plano pedido

$$\text{Vector normal ao plano} = \vec{n}_\pi \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (13, 2, -3)$$

Como pasa polo punto $(0,0,0)$, a ecuación xeral do plano pedido é:

$$\boxed{13x + 2y - 3z = 0}$$

c) $\vec{n}_\pi = (1, -2, 3)$ é un vector director da recta perpendicular a π .

$$\text{Ecuacións paramétricas da recta perpendicular a } \pi, \text{ pasando polo } (0,0,0) = \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Calculamos o punto M de intersección desta recta co plano π :

$$\lambda + 4\lambda + 9\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -3/7 \Rightarrow M = (-3/7, 6/7, -9/7)$$

Como o punto M é o punto medio entre $O(0,0,0)$ e o seu simétrico $O'(x,y,z)$

$$\left. \begin{array}{l} -3/7 = x/2 \\ 6/7 = y/2 \\ -9/7 = z/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{O'(-6/7, 12/7, -18/7)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$

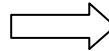
$$x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ non ten asíntotas verticais}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 \text{ é asíntota horizontal}}, \boxed{f(x) \text{ non ten asíntotas oblicuas}}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

Como $(x^2+1)^2 > 0$, o signo de $f'(x)$ coincide co signo do numerador da fracción anterior. Así:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	crecente	decrecente	Crecente



A función é crecente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$.
A función é decrecente no intervalo $(-1, 1)$.

b)

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx &= \int_1^e \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} dx = \int_1^e \left[1 - \frac{2x}{x^2+1} \right] dx = [x - \ln x]_1^e = \\ &= e - \ln(e^2 + 1) - 1 + \ln 2 = \boxed{0,2845} \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x) = xe^{2x}$ que pasa polo punto (0,1). Calculamos a integral por partes

$$\int xe^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$u = x,$	$du = dx$
$dv = e^{2x} dx,$	$v = \frac{1}{2} e^{2x}$

e impoñemos a condición de que pase polo punto (0,1)

$$1 = -\frac{1}{4} + C \Rightarrow C = 5/4$$

Polo tanto

$f(x) = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + 5/4$

A función pasa por (0,1) e $f'(0) = 0$, polo que a recta tanxente pedida é

$y = 1$

b) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$ entón a función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

é derivable e ademais verifícase que $F'(x) = f(x)$.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -m & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -m & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{vmatrix} = 3m^2 - 11m + 10$$
$$3m^2 - 11m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ ó } m = 5/3$$

Polo tanto:

- $m = 2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$. Sistema compatible determinado.
- $m = 5/3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$. Sistema compatible determinado.
- $m \notin \{2, 5/3\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible.

b) $\boxed{m = 2}$ Vimos no apartado anterior que neste caso é un sistema compatible determinado e ten solución única. Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 3x + 5y = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3x - 3y = -6 \\ 3x + 5y = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Calculamos a ecuación xeral do plano π_2 . Das ecuacións paramétricas deste plano deducimos un punto do plano e dous vectores independentes contidos nel:

- Vectores independentes contidos en π_2 : $(1, -1, 0)$; $(2, -1, 1)$
- Punto pertencente a π_2 : $(3, 1, 1)$

Ecuación xeral de π_2 : $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - z - 3 = 0$

Para estudar a posición relativa dos planos π_1 e π_2 discutimos a solución do sistema

$$\pi_1: x + y + z - 5 = 0$$

$$\pi_2: x + y - z - 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{\text{os planos córtanse nunha recta}}$$

Para calcular as ecuacións paramétricas desta recta, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} x + z = 5 - y \\ x - z = 3 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 4 - y \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Os vectores normais aos planos π_1 e π_2 , $\vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, 1)$ e $\vec{n}_{\pi_2} = (1, 1, -1)$ respectivamente, son dous vectores independentes que pertencen ao plano π_3 que ademais pasa polo $(0, 0, 0)$. Polo tanto:

Ecuación xeral de π_3 : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_3: x - y = 0}$

Para calcular a intersección dos tres planos, resolvemos o sistema formado polas súas ecuacións xerais:

$$\begin{cases} x + y + z - 5 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 5 \\ 2x - z = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1$$

Polo tanto,

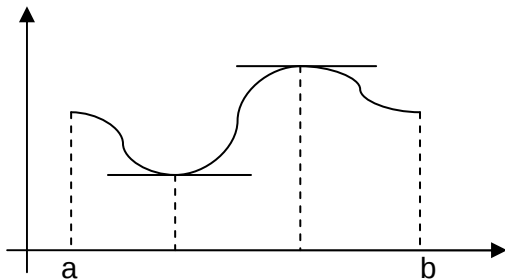
$$\boxed{\text{Punto de corte dos tres planos: } P(2, 2, 1)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Teorema de Rolle: Sexa $f(x)$ unha función continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, entón existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



Interpretación xeométrica: Dada función continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , que toma os mesmos valores nos extremos do intervalo, a súa gráfica ten algún punto con tanxente horizontal.

b) $f(x)$ é continua en $[0, 2)$ e $(2, c]$ por ser polinómica nos dous intervalos.

Continuidade en $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \\ f(2) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 2a + b = 3 \Rightarrow 2a + b = -1$$

$f(x)$ é derivable en $(0, 2)$ e $(2, c)$ por ser polinómica nos dous intervalos.

Derivabilidade en $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + a = 1$$

Por outra parte $f(0) = f(c) \Rightarrow b = c + 1$

Temos así tres ecuacións con tres incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} 2a + b = -1 \\ 4 + a = 1 \\ b - c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -3}; \boxed{b = 5}; \boxed{c = 4}$$

Exercicio 4:

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

En primeiro lugar calculamos os elementos necesarios para a representación da parábola:

$$\left. \begin{array}{l} y' = -2x + 2 \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ y'' = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ten un máximo, que é o vértice, no punto } (1,4) \text{ e é cóncava}$$

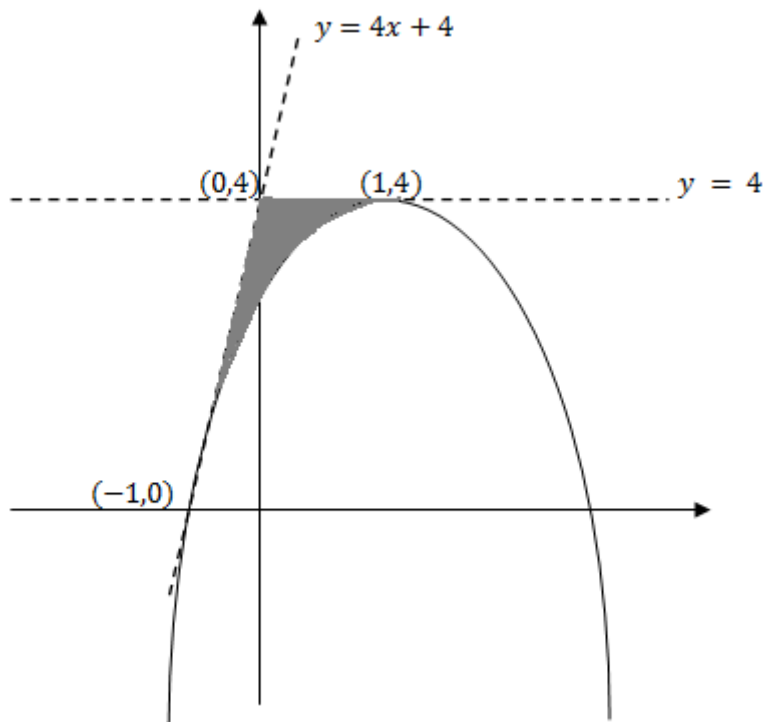
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,3), (-1,0), (3,0)$$

Tanxente no punto $(1,4)$: $y = 4$.

Determinamos o punto no que a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. Como a derivada nun punto coincide coa pendente da recta tanxente nese punto, teremos que determinar o punto no que a derivada vale 4 (dúas rectas son paralelas se teñen a mesma pendente):

$$y' = 4 \Leftrightarrow -2x + 2 = 4 \Rightarrow x = -1$$

Tanxente no punto $(-1,0)$: $y = 4(x + 1)$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$A = \int_{-1}^0 [4x + 4 - (-x^2 + 2x + 3)] dx + \int_0^1 [4 - (-x^2 + 2x + 3)] dx =$$
$$\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = -\left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$