PAU

Código: 26

XUÑO 2011

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Sexan C_1, C_2, C_3 as columnas primeira, segunda e terceira, respectivamente, dunha matriz cadrada M de orde 3 con $det(M) = 4$. Calcula, enunciando as propiedades de determinantes que utilices, o determinante da matriz cuxas columnas primeira, segunda e terceira son, respectivamente, $-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3$

b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos os valores de a e b para os que $A^{-1} = A^t$, sendo A^t a matriz trasposta de A.

2. a) ¿Son coplanarios os puntos $A(1,0,2), B(0,-1,1), C(-1,-2,0)$ e $D(0,2,2)$? Se existe, calcula a ecuación do plano que os contén.

b) Calcula a ecuación xeral e as ecuacións paramétricas do plano que é perpendicular ao plano $\alpha: 2x + y - 3z + 4 = 0$ e contén a recta que pasa polos puntos $P(-1,1,2)$ e $Q(2,3,6)$.

3. a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula o valor de k para que a función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[-2,0]$ e para ese valor determina un punto do intervalo no que se anule a derivada de $f(x)$.

b) Calcula o dominio e os intervalos de crecemento e decrecemento da función $g(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (Nota: ln=logaritmo neperiano).

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$, a súa recta tanxente no punto $(3,4)$ e o eixo OX (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} mx - 2y + 2z &= 1 \\ 2x + my + z &= 2 \\ x + 3y - z &= m \end{aligned}$$

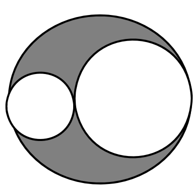
b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 1$.

2. a) Calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $P(1,2,-3)$ e é perpendicular á recta

$$r: \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Calcula a distancia d do punto $Q(-1,0,-2)$ ao plano $\beta: x - 2y + 3z + 12 = 0$. Calcula, se existe, outro punto da recta r que tamén diste d do plano β.

3. Nunha circunferencia de radio 10 cm., divídese un dos seus diámetros en dúas partes que se toman como diámetros de dúas circunferencias tanxentes interiores a ela. ¿Que lonxitude debe ter cada un destes dous diámetros para que sexa máxima a área delimitada polas tres circunferencias (rexión sombreada)?



4. a) Define función derivable nun punto. Calcula, se existen, os valores de a e b, para que sexa derivable a función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & se\ x < 0 \\ x^2 + ax + b & se\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Define integral indefinida dunha función. Calcula $\int x^2\, cosx dx$

	PAU	**Código: 26**
	SETEMBRO 2011	

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Se A é unha matriz tal que $A^3 + I = O$, sendo I a matriz identidade e O a matriz nula de orde 3, ¿cal é o rango de A? Calcula o determinante de A^{30}. Calcula A no caso de que sexa unha matriz diagonal verificando a igualdade anterior.

b) Dada a matriz $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula unha matriz X tal que $BXB - B = B^{-1}$

2. a) Dado o plano $\pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$, calcula a ecuación da recta r que pasa polo punto $P(1, -2, 1)$ e é perpendicular a π. Calcula o punto de intersección de r e π.

b) ¿Están aliñados os puntos $A(2,0,3), B(0,0,1)$ e $C(2,1,5)$? Se non están aliñados, calcula a distancia entre o plano que determinan estes tres puntos e o plano π do apartado a).

3. a) Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que a gráfica da función

$$f(x) = 3sen\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$$

corta o eixo OX nalgún punto do intervalo $(0, \pi)$? Razoa a resposta.

b) Descompón o número 40 en dous sumandos tales que o produto do cubo dun deles polo cadrado do outro sexa máximo. ¿Canto vale ese produto?

4. a) Calcula os valores de a, b, c sabendo que $y = ax^2 + bx + 1$ e $y = x^3 + c$, teñen a mesma recta tanxente no punto $(1,2)$.

b) Enuncia a regra de Barrow. Calcula $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - lnx\right) dx$. (Nota ln = logaritmo neperiano).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + my + 3z &= 1 \\ x + 2y + mz &= m \\ x + 4y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 4$.

2. a) Estuda a posición relativa da recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ e a recta s que pasa polos puntos $P(0,2,1)$ e $Q(1,1,1)$. Calcula a distancia de r a s.

b) Calcula a ecuación xeral do plano π que é paralelo á recta r e contén á recta s.

3. a) Calcula os extremos relativos da función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$. Calcula tamén o máximo absoluto e o mínimo absoluto desta función no intervalo $[-3,3]$.

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = ax^2 + bxlnx$ teña un punto de inflexión no punto $(1,2)$. Para estes valores de a e b, calcula o dominio e os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$. (Nota ln = logaritmo neperiano).

4. a) Define primitiva e integral indefinida dunha función.

b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -3x^2 + 3$ e a recta $y = -9$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención do valor do determinante.
- 1 punto polo enunciado das propiedades de determinantes que utilice.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de a e b.

2) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto por probar que son coplanarios.
- 0,5 puntos pola ecuación do plano que os contén.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola ecuación xeral do plano.
- 0,5 puntos polas ecuacións paramétricas do plano.

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,25 puntos polo cálculo de k.
- 0,25 puntos polo cálculo do punto onde se anula a derivada da función.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo dominio da función.
- 0,25 puntos pola derivada da función.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.

4) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola gráfica da parábola.
- 0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo do rango das matrices
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto pola resolución do sistema para o caso $m = 1$.

2) **a) 1 punto** pola obtención dunha ecuación do plano.

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención da distancia do punto ao plano.
- 1 punto pola obtención do outro punto da recta.

3) **2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola función maximizada.
- 1 punto pola obtención dos valores que maximizan a área da rexión.

4) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de función derivable nun punto.
- 0,5 puntos polo cálculo do valores de a e b.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de integral indefinida dunha función.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

5) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz A.
- 0,5 punto polo cálculo do determinantes da matriz A^{30}.
- 0,5 puntos pola obtención da matriz diagonal.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo cálculo da matriz B^{-1}.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención da matriz X.

6) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola ecuación da recta r.
- 0,5 puntos polo punto de intersección da recta e o plano.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos por probar que os tres puntos non están aliñados.
- 0,5 puntos pola ecuación do plano que determinan os tres puntos.
- 0,5 puntos pola distancia entre os planos.

7) **a) 1 punto**, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,5 puntos pola aplicación do teorema de Bolzano.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos pola formulación do problema
- 0,5 puntos pola obtención dos sumandos
- 0,25 puntos produto dos sumandos.

8) **a) 0,75 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos pola obtención de c.
- 0,5 puntos pola obtención de a e b.

b) 1,25 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo enunciado da regra de Barrow.
- 0,75 puntos pola integral.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo do rango das matrices
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto, pola resolución do sistema para o caso $m = 4$.

5) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa das rectas.
- 1 punto pola distancia entre as rectas.

b) 1punto, pola ecuación xeral do plano.

6) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polos extremos relativos.
- 0,5 puntos polos máximo e mínimo absolutos

b) 1 punto, distribuído en;

- 0,5 puntos pola obtención de a e b.
- 0,25 puntos polo dominio da función.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.

7) **a) 0,5 puntos**.

b) 1,5 puntos, distribuídos en;

- 0,5 puntos pola gráfica da parábola.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1. a) Se chamamos N á matriz da que queremos calcular o determinante $det(N) =$
$det(-C_2, 2C_1-C_3, C_2+C_3) \overset{*}{=} det(-C_2, 2C_1-C_3, C_3) \overset{*}{=} det(-C_2, 2C_1, C_3) \overset{**}{=}$
$-2det(-C_2, C_1, C_3) \overset{***}{=} 2det(C_1, C_2, C_3) = 8$
Propiedades utilizadas:
(*) Se a unha columna se lle suma outra columna multiplicada por un número, o determinante non varía.
(**) Se multiplicamos cada elemento dunha columna por un número, o determinante desa matriz queda multiplicado por ese número.
(***) Se permutamos dúas columnas dunha matriz, o determinante cambia de signo.

b) Se $A^{-1} = A^t$, entón $A \cdot A^t = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E así:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 = 1 \\ ab = 0 \\ 1+b^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = 0} \; \boxed{a = \pm 1}$$

2. a) $\overrightarrow{AC} = (-2,-2,-2)$, $\overrightarrow{AD} = (-1,2,0)$ son dous vectores non proporcionais e polo tanto os puntos A, C e D determinan un plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - 3z + 4 = 0}$$

é a ecuación do plano que pasa polos puntos A, C e D.
E como as coordenadas de B verifican a ecuación anterior, entón B tamén pertence ao plano π e así os puntos dados son coplanarios.

b)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (2,1,-3) \\ \overrightarrow{PQ} = (3,2,4) \end{array}\right\} \text{ son dous vectores do plano pedido}$$

Como $P(-1,1,2)$ é un punto do plano, xa temos os elementos suficientes para poder escribir as ecuacións paramétricas

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 2 - 3\lambda + 4\mu \end{array}}$$

E a ecuación xeral

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{10x - 17y + z + 25 = 0}$$

3. a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) e ademais $f(a) = f(b)$, entón existe a lo menos un punto $c\ (a,b)$ onde se anula a derivada: $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^3 - kx + 10$ é unha función polinómica e polo tanto continua en $[-2,0]$ e derivable en $(-2,0)$. Para poder aplicarlle o teorema de Rolle só resta impoñerlle a condición de que tome o mesmo valor nos extremos do intervalo

$f(-2) = f(0) \Rightarrow -8 + 2k + 10 = 10 \Rightarrow \boxed{k = 4}$

$f(x) = x^3 - 4x + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Pero $\frac{2\sqrt{3}}{3} \notin (-2,0)$, polo que o punto do intervalo $(-2,0)$ no que se anula a derivada de $f(x)$ é o punto $\boxed{c = -\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

b) A función lnx non está definida para $x < 0$, e como $x^2 + 1 > 0$, a función $g(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ está definida para os valores de x tales que $x^2 - 1 > 0$. É dicir

$$\boxed{Domg(x) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)}$$

$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin Domg(x)$

	$(-\infty$,-1)	(-1,1)	(1,∞)
$f'(x)$	< 0	Non está no dominio	> 0
$f(x)$	decrecente		crecente

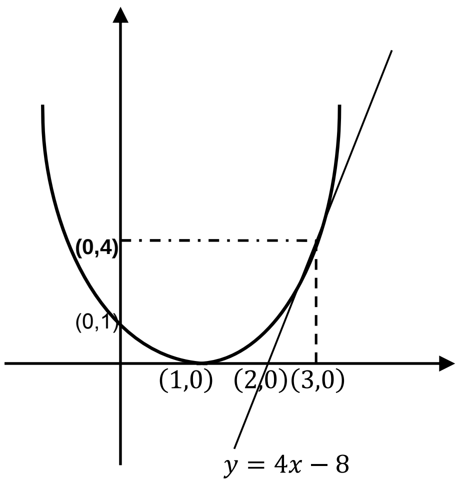
4. $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2(x-1);\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f''(x) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ é convexa e ten un mínimo (vértice) no punto (1,0)

Ademais

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ (1,0) punto de corte co eixo OX

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow$ (0,1) punto de corte co eixo OY



Recta tanxente no punto (3,4):

$$y - 4 = f'(3)(x - 3)$$

É dicir

$$y - 4 = 4(x - 3);\ y = 4x - 8$$

e a área pedida podemos calculala como

$$A = \int_1^3 (x^2 - 2x + 1)dx - \frac{1}{2}(3-2) * 4 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^3 - 2 = \boxed{\frac{2}{3}\ u^2}.$$

OPCIÓN B

1. a)

$\begin{matrix} Matriz\ de \\ coeficientes \end{matrix}(C) = \begin{pmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} Matriz \\ ampliada \end{matrix}(A) = \begin{pmatrix} m & -2 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & m \end{pmatrix}$;

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 5m + 6$$

Como

$m^2 + 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6$ ou $m = 1$

Temos:

$m = -6 \;\Rightarrow\; rang(C) = 2$

$m = 1 \;\Rightarrow\; rang(C) = 2$

$m \neq -6, e\;\; m \neq 1 \;\;\Rightarrow\; rang(C) = 3$

Como $rang(C)\; \leq rang(A) \leq 3,$ só necesitamos calcular o rango da matriz ampliada nos casos $m = -6$ e $m = 1$:

$\boxed{m = -6}$

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 49 \;\neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

$\boxed{m = 1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$$

Discusión:

$m = -6 \;\Rightarrow\; rang(C) = 2 < \; 3 = rang(A).$ Sistema incompatible.

$m = 1 \;\Rightarrow\; rang(C) = 2 = rang(A) < n^o\, incógnitas.$ Sistema compatible indeterminado.

$m \neq -6$ e $m \neq 1 \Rightarrow\; rang(C) = 3 = rang(A) = n^o\, incógnitas.$ Sistema compatible determinado.

b) Caso $\boxed{m = 1}$. Polo visto no apartado anterior, o sistema é compatible indeterminado e ten infinitas solucións. Un sistema equivalente é:

$$\begin{aligned} 2x \;\; + \;\; z \;\; &= 2 - \;\; y \\ x \;\; - \;\; z \;\; &= 1 - 3y \end{aligned}$$

e as infinitas solucións son

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{4}{3}\lambda \\ y = \lambda \qquad ; \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = \frac{5}{3}\lambda \end{cases}$$

2. a) Como o plano é perpendicular á recta, o vector director da recta é un vector perpendicular ao plano

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,2,-3)$$

Como conocemos un punto, $P(1,2,-3)$, e un vector perpendicular ao plano, a ecuación xeral do plano é:

$$-(x-1) + 2(y-2) - 3(z+3) = 0$$

é dicir

$$\boxed{\beta: x - 2y + 3z + 12 = 0}$$

b) Utilizando a fórmula da distancia dun punto a un plano

$$d(Q,\beta) = \left|\frac{-1-6+12}{\sqrt{1+4+9}}\right| = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{14}\ u}$$

Como $\vec{v}_r = (-1,2,-3)$ é un vector director da rectas r, e (0,-2,1) é un punto da mesma, as ecuacións paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = & -\lambda \\ y = & -2 + 2\lambda \\ z = & 1 - 3\lambda \end{cases}$$

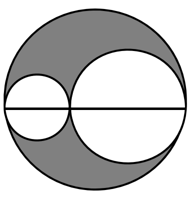
Temos que atopar un punto da recta, será da forma ($-\lambda, -2+2\lambda, 1-3\lambda$), distinto de Q que tamén diste $\frac{5\sqrt{14}}{14}$ unidades do plano β. Utilizando novamente a fórmula da distancia dun punto a un plano, temos

$$\frac{5\sqrt{14}}{14} = \frac{|-\lambda + 4 - 4\lambda + 3 - 9\lambda + 12|}{\sqrt{1+4+9}} \Rightarrow 5 = |19 - 14\lambda|$$

$5 = 19 - 14\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ e obteriamos o punto Q.

$-5 = 19 - 14\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{12}{7} \Rightarrow \boxed{Q'(-\frac{12}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{29}{7})}$

3. Se chamamos x e y aos radios das dúas circunferencias tanxentes interiores á dada, entón verificarase que



$$2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$$

Polo tanto, a función a maximizar está dada por

$$A(x) = \pi * 10^2 - [\pi x^2 + \pi(10-x)^2]$$

$A'(x) = -2\pi x + 2\pi(10-x)$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (punto crítico)

$A''(x) = -4\pi < 0 \Rightarrow A''(5) < 0$ *(máximo)*

Polo tanto, a área da rexión sombreada resulta máxima cando se divide o diámetro da circunferencia de partida en dúas partes iguais, é dicir que as circunferencias tanxentes interiores teñen 10cm. de diámetro

4. **a)** A función $f(x)$ dise derivable no punto x_0 se existe e é finito o seguinte límite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

En $x<0,$ a función $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{e^x} & se\ x<0\\ x^2+ax+b & se\ \ x\geq 0\end{cases}$ é continua e derivable por ser cociente de funcións continuas e derivables e non anularse o denominador.
En $x>0$, a función é continua e derivable por ser polinómica.
Para que $f(x)$ sexa continua en $x=0$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-x}{e^x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\ b=\ f(0)\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \boxed{b=1}$$

Para que $f(x)$ sexa derivable en $x=0$

$$\left.\begin{array}{r}f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1-x}{e^x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-x-e^x}{xe^x}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1-e^x}{e^x+xe^x}=-2\\ f'(0^+)=\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+\ ax+1-1}{x}=\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x+a)=a\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{a=-2}$$

(*) É unha indeterminación da forma $\frac{0}{0}$ e aplicamos a regra de L'Hopital

b) Chámase integral indefinida de $f(x)$ ao conxunto de todas as primitivas de $f(x)$. Represéntase por $\int f(x)dx=\ F(x)+\ C$.
O símbolo $\int$ chámase integral, mentras que $f(x)dx$ recibe o nome de integrando, $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ e C é a constante de integración.

Para calcular $\int x^2cosxdx$, utilizamos o método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r}u=x^2\\ dv=cosxdx\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}du=2xdx\\ v=senx\end{array}$$

$$\int x^2cosxdx=x^2senx-\int 2xsenxdx$$

Volvemos a utilizar o método de integración por partes

$$\left.\begin{array}{r}u=2x\\ dv=senxdx\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}du=2dx\\ v=-cosx\end{array}$$

$$\int x^2cosxdx\ =x^2senx+2xcosx-\int 2cosxdx==x^2senx+2xcosx-2senx+C$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. a) $A^3 + I = 0 \Leftrightarrow A^3 = -I$. Polo tanto

$[\det(A)]^3 = -1 \Rightarrow \det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{rang(A) = 3}$.

$A^{30} = (A^3)^{10} = (-I)^{10} = I \Rightarrow \det(A^{30}) = 1.$

Se A é ademais unha matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} = -I \Rightarrow \begin{cases} a^3 = -1 \\ b^3 = -1 \\ c^3 = -1 \end{cases}$$

E así $\boxed{A = -I.}$

b) $\det(B) = -1/2 \neq 0 \Rightarrow \exists\, B^{-1}$

$BXB - B = B^{-1} \Leftrightarrow X = B^{-1}(B + B^{-1})B^{-1} = B^{-1} + (B^{-1})^3$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\left(Ad(B_{ij})\right)^t = -2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(B^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1} + (B^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 14 & -18 \end{pmatrix}}$$

2. a) (2,0,0) é un punto do plano π

$\left.\begin{matrix} (-1,1,1) \\ (1,0,1) \end{matrix}\right\}$ son vectores do plano π

Ecuación xeral do plano π:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 2 = 0$$

Como a recta e o plano son perpendiculares, como vector director da recta tomamos o vector asociado ao plano π: $(1,2,-1)$ e a ecuación da recta será

$$\boxed{r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}}$$

Para calcular o punto de corte da recta e o plano, escribimos as ecuacións paramétricas da recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

E sustituimos na ecuación xeral do plano

$$1 + \lambda + 2(-2 + 2\lambda) - 1 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Punto de corte: $\boxed{(2,0,0)}$.

b) Os vectores

$\overrightarrow{AB} = (-2,0,-2)$, $\overrightarrow{AC} = (0,1,2)$ non son proporcionais e polo tanto os puntos non están aliñados e determinan un plano.

Ecuación xeral do plano que pasa por estes tres puntos:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+2y-z+1=0$$

Temos polo tanto dous planos paralelos

$\pi: x+2y-z-2=0;$
$\alpha: x+2y-z+1=0$
e a distancia entre eles ven dada por
$d(\pi,\alpha) = \dfrac{|-2-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{2}\ unidades}$

3. **a)** Teorema de Bolzano: Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b)<0$ (toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo), entón existe a lo menos un punto $c\in(a,b)$ no que a función se anula: $f(c)=0$.

$f(x) = 3sen\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$ continua en $[0,\pi]$
$f(0)<0$
$f(\pi)>0$
Polo teorema de Bolzano, $\exists c\in(0,\pi)$ tal que $f(c)=0$.

b) Sumandos: x; $40-x$. Hai que maximizar a función

$$P(x) = x^3(40-x)^2$$

Calculamos os puntos críticos

$$P'(x) = 3x^2(40-x)^2 - 2x^3(40-x) = x^2(40-x)(120-5x)$$

$$P'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \text{ que evidentemente non maximiza a } P(x) \\ x=40, \text{ que evidentemente non maximiza a } P(x) \\ x=24 \end{cases}$$

Posto que
$x\in(0{,}24) \Rightarrow P'(x)>0$
$x\in(24{,}40) \Rightarrow P'(x)<0$
podemos afirmar que $P(x)$ ten un máximo relativo en $x=24$. Polo tanto, os sumandos son 24 e 16 e o produto será

$$P(24) = 24^3\cdot 16^2 = \boxed{3.538.944}$$

4. **a)** $2 = 1^3 + c \Rightarrow \boxed{c=1}$
Pendente da recta tanxente no punto (1,2): $y'(1) = 3\cdot 1^2 = 3$
Tendo en conta que $y=ax^2+bx+1$, pasa polo punto (1,2) e que a pendente da súa recta tanxente neste punto é 3, temos o sistema de ecuacións
$2 = a+b+1$
$3 = 2a+b$
Obtendo que $\boxed{a=2}$, e $\boxed{b=-1}$

b) Regra de Barrow: Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a,b]$ e $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

$\int(\frac{1}{x} - lnx)dx = ln|x| - \int lnx\, dx$
Utilizando o método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x \end{array}\right\} \Rightarrow \int lnx\,dx = xlnx - \int dx = x(lnx - 1)$$

e utilizando a regra de Barrow

$$\int_1^e \int (\frac{1}{x} - lnx)dx = [ln|x| - x(lnx-1)]_1^e = 1 - 1 = 0$$

OPCIÓN B

1. a)

$$\begin{array}{c} Matriz\ de \\ coeficientes \end{array} (C) = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{c} Matriz \\ ampliada \end{array} (A) = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & m & m \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 7m + 12$$

Como

$m^2 - 7m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ ou $m = 4$

Temos:

$m = 3 \Rightarrow rang(C) = 2$

$m = 4 \Rightarrow rang(C) = 2$

$m \neq 3, e\ m \neq 4 \Rightarrow rang(C) = 3$

Como $rang(C) \leq rang(A) \leq 3,$ só necesitamos calcular o rango da matriz ampliada nos casos $m = 3$ e $m = 4$:

$\boxed{m = 3}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

$\boxed{m = 4}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$$

Discusión:

$m = 3 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$ Sistema incompatible.

$m = 4 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) < n^o\ incógnitas.$ Sistema compatible indeterminado.

$m \neq 3$ e $m \neq 4 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = n^o\ incóg$. Sistema compatible determinado.

b) Caso $\boxed{m = 4}$. Polo visto no apartado anterior, o sistema é compatible indeterminado e ten infinitas solucións. Un sistema equivalente é:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y &=& 4 - 4z \\ x + 4y &=& 1 - 3z \end{array}$$

e as infinitas solucións son

$$\begin{cases} x = -5\lambda + 7 \\ y = \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2} \quad ; \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

2. a)

Punto da recta r: $P_r(1,1,0)$

Vector director da recta r: $\vec{v}_r = (1,2,1)$

Vector director da recta s: $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (1,-1,0)$; $\overrightarrow{P_rP} = (-1,1,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang\left(\overrightarrow{P_rP}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right) = 3 \quad \Rightarrow \boxed{As\ rectas\ crúzanse.}$$

$$\vec{v}_r \mathrm{x}\, \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,-3)$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{P_rP}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right)\right|}{|\vec{v}_r \mathrm{x}\, \vec{v}_s|} = \frac{3}{\sqrt{1+1+9}} = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{11}\ unidades}$$

b) $P(0,2,1)$ é un punto do plano π

$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \mathrm{x}\, \vec{v}_s = (1,1,-3)$ é un vector perpendicular ao plano π. Polo tanto, a ecuación do plano π será:

$$x + y - 2 - 3(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi : x + y - 3z + 1 = 0}$$

3. a) $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(0) = -16 < 0$. $\boxed{Máximo\ relativo: (0,1)}$

$f''(-2) = f''(2) = 32>0$. $\boxed{Mínimos\ relativos: (-2,15), (2,15)}$

$f(x)$ función polinómica $\Rightarrow$ $f(x)$ é continua no intervalo $[-3,3] \Rightarrow$ $f(x)$ alcanza o mínimo e máximo absolutos no intervalo $[-3,3]$

$f(-3) = f(3) = 10$

Polo tanto:

$$\boxed{Mínimo\ absoluto\ no\ intervalo\ [-3,3]: -15}$$

$$\boxed{Maximo\ absoluto\ no\ intervalo\ [-3,3]:\ 10}$$

b) A función pasa polo punto (1,2)

$\boxed{f(1) = 2 \Rightarrow a = 2}$.

$f(x) = 2x^2 + bxlnx$

$f'(x) = 4x + b\ln x + b$

$f''(x) = 4 + \frac{b}{x}$

En $x = 1$, a función ten un punto de inflexión

$0 = f''(1) = 4 + b \Rightarrow \boxed{b = -4}$

Polo tanto: $f(x) = 2x^2 - 4x\ln x$.

Como a función ln só está definida para números positivos, temos que

$\boxed{Dom(f(x)) = (0, +\infty)}$

Por outra parte

$f''(x) = 4 - \frac{4}{x} = \frac{4(x-1)}{x}$

E analizando o signo da segunda derivada:

	(0,1)	(1, +∞)
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava	convexa

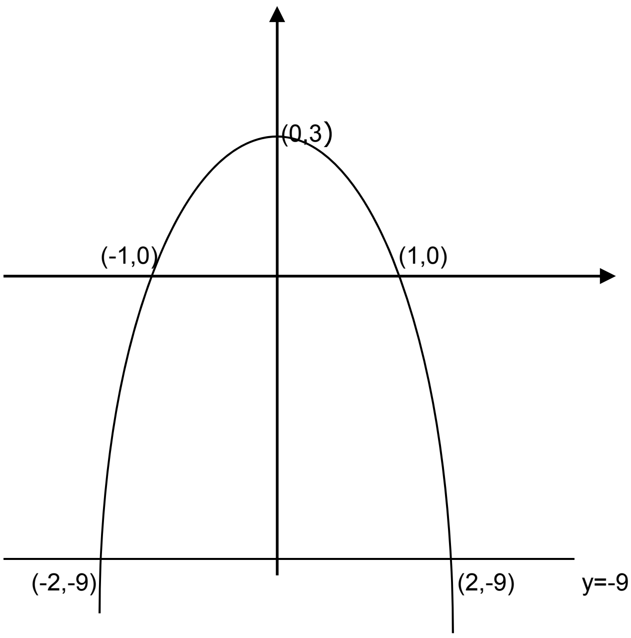
4. a) A función $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

Chámase integral indefinida de $f(x)$ ao conxunto de todas as primitivas de $f(x)$. Represéntase por $\int f(x)dx = F(x) + C$.
O símbolo $\int$ chámase integral, mentras que $f(x)dx$ recibe o nome de integrando, $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ e C é a constante de integración.

b) Vértice da parábola: (0,3)

- 3 < 0 ⇒ convexa

Puntos de corte da parábola cos eixos: (0,3), (-1,0), (1,0)



Puntos de corte das gráficas

$\left.\begin{array}{l} y = -3x^2 + 3 \\ y = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (-2,-9), (2,-9)

Polo tanto

$A = \int_{-2}^{2}(-3x^2 + 3 + 9)dx;$

$A = [-x^3 + 12x]_{-2}^{2} = \boxed{32\ u^2}$