PAU

XUÑO 2010

Código: 26

MATEMÁTICAS II

(*O alumno/a deber responder só aos exercicios dunha das opcións . Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos).*

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Se I é a matriz identidade de orde 3, calcula os valores de λ para os que $A+\lambda I$ non ten inversa. Calcula, se existe, a matriz inversa de $A-2I$.

b) Calcula a matriz X tal que $XA + A^t = 2X$, sendo A^t a matriz trasposta de A.

2. Sexa r a recta que pasa polo punto P(1,-1,-2) e é perpendicular ao plano $\alpha: x+2y+3z+6=0$. Sexa s a recta que pasa polos puntos A(1,0,0) e B(-1,-3,-4).
a) Estuda a posición relativa das rectas r e s. Se se cortan, calcula o punto de corte.
b) Calcula a distancia do punto A(1,0,0) ao plano β que pasa polo punto P(1,-1,-2) e é paralelo a α.

3. Debuxa a gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Sabendo que $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, con f unha función continua en todos os puntos da recta real, calcula $f(2)$.

b) Calcula $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro a, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} ax + 2y + 2z &= a \\ x + y + z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= a \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $a=0$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} y=1 \\ x-z+4=0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación do plano α que pasa polo punto Q(0,2,2) e contén a recta r. Calcula a área do triángulo que ten por vértices os puntos de intersección de α cos eixos de coordenadas.
b) Calcula a ecuación xeral do plano que contén a recta r e é perpendicular ao plano α.

3. a) Define función continua nun punto. ¿Cando se di que unha discontinuidade é evitable?¿Para que valores de k, a función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+k}$ é continua en todos os puntos da recta real?

b) Determina os valores de a, b, c, d para que a función $g(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ teña un máximo relativo no punto (0,4) e un mínimo relativo no punto (2,0).

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta $x+y=7$ e a gráfica da parábola $f(x)=x^2+5$.
(Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos).

OPCIÓN A

1. a) Pon un exemplo de matriz simétrica de orde 3 e outro de matriz antisimétrica de orde 3.
b) Sexa M unha matriz simétrica de orde 3, con $\det(M) = -1$. Calcula, razoando a resposta, o determinante de $M + M^t$, sendo M^t a matriz trasposta de M.
c) Calcula unha matriz X simétrica e de rango 1 que verifique: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 3x + 5y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación xeral do plano π perpendicular a r e que pasa polo punto $P(2,-1,-2)$.
b) Calcula o punto Q no que r corta a π. Calcula o ángulo que forma o plano π con cada un dos planos coordenados.

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{sen(x^2)}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y = -x^2 + 1$ e as rectas tanxentes a esta parábola nos puntos de corte da parábola co eixo OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións lineais

$$\begin{aligned} mx + y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= m \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = -1$.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = -6 \end{cases}$; $\quad s: \begin{cases} 4x - 3y - 12 = 0 \\ 5y - 4z - 4 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa. Se se cortan, calcula o punto de corte e o ángulo que forman r e s.
b) Calcula, se existe, o plano que as contén.

3. Debuxa a gráfica da función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Calcula $\int x \ln(1 + x^2)\,dx$ (Nota: ln = logaritmo neperiano)
b) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo integral.

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención dos valores de λ para os que $A+\lambda I$ non ten inversa.
- 1 punto polo cálculo da matriz inversa de A-2I.

b) 1 punto, distribuídos en:

- 0,5 puntos por despexar X
- 0,5 puntos polos cálculos de $-A^t(A-2I)^{-1}$

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención das rectas r e s.
- 1 punto polo estudo da posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.

b) 1punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención do plano β.
- 0,5 puntos pola obtención da distancia do punto ao plano.

3) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo dominio e puntos de corte cos eixes.
- 0,25 puntos polas asíntotas.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen máximos nin mínimos relativos.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen puntos de inflexión.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,25 puntos pola gráfica.

4) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
- 0,5 puntos pola obtención de $f(2)$.

b) 1punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola división do polinomio do numerador entre o do denominador e a descomposición en fraccións simples.
- 0,5 puntos polas integrais e aplicación da regra de Barrow.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz de coeficientes.
- 0,5 puntos polo cálculo do rango da matriz ampliada.
- 0,5 puntos. Sistema incompatible.
- 0,5 puntos. Sistema compatible determinado.

b) 1 punto, pola solución do sistema para o caso $a = 0$.

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención dunha ecuación do plano α.
- 1 punto polo cálculo da área do triángulo.

b) 1 punto, pola obtención da ecuación do plano.

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,25 puntos pola definición de función continua nun punto.
- 0,25 puntos pola definición de descontinuidade evitable.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de *k*.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de *a, b, c, d.*

4) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,75 puntos polas gráficas.
- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) **a) 0,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo exemplo de matriz simétrica.
- 0,25 puntos polo exemplo de matriz antisimétrica.

b) 1 punto

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos por expresar a condición do rango.
- 0,5 puntos polas ecuacións do produto de matrices.
- 0,5 puntos por resolver as ecuacións.

2) **a) 1,5 puntos**

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,75 puntos pola obtención do punto de corte.
- 0,75 puntos (0,25 puntos por cada ángulo).

3) **a) 1 punto,** distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto

4) **2 puntos,** distribuídos en:

- 0,5 puntos por representar a parábola.
- 0,5 puntos pola obtención das tanxentes.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz de coeficientes.

- 0,5 puntos polo cálculo do rango da matriz ampliada.
- 0,5 puntos. Sistema incompatible
- 0,5 puntos. Sistema compatible determinado.

b) 1 punto (0,5 puntos por cada caso)

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa
- 0,5 puntos polo punto de corte.
- 0,5 puntos polo ángulo que forman as rectas.

b) 1 punto, pola obtención da ecuación do plano.

3) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo dominio e puntos de corte cos eixes.
- 0,25 puntos polas asíntotas.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,25 puntos polo máximo e mínimo relativos.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen puntos de inflexión.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,25 puntos pola gráfica.

4) **a) 1 punto,** distribuído en:

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola integral da función racional.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) $A+\lambda I=\begin{pmatrix}-1+\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 1 & -1+\lambda\end{pmatrix}$; $\left|A+\lambda I\right| = \left(\lambda-1\right)^2\cdot(\lambda+1)$.

Polo tanto, $A+\lambda I$ non ten inversa $\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1\\ \lambda=-1\end{cases}$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix};\quad \left|A-2I\right|=(-3)^2\cdot(-1)=-9\neq 0$$

$$\left(A-2I\right)^{-1}=\frac{1}{\left|A-2I\right|}(Ad(A-2I)_{ij})^t=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

b) $XA+A^t=2X \Leftrightarrow X(A-2I)=-A^t$. E, polo apartado anterior, sabemos que $A-2I$ ten inversa. Polo tanto: $X=-A^t(A-2I)^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2) **a)** $\left.\begin{array}{c}P(1,-1,2)\in r\\ \vec{v}_r=\vec{n}_\alpha=(1,2,3)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{cases}$ $\quad\left.\begin{array}{c}A(1,0,0)\in s\\ \vec{v}_s=\overrightarrow{AB}=(-2,-3,-4)\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1-2\mu\\ y=-3\mu\\ z=-4\mu\end{cases}$

$rang(\vec{v}_r,\vec{v}_s)=rang\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -3 & -4\end{pmatrix}=2 \Rightarrow$ as rectas córtanse ou crúzanse. Ademais

$rang(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{PA})=rang\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=2$, logo as rectas córtanse.

Punto de corte:

$$\left.\begin{array}{r}1+\lambda=1-2\mu\\ -1+2\lambda=-3\mu\\ -2+3\lambda=-4\mu\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\mu=-1\\ \lambda=2\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{T(3,3,4)}$$

b) $\left.\begin{array}{r} P(1,-1,-2)\in\beta \\ \overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}=(1,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \beta:(x-1)+2(y+1)+3(z+2)=0 \Rightarrow \beta: x+2y+3z+7=0$

$$d(A,\beta)=\frac{|1+7|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{4\sqrt{14}}{7}\,unidades$$

3) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left.\begin{array}{r} x=0\Rightarrow f(x)=0 \\ f(x)=0\Rightarrow x(x+3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(0,0)};\boxed{(-3,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty \end{array}\right\} \quad \boxed{x=-1} \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+3x}{x(x+1)}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}-x}{x+1}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=x+2}$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+1)-x^2-3x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x+3=0$, que non ten raíces reais.

Polo tanto, non existen máximos nin mínimos relativos.

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	>0	>0
$f(x)$	crecente	crecente

$f(x)$ é crecente no intervalo $(-\infty,-1)$ e no intervalo $(-1,+\infty)$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

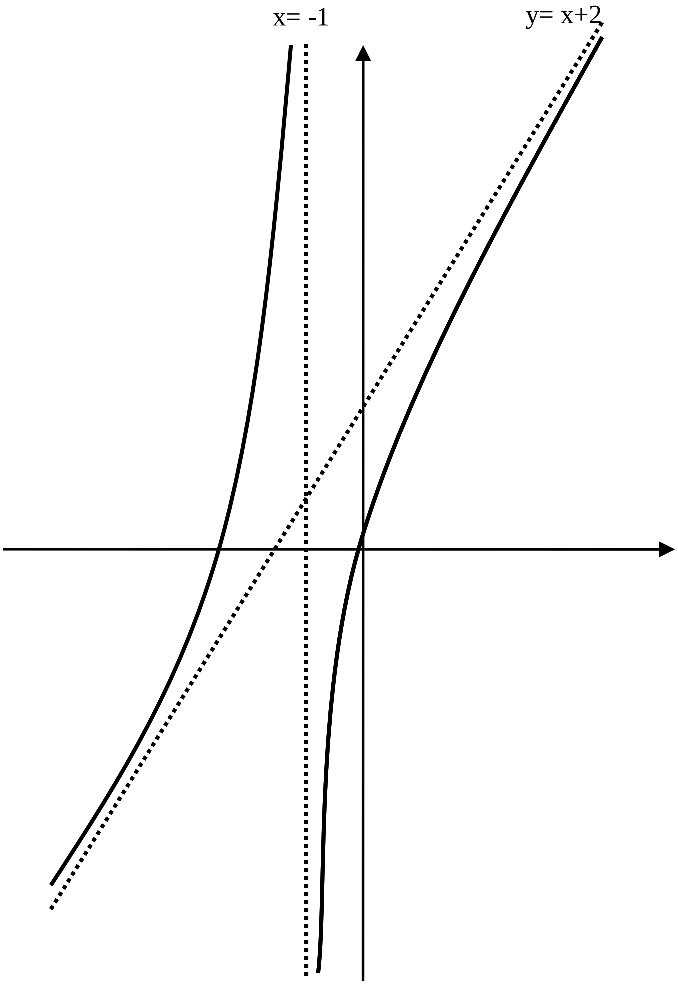
$f''(x)\neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f''(x)$	>0	<0
$f(x)$	convexa	cóncava

$f(x)$ é convexa no intervalo $(-\infty,-1)$ e cóncava no intervalo $(-1,+\infty)$

Con todos estes datos a gráfica da función será:



4) a) Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entón $F(x)$ é derivable en (a,b) e ademais $F'(x)=f(x)$.

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x) \Rightarrow f(x)=F'(x)=2x+3x^2$$

e polo tanto:

$$f(2)=4+12=16$$

b) O numerador e denominador son funcións polinómicas do mesmo grao. Polo tanto, en primeiro lugar, facemos a división:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x}=1+\frac{1-x}{x^2+x}$$

e, tendo en conta que $x^2+x=x(x+1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$$\frac{1-x}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+Bx+A}{x^2+x}\Rightarrow\begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$$

Polo tanto

$$\int\frac{1-x}{x^2+x}dx=\int dx+\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2dx}{x+1}$$

e aplicando a regra de Barrow

$$\int_1^2\frac{1-x}{x^2+x}dx=\left[x+\ln|x|-2\ln|x+1|\right]_1^2=2+\ln 2-2\ln 3-1+2\ln 2=1+3\ln 2-2\ln 3=1+\ln(8/9)$$

OPCIÓN B

1) a) Matriz de coeficientes $(C) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $(A) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & a \end{pmatrix}$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$|C| = 2a - 2 + \cancel{4} - \cancel{4} + a - 4 = 3a - 6;\quad 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Polo tanto:

$a = 2 \Rightarrow rang(C) = 2$

$a \neq 2 \Rightarrow rang(C) = 3$

Calculamos o rango da matriz ampliada:

$a \neq 2 \Rightarrow rang(A) = 3$, pois $3 = rang(C) \leq rang(A) \leq 3$

para $a = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{4} - 2 - \cancel{4} - 4 = -6 \neq 0$$

Concluímos que $rang(A) = 3$, para calquera valor do parámetro.

Discusión:

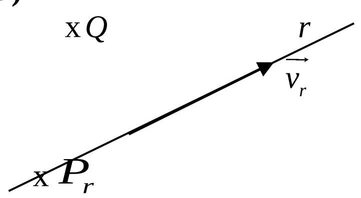
$a = 2 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A).$ Sistema incompatible. Non ten solución.

$a \neq 2 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = n^{o}\, incógnitas.$ Sistema compatible determinado. Solución única.

b) $\boxed{a = 0}$. Estamos no caso de sistema compatible determinado e é un sistema homoxéneo. Polo tanto a solución única é a solución trivial

$$\boxed{x = 0, y = 0, z = 0}$$

2) a)



$$r: \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$P_r(-4,1,0) \in r;\quad Q(0,2,2) \in \alpha$

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_r &= (1,0,1) \\ \overrightarrow{QP_r} &= (-4,-1,-2) \end{aligned}\right\}\ \text{vectores directores de } \alpha$$

Estes elementos determinan o plano α :

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha : x - 2y - z + 6 = 0}$$

Vértices do triángulo: $M(-6,0,0)$; $N(0,3,0)$; $P(0,0,6)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=(6,3,0)\\ \overrightarrow{MP}=(6,0,6)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 3 & 0\\ 6 & 0 & 6\end{vmatrix}=(18,-36,-18)$$

$$\text{Área } \widehat{MNP}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{18^2+36^2+18^2}=9\sqrt{6}\ u^2$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(1,0,1)\\ \overrightarrow{n_\alpha}=(1,-2,-1)\end{array}\right\}\text{vectores directores de } \pi$$

$P_r(-4,1,0)\in\pi$

Estes elementos determinan o plano π:

$$\begin{vmatrix}x+4 & y-1 & z\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y-z+3=0}$$

3) **a)** Dise que $f(x)$ é continua no punto $x=x_0$, se

$$\exists\lim_{x\to x_0} f(x);\quad \exists f(x_0);\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Dise que $f(x)$ ten unha descontinuidade evitable no punto $x=x_0$, se

$$\exists\lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\nexists f(x_0)\quad \text{ou ben } \exists f(x_0) \text{ pero } f(x_0)\neq\lim_{x\to x_0} f(x)$$

$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$ é un cociente de funcións continuas en $\mathbb{R}$. Polo tanto $f(x)$ será continua en $\mathbb{R}$ se non se anula o denominador, pero

$$x^2+k=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-k}$$

Así $f(x)$ é continua en $\mathbb{R}$ para $k\in(0,\infty)$.

b) Máximo relativo en $(0,4) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g(0)=4\Rightarrow\boxed{d=4}\\ g'(0)=0\Rightarrow\boxed{c=0}\end{array}\right\} \Rightarrow g(x)=ax^3+bx^2+4$

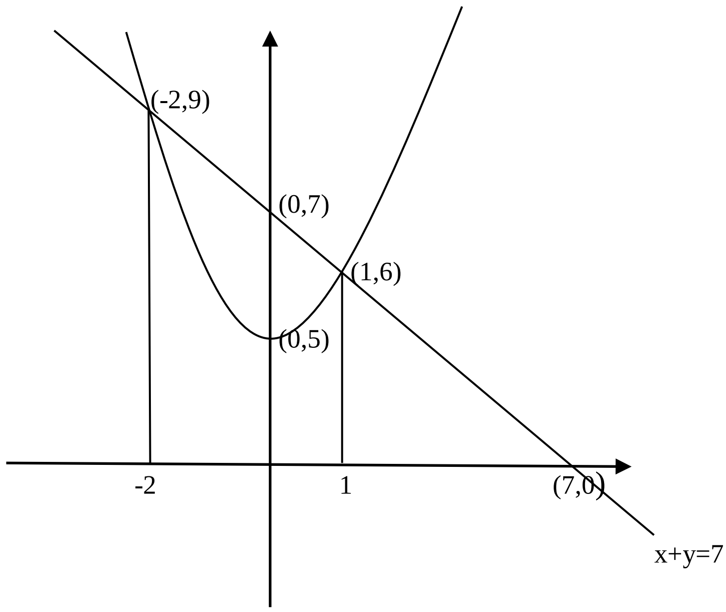
Mínimo relativo en $(2,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g(2)=0\Rightarrow 8a+4b+4=0\\ g'(2)=0\Rightarrow 12a+4b=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\boxed{a=1}\\ \boxed{b=-3}\end{array}\right.$

4) $x+y=7\Rightarrow$ Puntos de corte da recta cos eixes: (0,7), (7,0)

$$f(x)=x^2+5\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f'(x)=2x\Rightarrow \text{Decrecente en } (-\infty,0) \text{ e crecente en } (0,\infty)\\ \text{Corte cos eixes: (0,5); Vértice (0,5); } f''(x)=2>0\Rightarrow \text{convexa}\end{array}\right.$$

Puntos de corte de recta e parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y = 7 - x \\ y = x^2 + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \;\;1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Puntos de corte das gráficas: } (-2,9);(1,6)$$



$$Área = \int_{-2}^{1}\left[7 - x - (x^2+5)\right]dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \boxed{\frac{9}{2}u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) Exemplo de matriz simétrica de orde 3 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; Exemplo de matriz antisimétrica de orde 3 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) M simétrica $\Leftrightarrow (a_{ij} = a_{ji}) \Leftrightarrow M = M^t \quad \Leftrightarrow M + M^t = 2\,M$. Entón, tendo en conta que M é de orde 3:

$$\det(M + M^t) = \det(2M) = 2^3\det(M) = -8$$

c) X cadrada de orde 2 e simétrica $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$rang(X) = 1 \Rightarrow ac - b^2 = 0$, e non todos nulos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & -a-2b \\ b+2c & -b-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos así:

$$\left.\begin{array}{l} a+2b=2 \\ b+2c=0 \\ ac-b^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=0 \\ c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) a) Calculamos as ecuacións paramétricas de r:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y=-z+3 \\ 3x+5y=-3z+7 \end{array}\right\} \Rightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x=\ 4-\lambda \\ y=-1 \\ z=\qquad \lambda \end{array}\right.$$

Por ser o plano e a recta perpendiculares:

$$\pi \perp r \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\pi} \parallel \overrightarrow{v_r}=(-1,0,1)$$

Polo tanto:

$$\pi \left\{\begin{array}{l} \text{pasa polo punto } P(2,-1,-2) \\ \qquad \vec{n}_\pi=(-1,0,1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \pi: -1(x-2)+(z+2)=0 \Leftrightarrow \boxed{\pi: x-z-4=0}$$

b) Punto de corte da recta e o plano:

$$\cancel{4}-\lambda-\lambda-\cancel{4}=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \boxed{Q(4,-1,0)}$$

Ángulo que forma π cos planos coordenados:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Plano XY} \equiv \alpha: z=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\alpha,\pi)=\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\pi})=\frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\alpha}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(\alpha,\pi)=\pi/4}$$

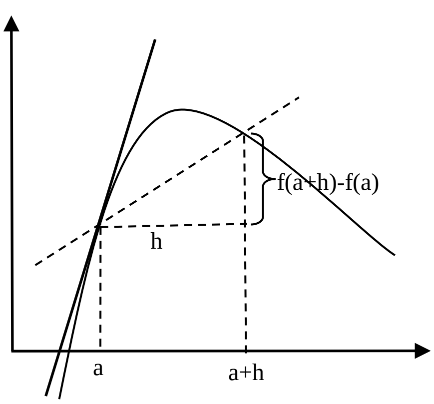
$$\left.\begin{array}{l} \text{Plano YZ} \equiv \beta: x=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\beta,\pi)=\cos(\overrightarrow{n_\beta},\overrightarrow{n_\pi})=\frac{\left|\overrightarrow{n_\beta}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\beta}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(\beta,\pi)=\pi/4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Plano XZ} \equiv \gamma: y=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\gamma,\pi)=\cos(\overrightarrow{n_\gamma},\overrightarrow{n_\pi})=\frac{\left|\overrightarrow{n_\gamma}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\gamma}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=0 \Rightarrow \boxed{(\gamma,\pi)=\pi/2}$$

3) a) Dada a función $y=f(x)$, dise que $f(x)$ é derivable en $x=a$, se existe e é finito o límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

represéntase por $f'(a)$ e chámase derivada de $f(x)$ en $x=a$.



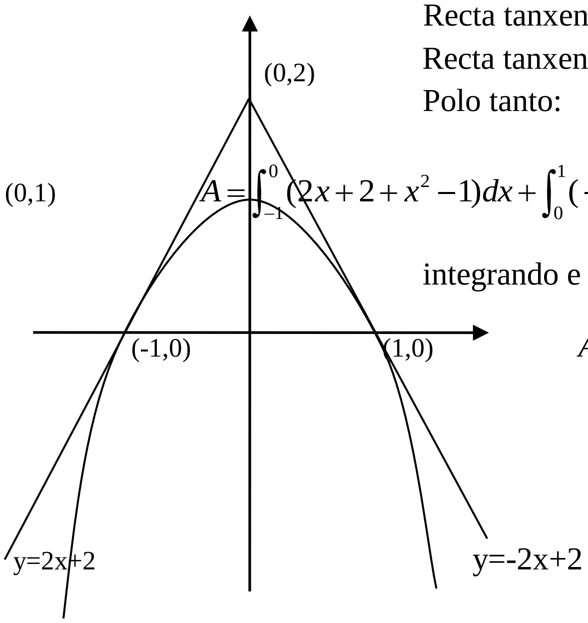
Interpretación xeométrica: o cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ coincide coa pendente da recta secante que pasa por $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[a, a+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convírtese na tanxente.

Así: a derivada de $f(x)$, en $x=a$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(a, f(a))$.

b) É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2senx}{2x\cos(x^2)}\underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{2\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

4) parábola: $y=-x^2+1\begin{cases}\text{vértice}:(0,1)\\ \text{Puntos corte eixe 0X: }(-1,0),(1,0)\\ y'=-2x;\ \ y''=-2<0\quad\text{cóncava}\end{cases}$



Recta tanxente en (-1,0): $y=2(x+1)\Leftrightarrow y=2x+2$

Recta tanxente en (1,0): $y=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+2$

Polo tanto:

$$A=\int_{-1}^{0}(2x+2+x^2-1)dx+\int_0^1(-2x+2+x^2-1)dx$$

integrando e aplicando a regra de Barrow

$$A=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\boxed{\frac{2}{3}u^2}$$

OPCIÓN B

1) a) Matriz de coeficientes $(C)=\begin{pmatrix}m&1&-2\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$; Matriz ampliada $(A)=\begin{pmatrix}m&1&-2&0\\1&1&1&0\\1&-1&1&m\end{pmatrix}$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l}|C|=2m+4\\ \begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}m=-2\Rightarrow rang(C)=2\\ m\neq-2\Rightarrow rang(C)=3\end{cases}$$

Calculamos o rango da matriz ampliada:

$$m\neq-2,\quad 3=rang(C)\le rang(A)\le 3\Rightarrow rang(A)=3$$

pero para $m=-2$

$$\begin{vmatrix}-2&1&0\\1&1&0\\1&-1&-2\end{vmatrix}=6\neq 0$$

Así, $rang(A)=3,\ \forall m$

Discusión do sistema:

- $m=-2 \Rightarrow rang(C)=2<3=rang(A).$ Sistema incompatible. Non ten solución.
- $m \neq -2 \Rightarrow rang(C)=3=rang(A)=n^o\, incógnitas$ Sistema compatible determinado. Solución única.

b) Caso $\boxed{m=0}$. Queda un sistema homoxéneo e como estamos no caso dun sistema compatible determinado, a única solución é a trivial: $\boxed{x=y=z=0}$

Caso $\boxed{m=-1}$. Tamén estamos no caso dun sistema compatible determinado e a solución única podémola obter por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2}=-\frac{3}{2}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{2}=1$$

2) **a)** Determinamos un punto e un vector director de cada unha das rectas r e s:

$P_r(3,0,-6)$; $\vec{v_r}=(-3,-4,0)$

$$\vec{v_s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}=(12,16,20)$$. Consideramos $\vec{v_s}=(3,4,5)$; $P_s(3,0,-1)$

Podemos estudar a posición relativa utilizando rangos:

$$rang\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow$$ As rectas córtanse ou crúzanse.

Pero como $rang\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=2$, as rectas son secantes.

Punto de corte:

$$\cancel{4(3-3\lambda)+12\lambda-12=0}$$

$$-20\lambda+24-4=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \boxed{P(0,-4,-6)}$$

O ángulo que forman as rectas podemos calculalo como:

$$\alpha=\angle(r,s)=ar\cos\frac{\left|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}\right|}{\left\|\vec{v_r}\right\|\cdot\left\|\vec{v_s}\right\|}=ar\cos\frac{\left|-9-16\right|}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{9+16+25}}=ar\cos\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha=\pi/4$$

b) Como as rectas son secantes, están contidas nun plano:

$$\left.\begin{array}{l} (0,-4-6)\in\pi \\ \vec{v_r},\vec{v_s} \text{ vectores de } \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\pi:\begin{cases} x= & -3\lambda+3\mu \\ y=-4 & -4\lambda+4\mu \\ z=-6 & +5\mu \end{cases}}$$

3) $Dom(g) = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow g(x)=0 \\ g(x)=0 \Rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad \boxed{x=2} \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x(x-2)} = 1 \\ b = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = x+2}$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$g'(x)$	> 0	< 0	<0	>0
$g(x)$	crecente	decrecente	decrecente	crecente

$g(x)$ é crecente nos intervalos $(-\infty,0)$ e $(4,+\infty)$ e $g(x)$ é decrecente nos intervalos $(0,2)$ e $(2,4)$.

Calculamos a segunda derivada:

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$g''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo: $(0,0)$

$g''(4) = 1 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo: $(4,8)$

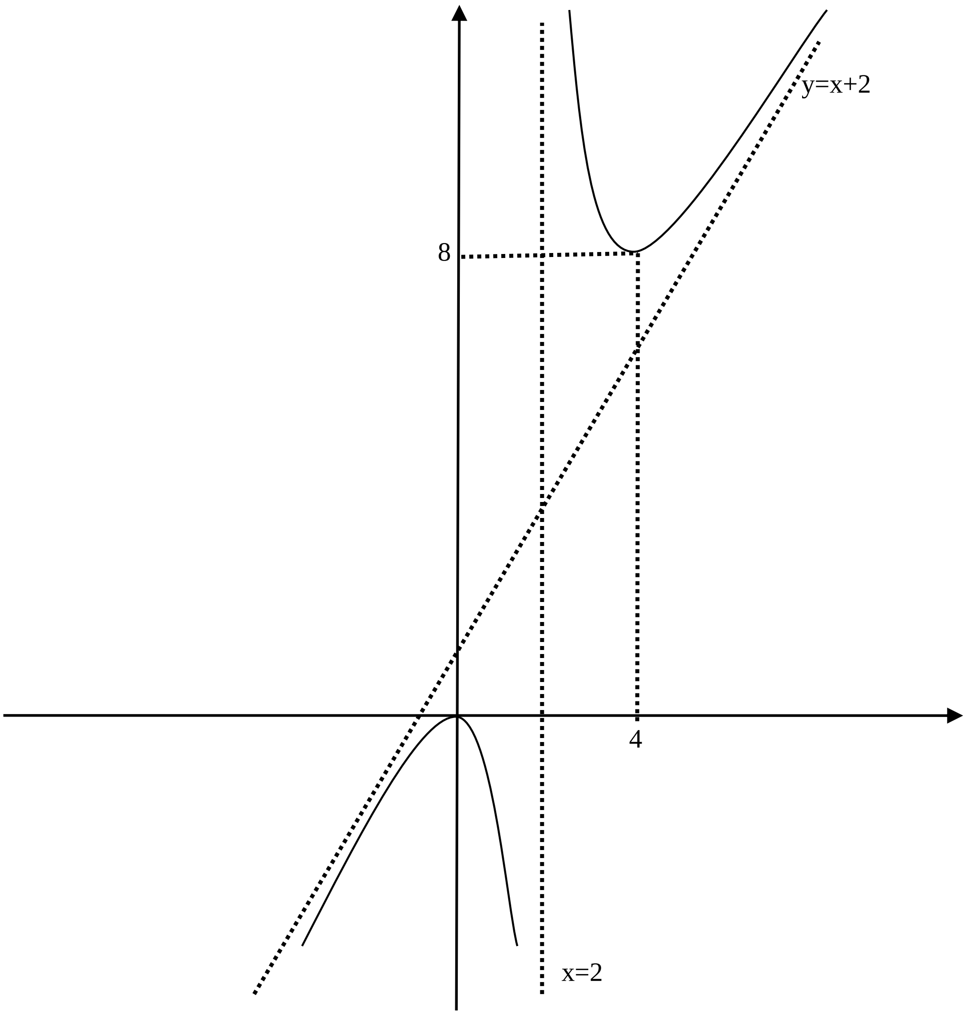
$g''(x) \neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$g''(x)$	< 0	> 0
$g(x)$	cóncava	convexa

$g(x)$ é convexa no intervalo $(2,+\infty)$ e cóncava no intervalo $(-\infty,2)$

Con todos estes datos, a gráfica de $g(x)$ será:



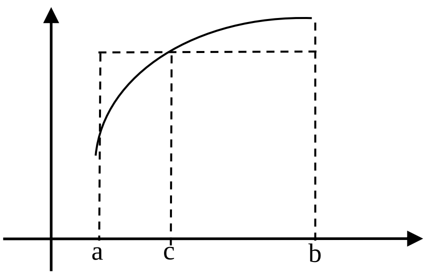
4) a) Utilizamos o método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln(1+x^2)\Rightarrow du=\dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ dv=xdx\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow I=\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do denominador, facemos a división dos polinomios. Así:

$$I=\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\int(x-\frac{x}{1+x^2})dx=\boxed{\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C}$$

b) Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a,b]$, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$



Interpretación xeométrica: A área encerrada pola gráfica de unha función continua nun intervalo pechado, o eixo OX e as rectas $x=a$, $x=b$ é igual á área dun rectángulo de base $b-a$ e altura $f(c)$, sendo $f(c)$ o valor que toma a función nun punto intermedio c.