

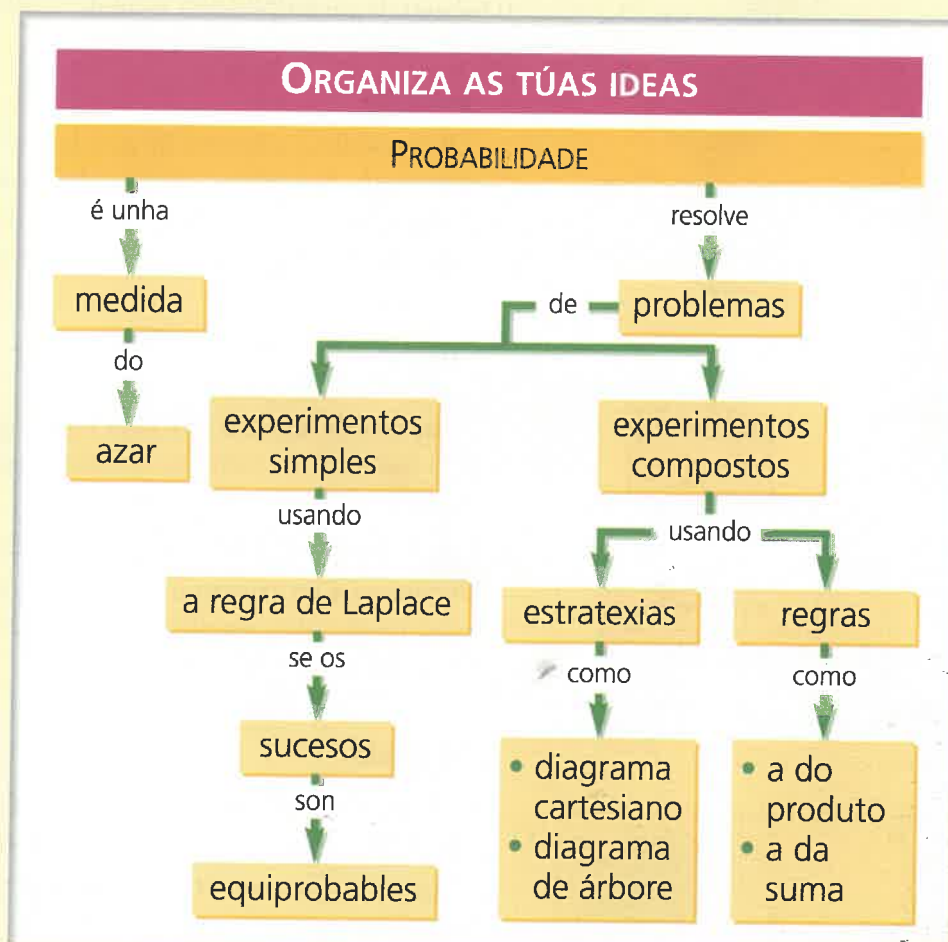




O tema comeza coa clasificación dos experimentos en deterministas e de azar ou aleatorios, e os conceptos e terminoloxía de sucesos aleatorios e as operacións con sucesos. Exponse o concepto de probabilidade como unha constante á que se aproxima a frecuencia relativa dun suceso, defínese a regra de Laplace e enuméranse as propiedades da probabilidade. Móstrase a continuación un estudo de experimentos simples clasificados a partir dos problemas clásicos da probabilidade: problemas de moedas, de bólas, de dados e de cartas.

O tema finaliza co estudo dos experimentos compostos. Faise unha descrición de dous diagramas fundamentais para este estudo: os diagramas de árbore e os cartesianos, e as regras do produto e da suma.

Hai moitos fenómenos da vida cotiá nos que está presente a probabilidade. Por exemplo, cando un laboratorio descobre un medicamento, tras estudalo a fondo, proba en persoas voluntarias os seus beneficios, de maneira que se comprobe que non ten contraindicacións e que é eficaz para o tratamento dunha determinada enfermidade. Todos estes estudos fundaméntanse matematicamente na probabilidade.



1. Experimentos aleatorios

PENSA E CALCULA



Ordena as seguintes expresións de menos probable a máis probable: **case seguro, pouco probable, seguro, case imposible, probable, imposible, bastante probable.**



1.1. Experimentos deterministas e de azar

Un **experimento é determinista** se, ao realizarse nas mesmas condicións, obtense sempre o mesmo resultado.

Exemplo

Se se solta unha pedra desde a ventá dun segundo piso, sempre caerá cara ao chan.

Un **experimento é aleatorio ou de azar** se, ao realizarse nas mesmas condicións, non é posible predicir o resultado.

Exemplo

Se se bota un dado de seis caras, non se sabe que número vai saír.

A **probabilidade** estuda os experimentos aleatorios ou de azar. Actualmente, o cálculo de probabilidades trata de medir, con certo grao de certeza, ata que punto pode suceder un fenómeno.

Exemplo

Observando o número de accidentes de tráfico e o que lle custa a unha compañía de seguros, pódese chegar a calcular aproximadamente cantos accidentes haberá ao ano seguinte e o que lle van custar á compañía. Así, en función diso, axustarán o prezo de cada seguro.

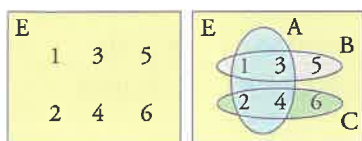
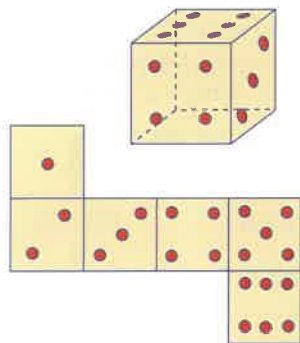


1.2. Sucesos e operacións

O **espazo da mostra** asociado a un experimento aleatorio está formado polo conxunto de todos os resultados que se poden presentar. Representáse coa letra **E**

Un **suceso elemental** é cada un dos resultados do espazo da mostra.

Un **suceso** é un conxunto de sucesos elementais. Estes representáanse con letras maiúsculas, escribindo os seus elementos entre chaves e separados por comas.



Exemplo

No experimento de botar un dado de seis caras:

Espazo da mostra: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

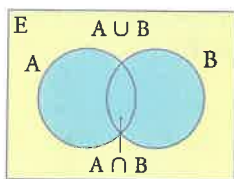
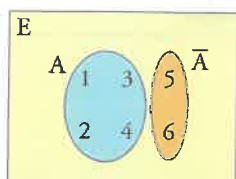
Sucesos elementais: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ e $\{6\}$

Sucesos: $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 6\}$...

O **suceso contrario** dun suceso **A** está formado por todos os sucesos elementais que non están en **A**. Representábase con \bar{A}

O **suceso seguro** é o que sempre se presenta, e é igual ao espazo da mostra **E**

O **suceso imposible** é o que nunca se presenta. Representábase co símbolo \emptyset



Exemplo

Sucesos contrarios: se $A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \bar{A} = \{5, 6\}$

Suceso seguro: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso imposible: \emptyset , por exemplo que saia un 7

Unión de dous sucesos A e B: suceso formado por todos os sucesos elementais de A e de B. Representábase: $A \cup B$

Intersección de dous sucesos A e B: suceso formado por todos os sucesos elementais comúns a A e a B, é dicir, que están nos dous ao mesmo tempo. Representábase: $A \cap B$

Dous sucesos son **compatibles** se se poden presentar ao mesmo tempo, é dicir, se $A \cap B \neq \emptyset$

Dous sucesos son **incompatibles** se non se poden presentar ao mesmo tempo, é dicir, se $A \cap B = \emptyset$

Exemplo

Dados os sucesos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{2, 4, 6\}$

Unión de dous sucesos: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Intersección de dous sucesos: $A \cap B = \{1, 3\}$

Sucesos compatibles: A e B, pois $A \cap B = \{1, 3\} \neq \emptyset$; e tamén A e C, pois $A \cap C = \{2, 4\} \neq \emptyset$

Sucesos incompatibles: B e C, pois $B \cap C = \emptyset$

Dise que un suceso **realízase, verificase o preséntase** se, ao realizar unha proba do experimento aleatorio, obtense un resultado que é un elemento do suceso.

APLICA A TEORÍA

1 Clasifica os seguintes experimentos como deterministas ou de azar:

- Botar unha moeda ao aire.
- Picar un globo.
- Frear un coche.
- Sacar unha carta dunha baralla.

2 Escribe dous experimentos deterministas.

3 Escribe dous experimentos de azar.

4 No experimento de botar unha moeda ao aire, busca:

- O suceso seguro.
- Un suceso imposible.

5 No experimento de botar ao aire un dado en forma de dodecaedro coas caras numeradas do 1 ao 12, busca:

- O espazo da mostra.
- Os sucesos elementais.
- O suceso A formado polos múltiplos de 3
- O suceso contrario \bar{A}
- O suceso B formado polos números pares.
- O suceso $A \cup B$
- O suceso $A \cap B$. Os sucesos A e B son compatibles ou incompatibles?

2. Regra de Laplace

PENSA E CALCULA



- a) Se botamos unha moeda ao aire, que resultado é máis probable, cara ou cruz?
 b) Se botamos unha chincheta ao aire, que resultado é máis probable, que quede coa punta cara arriba ou coa punta cara abaixo?



2.1. Frecuencia dun suceso

A **frecuencia absoluta dun suceso A**, ao realizarse un experimento **N** veces, é o número de veces que se verifica o suceso **A**. Representase por **n**
 A **frecuencia relativa dun suceso A**, ao realizarse un experimento **N** veces, é igual ao cociente da frecuencia absoluta **n**, dividido polo número total de veces **N** que se repetiu o experimento. Representase por **f**

$$f = \frac{n}{N}$$



Exemplo

Botamos unha moeda ao aire 50 veces e obtemos 28 caras.

A frecuencia absoluta de obter cara é $n = 28$

A frecuencia relativa de obter cara é $f = \frac{28}{50} = \frac{14}{25} = 0,56$

2.2. Lei dos grandes números

A **lei dos grandes números** di que a frecuencia relativa dun suceso tende a estabilizarse cara a unha constante a medida que se repite o experimento moitas veces.

Exemplo

Repítase moitas veces o experimento de botar ao aire unha chincheta, obsérvase se queda coa punta cara arriba e anótase o número de veces que isto suceda.



Nº de lanzamentos	N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Frecuencia absoluta	n	8	12	20	30	33	38	46	55	59	67
Frecuencia relativa	f	0,8	0,6	0,67	0,75	0,66	0,63	0,66	0,69	0,66	0,67

2.3. Probabilidade a través da frecuencia

A **probabilidade** dun suceso é a constante á que se aproxima a frecuencia relativa cando o experimento se repite moitísimas veces.

Exemplo

Ao botar ao aire unha chincheta, parece que a probabilidade de quedar a punta cara arriba estabilízase cara 0,67, que pode ser $\frac{2}{3}$, aproximadamente.

2.4. Regra de Laplace

Os **sucesos elementais** do espazo dunha mostra son **equiprobables** se teñen a mesma posibilidade de presentarse. Só nestes casos se pode aplicar a regra de Laplace.

Estratexia

Nos problemas de probabilidade, débese escribir sempre o espazo da mostra e o suceso do que se ten que calcular a probabilidade.

A **regra de Laplace** di: a probabilidade dun suceso A, do espazo dunha mostra E, formado por sucesos elementais **equiprobables**, é igual ao número de casos favorables dividido polo número de casos posibles:

$$P(A) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorables ao suceso A}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}}$$

Exemplo

Calcula a probabilidade de obter un múltiplo de 3 ao botar un dado de 6 caras.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Espazo da mostra: } E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \text{Suceso } A = \{3, 6\} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33$$

Exemplo

Se os sucesos A e B son compatibles e $P(A) = 1/3$, $P(B) = 2/3$ e $P(A \cap B) = 1/4$

Calcula: $P(A \cup B)$

Aplicamos a fórmula:

$$P(A \cup B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{4 + 8 - 3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{1} \boxed{ab/c} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{ab/c} \boxed{3}$$

$$\boxed{-} \boxed{1} \boxed{ab/c} \boxed{4} \boxed{=} \boxed{3} \boxed{14}$$

2.5. Propiedades da probabilidade

As seguintes propiedades da probabilidade dedúcense da definición de probabilidade a través da frecuencia relativa, ou ben aplicando a regra de Laplace:

- A probabilidade do suceso seguro é un: $P(E) = 1$
- A probabilidade do suceso imposible é cero: $P(\emptyset) = 0$
- A probabilidade de calquera suceso está comprendida entre cero e un: $0 \leq P(A) \leq 1$
- A probabilidade do suceso contrario é: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Se os sucesos A e B son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Se os sucesos A e B son compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

APLICA A TEORÍA

6 Lanzamos ao aire unha chincheta 25 veces. Delas, 10 veces queda coa punta cara abaixo e 15 veces cara arriba. Atopa:

- A frecuencia absoluta de que quede coa punta cara arriba.
- A frecuencia relativa de que quede coa punta cara arriba.

7 Aplicando a regra de Laplace, calcula a probabilidade de obter un número impar ao botar un dado cúbico coas caras numeradas do 1 ao 6

8 Se nun experimento $P(A) = 1/3$, calcula $P(\bar{A})$

9 Se os sucesos A e B son incompatibles con:

$$P(A) = 1/2 \text{ e } P(B) = 1/3$$

calcula $P(A \cup B)$

10 Calcula as frecuencias relativas de obter un 1 no lanzamento dun dado de quinielas, e debuxa o gráfico lineal correspondente.

Un dado de quinielas ten tres 1, dous X e un 2.

Que probabilidade de que saia un 1 deduces que ten?

N	20	40	60	80	100
n	14	25	30	35	52
f					

11 Se os sucesos A e B son compatibles con:

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/2 \text{ e } P(A \cap B) = 1/3$$

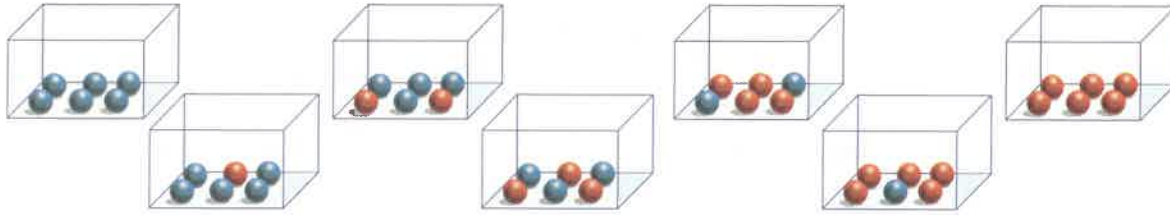
calcula $P(A \cup B)$

3. Experimentos simples

PENSA E CALCULA



Calcula a probabilidade de obter unha bóla vermella de cada unha das seguintes urnas, e asocia cada unha destas probabilidades coas seguintes expresións: **case seguro, pouco probable, seguro, case imposible, probable, imposible, bastante probable.**



3.1. Problemas de moedas

Se se bota ao aire unha moeda, pode saír cara, C, ou cruz, X, logo a probabilidade de obter cara é igual á probabilidade de obter cruz e igual a 1/2

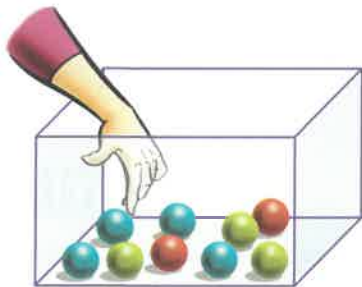
Exemplo

Bótase ao aire unha moeda. Cal é a probabilidade de obter cara?

$$\left. \begin{array}{l} E = \{C, X\} \\ A = \{C\} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

3.2. Problemas de bólas

Se se ten unha urna con bólas de distinta cor, a probabilidade de extraer unha bóla dunha cor é igual ao número de bólas que hai desa cor, dividido entre o número total de bólas.



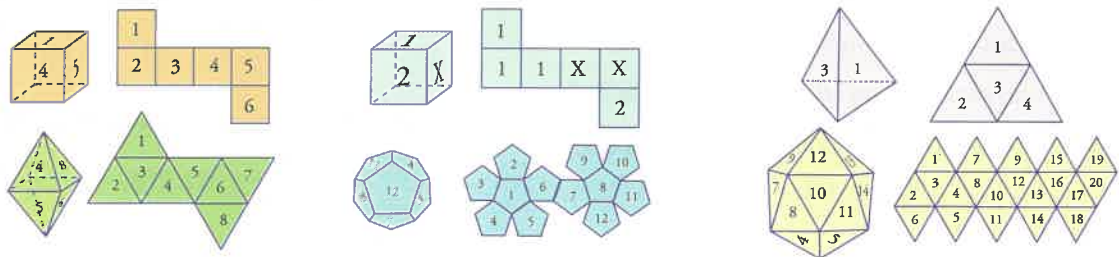
Exemplo

Nunha urna hai 2 bólas rosas, 3 verdes e 4 azuis. Cal é a probabilidade de obter unha bóla de cor vermella?

$$\left. \begin{array}{l} E = \{2R, 3V, 4A\} \\ A = \{2R\} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{2 + 3 + 4} = \frac{2}{9}$$

3.3. Problemas de dados

Se non se especifica o tipo de dado, suponse que é un de 6 caras numeradas do 1 ao 6. Pero existen moitos outros tipos de dado. Por exemplo: dados de quinielas, dados con forma de tetraedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro, etc. Se son regulares, a probabilidade dunha cara é igual a un dividido entre o número total de caras que teña o dado.



Exemplo

Bótase ao aire un dado con forma de octaedro e coas caras numeradas do 1 ao 8. Cal é a probabilidade de obter un múltiplo de 3?

$$\left. \begin{array}{l} E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ A = \{3, 6\} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$$

3.4. Problemas de cartas

Se nun problema non se especifica o tipo de baralla, suponse que é a baralla española normal, que ten 40 cartas distribuídas en catro paus: ouros, copas, espadas e bastos. Cada pau ten 10 cartas numeradas 1 (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 (sota), 11 (cabalo) e 12 (rei). Chámanse **figuras** ás sotas, aos cabalos e aos reis, que no total son 12 cartas.

Tamén hai barallas españolas de 48 cartas, que engaden os oitos e os noves; e de 52 cartas que, ademais, engaden os deces, que son distintos das sotas.

É moi típica tamén a baralla francesa, con 52 cartas distribuídas en dúas cores: vermello e negro. Pola súa parte, as vermellas divídense en dous paus: corazóns e diamantes, e as negras noutros dous paus: picas e trevos. Cada un dos paus ten os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10; e as letras J, Q e K

Exemplo

Extráese unha carta dunha baralla española de 40 cartas. Cal é a probabilidade de que sexa unha figura?

$E = \{1O, 2O, 3O, \dots, 11B, 12B\}$ En total, 40 cartas.

$A = \{10O, 11O, 12O, 10C, 11C, 12C, 10E, 11E, 12E, 10B, 11B, 12B\}$
En total, 12 cartas.

$$P(A) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\boxed{12} \boxed{\div} \boxed{40} \boxed{=} \boxed{3} \boxed{\div} \boxed{10}$$



APLICA A TEORÍA

- 12 Calcula a probabilidade de obter cruz, X, ao botar ao aire unha moeda dun euro.
- 13 Calcula a probabilidade de obter unha bóla de cor azul ao extraer unha bóla dunha urna que ten 3 bólas vermellas, 5 azuis e 2 verdes.
- 14 Calcula a probabilidade de obter un número par ao botar ao aire un dado de forma cúbica e coas caras numeradas do 1 ao 6
- 15 Calcula a probabilidade de obter un número múltiplo de 4 ao botar ao aire un dado con forma de dodecaedro e coas caras numeradas do 1 ao 12
- 16 Calcula a probabilidade de obter unha copa ao extraer unha carta dunha baralla española de 40 cartas.
- 17 Calcula a probabilidade de obter un K ao extraer unha carta dunha baralla francesa.
- 18 Nunha caixa hai 80 parafusos, dos que 5 son defectuosos, e extráese un ao azar. Calcula a probabilidade de que sexa un dos defectuosos.
- 19 O dianteiro dun equipo de fútbol mete dous goles de cada 5 balóns que tira a porta. Cal é a probabilidade de que a próxima vez que tire a porta meta gol?

4. Experimentos compostos



Unha familia ten dous fillos. Calcula mentalmente:

- a) A probabilidade de que os dous sexan homes.
- b) A probabilidade de que os dous sexan mulleres.
- c) A probabilidade de que un sexa home, e o outro, muller.

4.1. Experimento composto

Un **experimento composto** é o que está formado por varios experimentos simples.

Exemplo

- Botar dúas moedas, ou ben botar a mesma moeda dúas veces.
- Botar tres moedas, ou ben botar a mesma moeda tres veces.
- Botar dous dados, ou ben botar o mesmo dado dúas veces.
- Botar unha moeda e un dado.

4.2. Diagrama cartesiano

Un **diagrama cartesiano** é unha táboa de dobre entrada, que ten utilidade en experimentos compostos formados por dous simples. Na fila superior colócanse os sucesos elementais dun experimento simple e na columna da esquerda, os sucesos elementais do outro experimento simple.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(8) = \frac{5}{36} = 0,14$$

Exemplo

Calcula a probabilidade de que, ao botar dous dados, a suma dos números obtidos sexa 8. Que suma é a máis probable?
A suma máis probable é 7, porque é a suma que máis veces se repite.

4.3. Diagrama en árbore

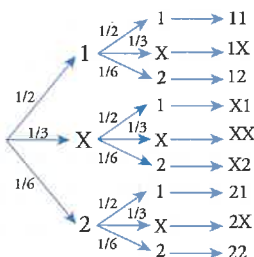
Un **diagrama en árbore** é un diagrama que se fai para resolver os problemas de experimentos compostos, e chámase así porque está formado por ramas.

Unha **rama** é cada unha das frechas do diagrama. Sempre se escribe nelas a probabilidade que corresponde a un experimento simple.

Un **camiño** é un conxunto de ramas que van desde o principio ao final.

Exemplo

Fai o árbore correspondente a botar dúas veces ao aire un dado de quinielas.



Con devolución e sen devolución

Cando se extraen dúas bólas dunha urna, pódese facer «con devolución» ou «sen devolución». Se é «con devolución», ao extraer a segunda bóla vólvense ter outra vez todas as bólas; e se é «sen devolución», ao extraer a segunda bóla faltará a que se obtivo anteriormente. Cando se extraen dúas a un tempo, é o mesmo que extraer «sen devolución»: primeiro unha e despois outra.

O mesmo sucede ao extraer dúas ou máis cartas dunha baralla.

4.4. Regra do produto

A **regra do produto ou da probabilidade composta** di que a probabilidade dun camiño nun diagrama de árbore é igual ao produto das probabilidades das ramas que o forman.

Intuitivamente observamos que, se hai varias ramas dun camiño e se teñen que verificar todas, a probabilidade diminúe, logo parece lóxico que se multipliquen as probabilidades (observa que ao multiplicar probabilidades o resultado diminúe, porque son números comprendidos entre cero e un: $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$)

Exemplo

Calcula a probabilidade de obter dúas copas ao extraer sen devolución dúas cartas dunha baralla española de 40 cartas.

$$P(CC) = P(C) \cdot P(C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52} = 0,06$$

4.5. Regra da suma

A **regra da suma ou da probabilidade total** di que a probabilidade de varios camiños nun diagrama de árbore é igual á suma das probabilidades de cada un dos camiños.

Intuitivamente observamos que, se se teñen varios camiños que se poden verificar, a probabilidade aumenta, logo parece lóxico que se sumen as probabilidades.

Exemplo

Calcula a probabilidade de obter dúas bólas de distinta cor ao extraer dúas bólas sen devolución dunha urna que contén 4 bólas rosas e 3 verdes.

$$\begin{aligned} P(\text{Distinta cor}) &= P(RV) + P(VR) = P(R) \cdot P(V) + P(V) \cdot P(R) = \\ &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} = 0,57 \end{aligned}$$

APLICA A TEORÍA

- 20 Fai un diagrama cartesiano para o experimento de botar ao aire dúas moedas, e calcula a probabilidade de obter:
- Dúas caras.
 - Dúas cruces.
 - Unha cara e unha cruz.
- 21 Fai un diagrama en árbore para o experimento de botar ao aire tres moedas, e calcula a probabilidade de obter:
- Tres caras.
 - Dúas caras e unha cruz.
 - Unha cara e dúas cruces.
 - Tres cruces.
- 22 Calcula a probabilidade de obter dúas bólas azuis ao extraer dúas bólas sen devolución dunha urna que contén 5 bólas vermellas e 5 azuis.
- 23 Calcula a probabilidade de obter dous ases ao extraer dúas cartas con devolución dunha baralla española de 40 cartas.
- 24 Calcula a probabilidade de obter un I e un X, ou un X e un I, ao botar un dado de quinielas dúas veces.
- 25 Fai o diagrama cartesiano do experimento de botar ao aire unha moeda e un dado de 6 caras, e calcula a probabilidade de obter cara e múltiplo de 3



1. Experimentos aleatorios

- 26** Clasifica os seguintes experimentos en deterministas ou de azar:
- Deixar caer un libro desde unha mesa.
 - Botar un dado ao aire.
 - Extraer unha bóla de cor dunha bolsa sen ver o interior.
 - Apagar o interruptor da luz.
- 27** Escribe dous experimentos de azar.
- 28** Escribe dous experimentos deterministas.
- 29** No experimento de botar ao aire un dado con forma de cubo, coas caras numeradas do 1 ao 6, atopa:
- O suceso seguro.
 - Un suceso imposible.
- 30** No experimento de botar ao aire un dado con forma de octaedro e coas caras numeradas do 1 ao 8, calcula:
- O espazo da mostra.
 - Os sucesos elementais.
 - O suceso A, formado polos múltiplos de 4
 - O suceso contrario \bar{A}
 - O suceso B, formado por números impares.
 - O suceso $A \cup B$
 - O suceso $A \cap B$. Os sucesos A e B son compatibles ou incompatibles?

2. Regra de Laplace

- 31** Botamos 100 veces ao aire unha moeda e obtense cara 45 veces. Calcula:
- A frecuencia absoluta de obter cruz.
 - A frecuencia relativa de obter cruz.
- 32** No lanzamento dun dado cúbico coas caras numeradas do 1 ao 6, calcula as frecuencias relativas de obter un número impar, e debuxa o gráfico lineal correspondente.

N	20	40	60	80	100
n	13	25	28	35	48
f					

Que probabilidade de que saia un número impar deduces que ten?

- 33** Aplicando a regra de Laplace, calcula a probabilidade de obter un número múltiplo de 3 ao botar un dado con forma de dodecaedro, coas caras numeradas do 1 ao 12
- 34** Se nun experimento $P(A) = 2/5$, calcula $P(\bar{A})$
- 35** Se os sucesos A e B son incompatibles con: $P(\bar{A}) = 1/5$ e $P(B) = 1/6$, calcula: $P(A \cup B)$
- 36** Se os sucesos A e B son compatibles con: $P(A) = 2/5$, $P(B) = 3/4$ e $P(A \cap B) = 2/9$, calcula $P(A \cup B)$

3. Experimentos simples

- 37** Calcula a probabilidade de obter cara, C, ao botar ao aire unha moeda de 2 €
- 38** Calcula a probabilidade de obter unha bóla de cor vermella ao extraer unha bóla dunha urna que ten 4 bólas vermellas, 7 azuis e 5 verdes.
- 39** Calcula a probabilidade de obter un número múltiplo de 5 ao botar ao aire un dado con forma de icosaedro, coas caras numeradas do 1 ao 20
- 40** Calcula a probabilidade de obter un as ao extraer unha carta dunha baralla española de 40 cartas.
- 41** Calcula a probabilidade de obter unha carta vermella ao extraer unha carta dunha baralla francesa.
- 42** No equipo de música dun coche metemos 10 CD: catro son de rock; tres, de música clásica; e tres, de música folk. Se eliximos un ao azar, calcula a probabilidade de que sexa de rock.

4. Experimentos compostos

- 43** Calcula a probabilidade de obter dous números que sumen 5 ao botar ao aire dous dados.
- 44** Calcula a probabilidade de obter dous bastos ao extraer con devolución dúas cartas dunha baralla española de 40 cartas.
- 45** Calcula a probabilidade de obter un 1 e un 2, ou un 2 e un 1, ao botar dúas veces un dado de quinielas.
- 46** Calcula a probabilidade de obter dúas bólas de

Exercicios e problemas

distinta cor ao extraer dúas bólas con devolución dunha urna que contén 3 bólas vermellas e 5 azuis.

- 47 Calcula a probabilidade de obter cara e un número par ao botar ao aire unha moeda e un dado.



Para ampliar

- 48 No experimento de botar unha moeda ao aire, Calcula:

- a) O espazo da mostra.
- b) Os sucesos elementais.
- c) Se $A = \{C\}$, o suceso contrario \bar{A}
- d) Se $B = \{X\}$, o suceso $A \cup B$
- e) O suceso $A \cap B$. Os sucesos A e B son compatibles ou incompatibles?

- 49 Se $P(Z) = 1$, cal é o suceso Z ?

- 50 Se $P(Y) = 0$, cal é o suceso Y ?

- 51 Se $P(A) = 0,5$, cal é máis probable, A ou \bar{A} ?

- 52 Se $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cup B) = 5/6$, como son os sucesos A e B , compatibles ou incompatibles?

- 53 Aplicando a regra de Laplace, calcula a probabilidade de obter unha bóla de cor azul ao extraer unha bóla dunha urna que contén 5 bólas azuis. Que podes dicir do suceso «extraer bóla azul»?

- 54 Ao botar ao aire unha moeda de 1 €, que é máis probable, que saia cara ou que saia cruz?

- 55 Nun dado de quinielas, cal dos signos 1, X, 2 é o máis probable?

- 56 Calcula a probabilidade de obter unha bóla de cor vermella ou verde ao extraer unha bóla dunha urna que contén 5 bólas vermellas, 6 azuis e 7 verdes.

- 57 Calcula a probabilidade de obter un número múltiplo de 2 e de 3 ao botar ao aire un dado con forma de icosaedro, coas caras numeradas do 1 ao 20

- 58 Calcula a probabilidade de obter un as ou un rei ao extraer unha carta dunha baralla española de 52 cartas.

- 59 Calcula a probabilidade de obter unha carta de corazóns ao extraer unha carta dunha baralla francesa.

- 60 Calcula a probabilidade de que, nunha familia con tres fillos, sexan os tres do mesmo sexo.

Con calculadora

- 61 Se A e B son sucesos incompatibles e $P(A) = 2/7$, $P(B) = 7/15$, calcula $P(A \cup B)$

- 62 Se $P(A) = 2/9$, $P(B) = 3/5$ e $P(A \cap B) = 1/8$, calcula $P(A \cup B)$



Problemas

- 63 No experimento de botar ao aire un dado con forma de cubo, coas caras numeradas do 1 ao 6, atopa:

- a) O espazo da mostra.
- b) Os sucesos elementais.
- c) O suceso A formado polos números pares.

- d) O suceso contrario \bar{A}
- e) O suceso B , formado polos números impares.
- f) O suceso $A \cup B$
- g) O suceso $A \cap B$. Os sucesos A e B son compatibles ou incompatibles?

Exercicios e problemas

- 64** Aplicando a regra de Laplace, calcula a probabilidade de obter unha bóla de cor vermella ao extraer unha bóla dunha urna que contén 5 bólas verdes e 6 vermellas.
- 65** Aplicando a regra de Laplace, calcula a probabilidade de obter un naipe de ouros ao extraer unha carta dunha baralla española de 40 cartas.
- 66** Se $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,7$ e $P(A \cap B) = 0,4$, calcula $P(A \cup B)$
- 67** Calcula a probabilidade de obter un número primo ao botar ao aire un dado de forma cúbica coas caras numeradas do 1 ao 6
- 68** Calcula a probabilidade de obter un número múltiplo de 3 e 4 ao botar ao aire un dado con forma de icosaedro coas caras numeradas do 1 ao 20
- 69** Calcula a probabilidade de obter unha figura ao extraer unha carta dunha baralla española de 40 cartas.
- 70** Calcula a probabilidade de obter un as ou un **K** ao extraer unha carta dunha baralla francesa.
- 71** Catro nenos e cinco nenas forman un círculo. No centro está Lola, cos ollos tapados. Calcula a probabilidade de que colla a un neno.
- 72** Un dado trucado ten as seguintes probabilidades $P(1) = P(3) = P(5) = 0,1$; $P(6) = 0,3$ e $P(2) = P(4) = 0,2$. Calcula a probabilidade de obter número par.
- 73** Sonia ten nun caixón totalmente desordenado un par de calcetíns de cor vermella, outro par de cor verde e outro par de cor azul. Un día vístese ás escuras. Calcula a probabilidade de que poña os dous calcetíns da mesma cor.
- 74** Calcula a probabilidade de obter dúas figuras ao extraer sen devolución dúas cartas dunha baralla española de 48 cartas.
- 75** Bótanse dous dados ao aire. Calcula a probabilidade de que o produto dos dous números obtidos sexa 12
- 76** Calcula a probabilidade de obter dúas cartas vermellas ao extraer dunha vez dúas cartas dunha baralla francesa.
- 77** Calcula a probabilidade de obter tres ouros ao extraer con devolución tres cartas dunha baralla española de 40 cartas.

Para profundar

- 78** Se A e B son sucesos incompatibles, pode ser $P(A) = 1/2$ e $P(B) = 3/4$?
- 79** Aplicando a regra de Laplace, calcula a probabilidade de obter un cinco ao extraer unha carta dunha baralla española de 40 cartas.
- 80** Se A e B son sucesos compatibles, pode ser $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,4$?
- 81** Aplicando a regra de Laplace, calcula a probabilidade de obter unha bóla de cor negra ao extraer unha bóla dunha urna que contén 2 bólas vermellas e 3 azuis. (O enunciado deste problema é correcto).
- 82** Calcula a probabilidade de obter unha bóla de cor vermella ou azul ao extraer unha bóla dunha urna que ten 4 bólas vermellas, 5 azuis e 3 verdes.
- 83** Calcula a probabilidade de obter un número par e múltiplo de 3 ao botar ao aire un dado con forma de dodecaedro e coas caras numeradas do 1 ao 12
- 84** Calcula a probabilidade de non obter unha figura ao extraer unha carta dunha baralla española de 48 cartas.
- 85** Un dado trucado ten as seguintes probabilidades $P(1) = x$, $P(2) = 2x$, $P(3) = 3x$, $P(4) = 4x$, $P(5) = 5x$, $P(6) = 6x$. Calcula a probabilidade de obter número impar.
- 86** Calcula a probabilidade de obter dous ases ao extraer con devolución dúas cartas dunha baralla francesa.
- 87** Calcula a probabilidade de obter tres ases ao extraer dunha vez tres cartas dunha baralla española de 48 cartas.
- 88** Nunha urna temos 4 bólas marcadas co signo + e 6 bólas marcadas co signo -. Extraemos dúas bólas con devolución. Calcula a probabilidade de que as dúas bólas teñan o mesmo signo.
- 89** Unha fábrica ten tres máquinas, A, B e C. A máquina A fai 200 pezas cada hora, a B fai 300 e a C fai 500. Mediante os controis de calidade, sábese que a máquina A fai un 5% de pezas defectuosas, a B un 3% e a C un 2%. Calcula o tanto por cento de pezas defectuosas que produce a fábrica.

Aplica as túas competencias



A probabilidade e a medicina

Cando un laboratorio descobre un medicamento, despois dun estudo a fondo, proba en persoas voluntarias os seus beneficios, de maneira que se comprobe que non ten contraindicacións e que é eficaz para o tratamento dunha determinada doenza.

- 90** Un laboratorio farmacéutico crea dous medicamentos, A e B. O medicamento A ensáíase en 50 pacientes, e melloran 35 deles; o medicamento B ensáíase en 75 pacientes, e deles melloran 45. Cal dos dous medicamentos é máis eficaz?
- 91** Nun grupo de alto risco, composto por 60 persoas, próbase unha vacina A contra a gripe; contraen a doenza 15 delas. Noutro grupo de alto risco, formado por 50 persoas, próbase outra vacina B contra a gripe; contraen a doenza 12 delas. Cal das dúas vacinas é máis eficaz?
- 92** Un laboratorio farmacéutico crea dous medicamentos (A e B) contra a SIDA. O medicamento A ensáíase en 80 pacientes, e melloran 25 deles; o medicamento B ensáíase en 60 pacientes, e deles melloran 15. Cal dos dous medicamentos é máis eficaz?

Comproba o que sabes



- 1** Escribe a regra de Laplace e pon un exemplo.
- 2** Clasifica os seguintes experimentos como deterministas ou de azar:
- Sacar unha bóla dunha urna con bólas de distintas cores.
 - Poñer un xeado ao sol.
 - Saír de paseo sen paraugas mentres está chovendo.
 - Botar ao aire un dado de quinielas.
- 3** Botamos 80 veces un dado defectuoso e sae 24 veces o número 5. Calcula:
- A frecuencia absoluta de obter 5
 - A frecuencia relativa de obter 5
- 4** Se os sucesos A e B son compatibles e $P(A) = 2/3$, $P(B) = 2/5$, $P(A \cap B) = 1/4$, calcula $P(A \cup B)$
- 5** Calcula a probabilidade de obter un múltiplo de 3 ao botar ao aire un dado de oito caras numeradas do 1 ao 8
- 6** Calcula a probabilidade de que, ao botar ao aire dous dados con forma de tetraedro e coas caras numeradas do 1 ao 4, os números obtidos sumen 6
- 7** Calcula a probabilidade de obter dúas bólas da mesma cor ao extraer sen devolución dúas bólas dunha urna que contén 5 bólas rosas e 4 verdes.
- 8** Calcula a probabilidade de obter dúas figuras ao extraer dúas cartas con devolución dunha baralla española de 40 cartas.



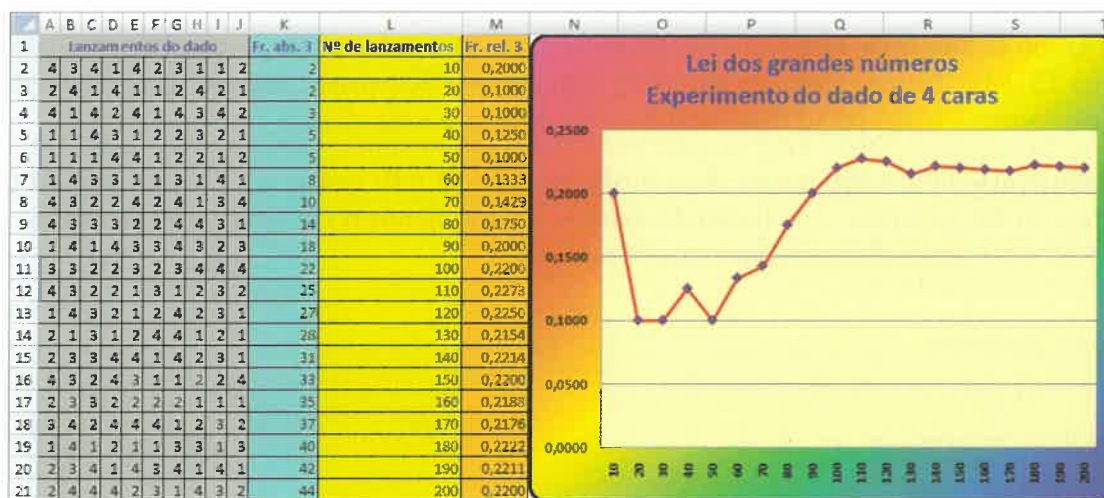
14. PROBABILIDADE

Paso a paso

93 Investiga sobre a **Lei dos grandes números**: simula o lanzamento dun dado con forma de tetraedro e coas caras numeradas do 1 ao 4. Fai distintos lanzamentos, conta o número de

lanzamentos e as frecuencias absolutas de obter unha das caras, por exemplo o 3. Calcula as frecuencias relativas e represéntaa nun gráfico de liñas.

Solución:




Xeración da táboa de números

- Abre **Microsoft Excel** e, na **Folla1**, selecciona as columnas do A ao J facendo *clik* na cabeceira da columna A e *arrastrando* o rato deica o J
- Coas columnas seleccionadas, no menú **Contextual** elixe **Ancho de columna...** escribe 2
- Fai *clik* na cela **A2** e escribe a fórmula = **ALEATORIAMENTE(1,4)**
- Arrastra* o **Controlador de recheo**, que é o cadradiño negro que aparece na parte inferior dereita da cela, deica a cela **J2**
- Na cela **K2** introduce a fórmula =**CONTAR.SE (\$A\$2:J2;3)**
- Na cela **L2** introduce a fórmula =**CONTAR(\$A\$2:J2)**
- Na cela **M2** introduce a fórmula =**K2/L2**
- Tendo seleccionada a cela **M2**, selecciona na barra de menús **Inicio/Número**. Na ventá **Formato celas**, na ficha **Número**, elixe **Número**, e en **Posición de decimais** escribe 4
- Selecciona o rango **A2:M2** e *arrastra* o **Controlador de recheo** deica a cela **M21**
- Escribe os textos da primeira fila e mellora a presentación poñéndolles cores ao texto e ao fondo.

Xeración do gráfico

- Na barra de menús elixe **Inserir**
- Selecciona o control de menús **/Liña con marcadores**
- Elixe **Seleccionar datos**, no cadro de texto **Rango de datos do gráfico** **selecciona co rato** o rango **M2:M21**; No marco **Etiquetas do eixe horizontal** fai *clik* no botón **Editar**, no cadro de texto **Rango de rótulos do eixe** **selecciona co rato** o rango **L2:L21**

- d) Selecciona **Deseño**/ **Deseño 1**, ponlle o título.
- e) Mellora a presentación do gráfico a través do menú **Formato**, ou do menú **Contextual** dos seus obxectos.
- f) Garda o libro na túa carpeta co nome **14**
- g) Logo preme varias veces a tecla [F9] e verás que, automaticamente, rexenéranse as táboas.

Así funciona

Xerar números aleatorios

A función **ALEATORIAMENTE()** xera un número aleatorio maior ou igual que 0 e menor que 1
ALEATORIAMENTE(1,4) xera un número aleatorio maior ou igual que 0 e menor que 4
ENTEIRO(ALEATORIAMENTE(1,4)) calcula a parte enteira e xera os números 0, 1, 2 e 3
1 + ENTEIRO(ALEATORIAMENTE(1,4)) xera os números 1, 2, 3 e 4

Contar números

CONTAR(rango) conta os números que hai no rango.

CONTAR.SE(rango;3) conta no rango o número de veces que aparece o 3

Copiar datos e fórmulas

A partir da **Folla1** pódense obter as follas seguintes para realizar os exercicios 94, 95, 96 e 97

- a) Elimina as follas: **Folla2** e **Folla3**
- b) Para copiar a **Folla1** elixe na barra de menús **Inicio/Formato/Mover ou copiar folla...** Na ventá **Mover ou copiar** elixe (**mover ao final**) e activa a cuadrícula de verificación **Crear unha copia**
- c) Cambia o nome da folla e ponlle **Folla2**
- d) Modifica esta folla para que se adapte aos datos do primeiro problema do **Practica**
- e) Para cada un dos exercicios seguintes procédese da mesma maneira.

Practica

- 94** Na **Folla 2** do mesmo libro, investiga sobre a **Lei dos grandes números**: simula o lanzamento dun dado de forma cúbica, coas caras numeradas do 1 ao 6. Realiza distintos lanzamentos e conta o número de lanzamentos e as frecuencias absolutas de obter unha das caras, por exemplo, o 5. Calcula as frecuencias relativas e represéntaas nun gráfico de liñas.
- 95** Na **Folla 3** do mesmo libro, fai outro estudo análogo ao anterior para un dado de forma octaédrica, coas caras numeradas do 1 ao 8, e relativo a obter, por exemplo, o 6
- 96** Na **Folla 4** do mesmo libro, fai outro estudo análogo ao anterior para un dado con forma de dodecaedro, coas caras numeradas do 1 ao 12, e relativo a obter, por exemplo, a cara 9
- 97** Na **Folla 5** do mesmo libro, fai outro estudo análogo ao anterior para un dado con forma de icosaedro, coas caras numeradas do 1 ao 20, e relativo a obter, por exemplo, o 15
- 98** Ao final, garda o libro **Probabilidade** completo con todas as follas de cálculo.
- 99** **Internet**. Abre a web: www.xerais.e e elixe **Matemáticas, curso e tema**.



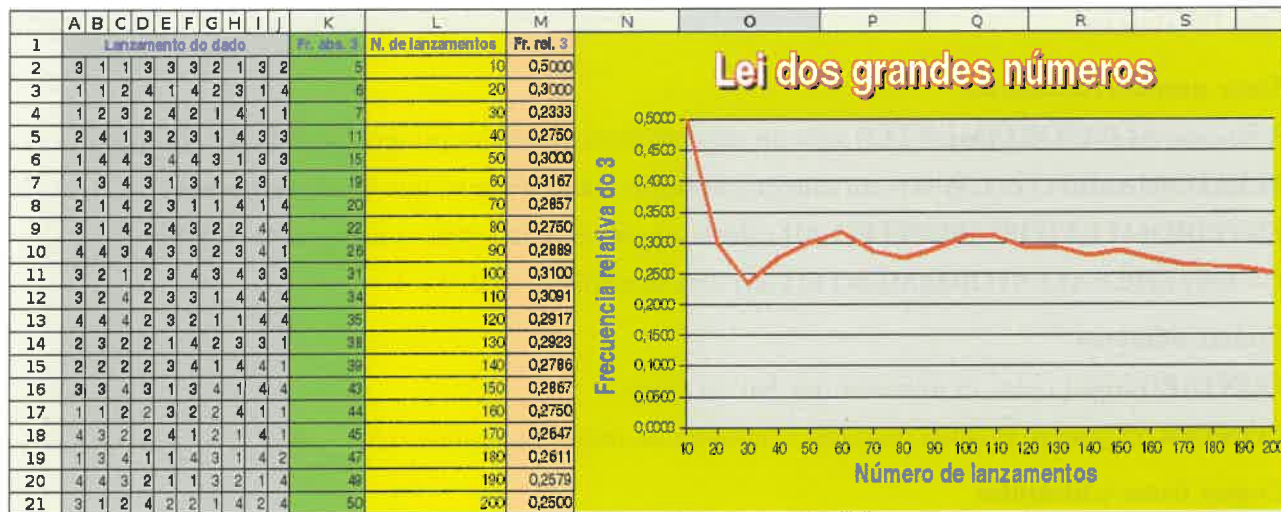
14. PROBABILIDADE

Paso a paso

93 Investiga sobre a **Lei dos grandes números**: simula o lanzamento dun dado con forma de tetraedro e coas caras numeradas do 1 ao 4. Fai distintos lanzamentos, conta o número de

lanzamentos e as frecuencias absolutas de obter unha das caras, por exemplo o 3. Calcula as frecuencias relativas e represéntaas nun gráfico de liñas.

Solución:




Xeración da táboa de números

- Abre **Calc** e, na **Folla1**, selecciona as columnas do **A** ao **J** facendo *clik* na cabeceira da columna **A** e *arrastrando* o rato deica o **J**
- Coas columnas seleccionadas, elixe na barra de menús **Formato/Columna/Ancho...** e en **Ancho** de columna escribe **0,50 cm**
- Fai *clik* na cela **A2** e escribe a fórmula: = **ALEATORIAMENTE(1,4)**
- Arrastra* o **Controlador de recheo**, que é o cadradiño negro que aparece na parte inferior dereita da cela, deica a cela **J2**
- Na cela **K2** introduce a fórmula = **CONTAR.SE(\$A\$2:J2;3)**
- Na cela **L2** introduce a fórmula = **CONTAR(\$A\$2:J2)**
- Na cela **M2** introduce a fórmula = **K2/L2**
- Tendo seleccionada a cela **M2**, selecciona na barra de menús **Formato/Celas...** A continuación, na ventá **Formato de celas**, na ficha **Números**, elixe **Número**, e en **Opcións/Decimais** escribe **4**
- Marca o rango **A2:M2** e *arrastra* o **Controlador de recheo** deica a cela **M21**
- Escribe os textos da primeira fila e mellora a presentación poñéndolle cores ao texto e ao fondo.

Xeración do gráfico

- Elixo **Inserir diagrama** e fai *clik* en calquera lugar da folla.
- No cadro de texto **Intervalo** selecciona co rato o rango **L2:M21**, desactiva a cuadrícula de verificación **Primeira fila como etiqueta**. Logo, fai *clik* no botón **Seguinte**
- Selecciona o gráfico **Liñas** e fai *clik* no botón **Seguinte**
- En **Selecione unha variante** elixe **Normal** e fai *clik* no botón **Seguinte**

- e) En **Título de diagrama** escribe **Lei dos grandes números**. Desactiva a cuadrícula de verificación **Lenda**. Activa a cuadrícula de verificación **Eixe X**, escribe **Número de lanzamentos**. A continuación, activa a cuadrícula de verificación **Eixe Y**, escribe **Frecuencias relativas do 3**. Fai clic no botón **Crear**
- f) Mellora a presentación do gráfico a través do menú **Contextual** dos seus obxectos para que quede como o da parte superior ou mellor.
- g) Cando termines, elixe  **Gardar** e gárdao co nome **14**
- h) Preme varias veces **[Maiúsculas][Ctrl][F9]** e verás como automaticamente se rexeneran as táboas e o gráfico. Observa que case sempre tende cara a **0,25**

Así funciona

■ Controlador de recheo

É o cadradiño negro que aparece na parte inferior dereita da cela ou rango seleccionado. Se dentro da cela ou rango seleccionado hai unha fórmula e se arrastra o ■ **Controlador de recheo**, faise unha copia relativa da fórmula seleccionada.

Xerar números aleatorios

A función **ALEATORIAMENTE()** dá un número aleatorio maior ou igual que 0 e menor que 1

ALEATORIAMENTE(1,4) dá un número aleatorio maior ou igual que 0 e menor que 4

ENTEIRO(ALEATORIAMENTE(1,4)) calcula a parte enteira, dará os números: 0, 1, 2 e 3

1 + ENTEIRO(ALEATORIAMENTE(1,4)) dará os números 1, 2, 3 e 4

Contar números

CONTAR(rango) conta os números que hai no rango.

CONTAR.SE(rango;3) conta no rango o número de veces que aparece o 3

Copiar datos e fórmulas

A partir da **Folla1** pódense crear as follas seguintes copiando dunha vez os datos e o gráfico.

Para copiar os datos e o gráfico da **Folla1** márcanse, escóllese copiar, vaise á **Folla2** e escóllese pegar. A continuación só hai que facer modificacións para que se axuste ao problema 2. Procédese de igual maneira co gráfico.

Practica

94 Na **Folla 2** do mesmo libro, investiga sobre a **Lei dos grandes números**: simula o lanzamento dun dado de forma cúbica, coas caras numeradas do 1 ao 6. Realiza distintos lanzamentos e conta o número de lanzamentos e as frecuencias absolutas de obter unha das caras, por exemplo, o 5. Calcula as frecuencias relativas e represéntaas nun gráfico de liñas.

95 Na **Folla 3** do mesmo libro, fai outro estudo análogo ao anterior para un dado de forma octaédrica, coas caras numeradas do 1 ao 8, e relativo a obter, por exemplo, o 6

96 Na **Folla 4** do mesmo libro, fai outro estudo análogo ao anterior para un dado con forma de dodecaedro, coas caras numeradas do 1 ao 12, e relativo a obter, por exemplo, a cara 9

97 Na **Folla 4** do mesmo libro, fai outro estudo análogo ao anterior para un dado con forma de icosaedro, coas caras numeradas do 1 ao 20, e relativo a obter, por exemplo, o 15

98 Ao final, garda o libro **Probabilidade** completo con todas as follas de cálculo.

99 **Internet**. Abre a web: www.xerais.es e elixe **Matemáticas, curso e tema**.