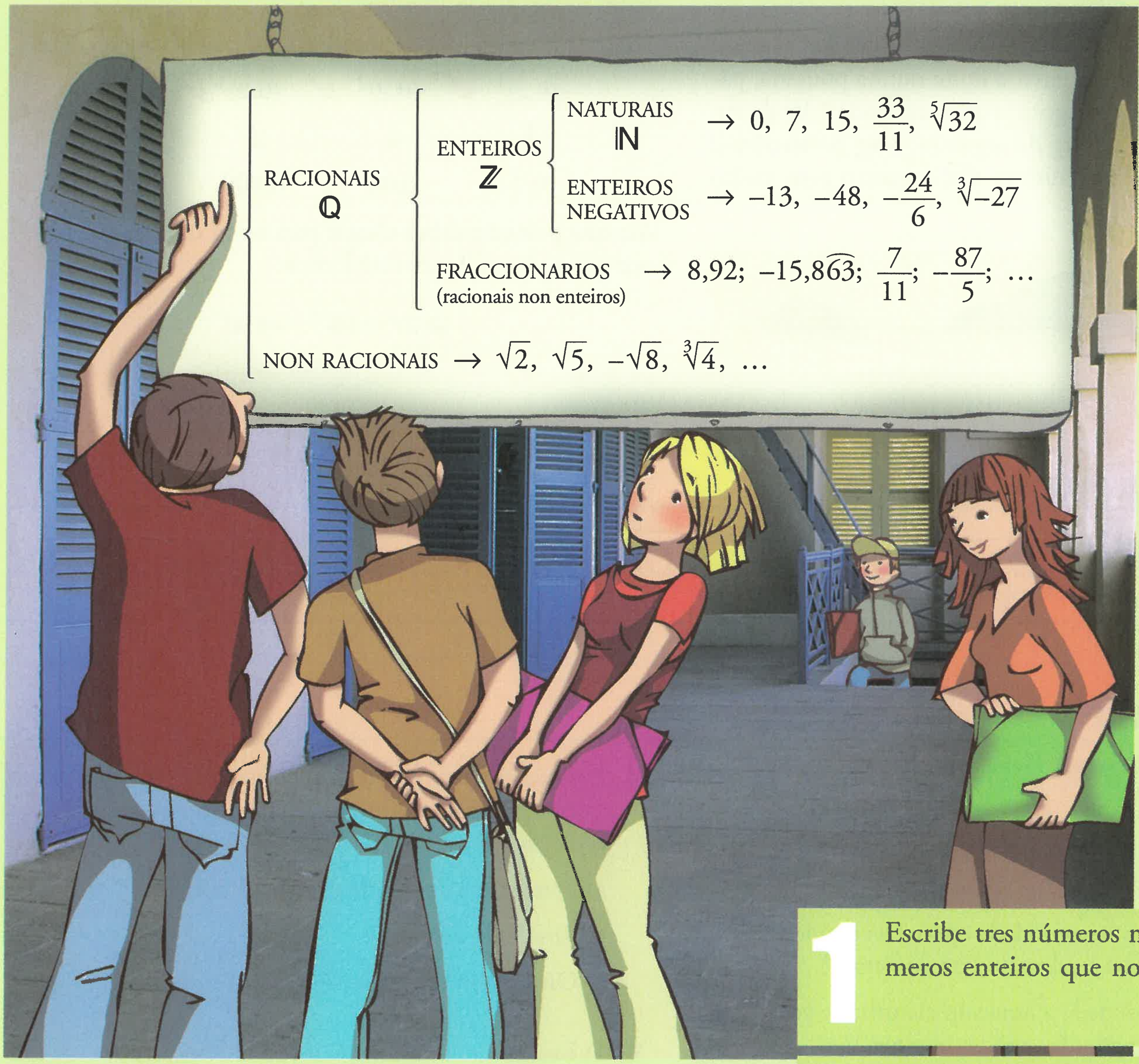
3 Números reais



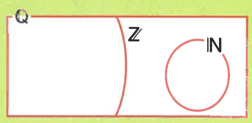
Coñecemos e manexamos varios conxuntos numéricos. Todos eles están ben estruturados:

- Os naturais, $\mathbb{N}$.
- Se a estes lles engadimos os seus opostos (negativos), obtemos o conxunto dos enteiros, $\mathbb{Z}$.
- Se aos enteiros lles engadimos os fraccionarios, obtemos o conxunto dos racionais, $\mathbb{Q}$.
- Se aos racionais lles engadimos os non racionais, conseguiremos un conxunto ben estruturado?

1 Escribe tres números naturais e tres números enteiros que non sexan naturais.

2 Escribe tres números racionais que non sexan enteiros e tres números que non sexan racionais.

3 Sitúa os números anteriores nun esquema coma este:



1. Solucións a estes problemas.

1 Números irracionais

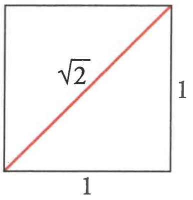
Números racionais son os que se poden poñer como cociente de dous números enteiros. A súa expresión decimal é exacta ou periódica.

2. Se queres ler algunhas **curiosidades sobre o número π e outros irracionais,** acude ao teu CD.

Números irracionais son os non racionais, é dicir, os que non poden obterse como cociente de dous números enteiros. A súa expresión decimal é infinita non periódica. Por exemplo, $\pi = 3{,}14159265359\ldots$

Hai infinitos números irracionais, algúns dos cales son especialmente interesantes. Vexamos algúns.

A diagonal do cadrado: o número $\sqrt{2}$



O teorema de Pitágoras proporciónanos o valor da diagonal dun cadrado de lado 1:

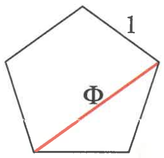
$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{é un número irracional}$$

Outros irracionais expresados mediante radicais

Os números $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \ldots, \sqrt[3]{4}, \sqrt[5]{10}, \ldots$ son irracionais.

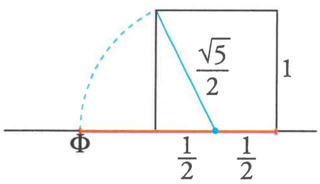
En xeral, se p non é unha potencia n-ésima, entón $\sqrt[n]{p}$ é irracional.

O número de ouro: $\Phi = (\sqrt{5} + 1) : 2$



SÍMBOLO DOS PITAGÓRICOS

A diagonal dun pentágono de lado 1 é o número $(\sqrt{5} + 1) : 2$. Historicamente é o primeiro número do que se tivo conciencia da súa irracionalidade. No século V a.C., os gregos pitagóricos descubriron con sorpresa (e case con espanto) que a diagonal do pentágono e o seu lado non gardaban unha proporción exacta. Ata entón críase que todo o universo se rexía polos números naturais e as proporcións entre eles (fraccións). Pero ao descubrir que non era así, pareceulles que o caos se asomaba ao seu mundo. Por iso lle chamaron **irracional** (contraria á razón) a esta relación entre a diagonal e o lado do pentágono.

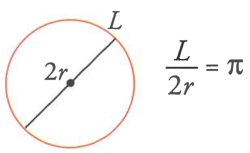


Construcción do número Φ.

Posteriormente, os propios gregos consideraron que a relación $\Phi : 1$ resultaba especialmente harmoniosa, polo que lle chamaron **proporción áurea,** e ao número Φ, **número áureo.**

O nome, Φ (**fi,** letra grega correspondente ao F), é a inicial de **Fidias,** escultor grego que utilizou asiduamente esta proporción.

O número π



Como sabes, π é a relación entre a lonxitude dunha circunferencia calquera e o seu diámetro. Este número coñécelo e utilízalo desde hai moitos cursos. Fixeches uso das seguintes aproximacións súas: 3,14 ou 3,1416. O seu verdadeiro valor ten infinitas cifras decimais non periódicas.

π é a letra grega correspondente ao P. Por que este nome? A palabra grega *periferia* significa "circunferencia" (a periferia do círculo).

2 Os números reais

Importante

O conxunto formado polos números racionais e os irracionais chámase **conxunto de números reais** e desígnase por $\mathbb{R}$.

O conxunto formado polos números racionais e os irracionais chámase **conxun to de números reais** e desígnase por $\mathbb{R}$. De modo que a táboa coa que com zabamos a unidade pode ampliarse e completarse do seguinte modo:

- REAIS $\mathbb{R}$
  - RACIONAIS $\mathbb{Q}$
    - ENTEIROS $\mathbb{Z}$
      - NATURAIS $\mathbb{N}$ → $0,\ 4,\ \frac{24}{6},\ \sqrt{121}$
      - ENTEIROS NEGATIVOS → $-11,\ -\frac{27}{3},\ \sqrt[3]{-}$
    - FRACCIONARIOS → $5{,}84;\ \frac{1}{2};\ 5{,}8\widehat{3};\ -\frac{3}{10}$
  - IRRACIONAIS → $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \Phi,\ \pi,\ -\sqrt{5}+2,\ \frac{2+\sqrt{3}}{5}$

Cos números reais podemos realizar as mesmas operacións que se fan cos racio nais: suma, resta, multiplicación e división (agás polo cero) e manténense as mes mas propiedades.

Tamén podemos extraer raíces de calquera índice (agás raíces de índice par de nú meros negativos) e o resultado segue sendo un número real. Iso non ocorría co números racionais.

Ten en conta

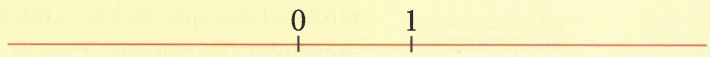
Entre cada dous números racionais existen outros infinitos números racionais.

A recta real

Os números racionais, como sabemos, sitúanse na recta de forma *densa*, é dici de modo que en cada tramo, por pequeno que sexa, hai infinitos. Porén, e aínd que pareza raro, hai infinitos ocos entre eles. Estes ocos son ocupados polos nú meros irracionais. Entre todos enchen a recta.

Non o esquezas

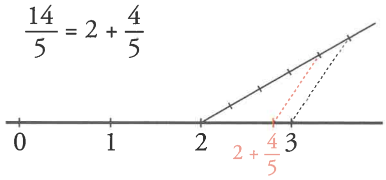
A recta real é **completa,** é dicir, **a cada punto da recta correspóndelle un número real** e a cada número real un punto da recta.

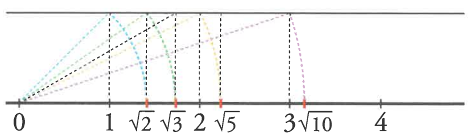


Se nunha recta situamos unha orixe (o cero, 0) e marcamos a lonxitude unidade, a cada punto correspóndelle un número racional ou un número irracional. É dicir, *a cada punto da recta correspóndelle un número real.* Por iso, á recta numérica chamámoslle **recta real.**

Observa como se representan sobre a recta algúns números racionais e irracio nais:

$\frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5}$





Actividades

1 Representa $\frac{5}{7}$, $-\frac{5}{7}$ e $\frac{26}{7}$ na recta real.

2 Xustifica a construción de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{10}$.
Representa $\sqrt{11}$ e $\sqrt{17}$ $(17 = 4^2 + 1^2)$.

Representación de números sobre a recta real

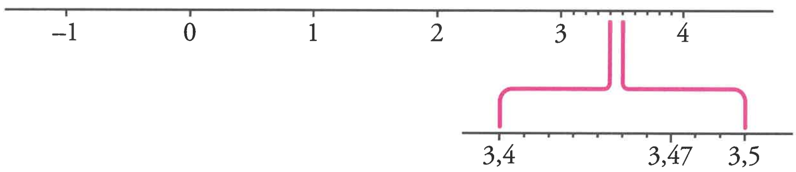
Como vimos en páxinas anteriores:

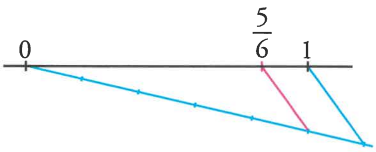
— Os números racionais pódense poñer mediante unha expresión decimal finita ou periódica.

— Os números irracionais exprésanse mediante infinitas cifras decimais non periódicas.

Todo número real pode situarse sobre a recta real, dependendo de como sexa o número:

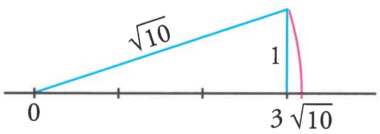
- **Enteiro ou decimal exacto.** Por exemplo, 3,47:



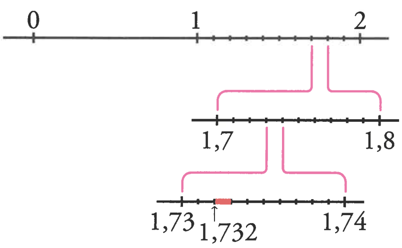


- **Decimal periódico.** Pode expresarse en forma de **fracción** e, deste modo, sitúase facilmente.

  Por exemplo: $0,83333\ldots = 0,8\widehat{3} = \frac{5}{6}$



- Se un número irracional é **radical cuadrático** ($\sqrt{2}$, $\sqrt{10}\ldots$) ou unha combinación deles, pódese representar construíndo triángulos rectángulos, como vimos na páxina anterior.



- Se un **número irracional** vén dado pola súa **expresión** decimal, podemos representalo de forma aproximada mediante o proceso que describimos á esquerda para $\sqrt{3} = 1,732\ldots$

  O número $\sqrt{3}$ está situado no segmento vermello, que é unha centésima parte do intervalo 1,7-1,8. Na recta inicial sería máis fino que a punta dun alfinete. Pero aínda poderiamos seguir afinando máis, tanto como queiramos.

Os números reais poden ser representados na recta real, segundo os casos, de forma exacta, ou ben con tanta aproximación como queiramos.

Actividades

3 Representa na recta real os números:

a) -2; 3,75; $\sqrt{5}$; 0,666… de forma exacta.

b) Φ de forma exacta $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e aproximada (1,618…).

3 Intervalos e semirrectas

Para designar algúns tramos da recta real, existe unha nomenclatura que debes coñecer.

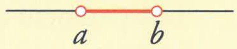
Intervalo aberto

$(a, b) = \{x \,/\, a < x < b\}$

Intervalo aberto

O **intervalo aberto** (a, b) é o conxunto de todos os números comprendidos entre a e b, sen incluír nin a nin b: $\{x \,/\, a < x < b\}$.

Represéntase así:



Por exemplo, o intervalo $(-2, 1)$ é o conxunto de todos os números comprendidos entre -2 e 1, sen incluír nin -2 nin 1: $\{x \,/\, -2 < x < 1\}$.

A súa representación é esta:

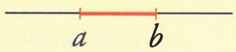
Intervalo pechado

$[a, b] = \{x \,/\, a \leq x \leq b\}$

Intervalo pechado

O **intervalo pechado** $[a, b]$ é o conxunto de todos os números comprendidos entre a e b, ambos os dous incluídos: $\{x \,/\, a \leq x \leq b\}$.

Represéntase así:



Por exemplo, o intervalo $[-2, 1]$ é o conxunto de todos os números comprendidos entre -2 e 1, incluíndo o -2 e o 1: $\{x \,/\, -2 \leq x \leq 1\}$.

A súa representación é esta:

Intervalo semiaberto

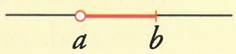
$(a, b] = \{x \,/\, a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \,/\, a \leq x < b\}$

Intervalo semiaberto

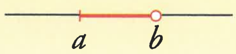
- O **intervalo** $(a, b]$ é o conxunto de todos os números comprendidos entre a e b, incluíndo b pero non a: $\{x \,/\, a < x \leq b\}$.

  Represéntase así:



- O **intervalo** $[a, b)$ é o conxunto de todos os números comprendidos entre a e b, incluíndo a pero non b: $\{x \,/\, a \leq x < b\}$.

  Represéntase así:



Por exemplo, o intervalo $(3, 4]$ é o conxunto de todos os números comprendidos entre 3 e 4, incluíndo o 4 pero non o 3: $\{x \,/\, 3 < x \leq 4\}$.

A súa representación é esta:

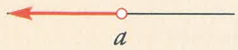
O intervalo $[3, 4)$ é o conxunto de todos os números comprendidos entre 3 e 4 incluíndo o 3 pero non o 4: $\{x \,/\, 3 \leq x < 4\}$.

A súa representación é esta:

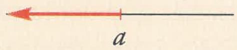
Semirrectas e recta real

Semirrectas

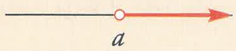
$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$



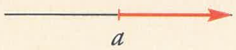
$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$



$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

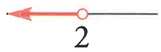


$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$

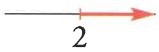


$(-\infty, a)$ son os números menores que a: $\{x \mid x < a\}$.
$(-\infty, a]$ son os números menores que a e o propio a: $\{x \mid x \leq a\}$.
$(a, +\infty)$ son os números maiores que a: $\{x \mid x > a\}$.
$[a, +\infty)$ son os números maiores que a e o propio a: $\{x \mid x \geq a\}$.

- $(-\infty, 2)$ é o conxunto $\{x \mid x < 2\}$ →



- $[2, +\infty)$ é o conxunto $\{x \mid x \geq 2\}$ →



A propia **recta real** represéntase en forma de intervalo así: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Exercicios resoltos

1. Escribir en forma de intervalo e representar:

a) $2 < x \leq 3$; b) $x \leq 1$; c) $x > 0$

2. Escribir en forma de desigualdade e representar:

a) $[-2, 0]$; b) $[-1, +\infty)$

c) $(0, 1)$

3. Para que valores de x son válidas as expresións seguintes?

a) $\sqrt{x-3}$

b) $\sqrt{(x+2)(3-x)}$

1. a) Intervalo semiaberto $(2, 3]$

b) Semirrecta $(-\infty, 1]$

c) Semirrecta $(0, +\infty)$

2. a) $\{x/ -2 \leq x \leq 0\}$

b) $\{x/ x \geq -1\}$

c) $\{x/ 0 < x < 1\}$

3. a) $\sqrt{x-3}$ pode efectuarse sempre que x valla 3 ou máis: semirrecta $[3, +\infty)$

b) A raíz cadrada pode efectuarse cando o radicando é cero ou positivo. E isto ocorre cando un dos factores é cero, ambos os dous son negativos ou ambos son positivos. É dicir, se $x \geq -2$ e $x \leq 3$.

$[-2, 3]$

Actividades

1 Escribe os conxuntos seguintes en forma de intervalo e representa os números que cumpren as condicións indicadas en cada caso:

a) Comprendidos entre 5 e 6, ambos os dous incluídos.

b) Maiores que 7.

c) Menores ou iguais que –5.

2 Escribe en forma de intervalo e representa:

a) $\{x \mid 3 \leq x < 5\}$ b) $\{x \mid x \geq 0\}$

c) $\{x \mid -3 < x < 1\}$ d) $\{x \mid x < 8\}$

3 Escribe en forma de desigualdade e representa:

a) $(-1, 4]$ b) $[0, 6]$ c) $(-\infty, -4)$ d) $[9, +\infty)$

4 Raíces e radicais

Cálculo mental

1. Di o valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ b) $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ d) $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

2. Calcula as raíces seguintes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[8]{0}$

e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$

Chámaselle **raíz *n*-ésima** dun número a, e escríbese $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumpre a seguinte condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se } b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ chámase **radical;** a, **radicando,** e n, **índice** da raíz.

Cando manexes expresións coma esta, haberá ocasións nas que debes calcular valor numérico. Para iso, deberás ter en conta a definición, como nas que se pro poñen nesta marxe, ou ben recorrer á calculadora. Pero noutros casos deberá manter o radical, simplificalo, operar con outros radicais, etc. Dedicarémonos isto na próxima epígrafe.

Algunhas peculiaridades das raíces

- Se $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe calquera que sexa n.
- Se $a < 0$, só existen as súas raíces de índice impar.
- Aínda que 4 ten dúas raíces cadradas, con $\sqrt{4}$ referímonos á positiva: $\sqrt{4} = 2$.

  En xeral, un número positivo, a, ten dúas raíces cadradas: $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$.

Forma exponencial dos radicais

Os radicais pódense expresar como potencias:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \text{ pois } (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ pois } \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por exemplo:

$$(\sqrt[6]{27})^2 = (\sqrt[6]{3^3})^2 = (3^{3/6})^2 = 3^{6/6} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

Atención

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Actividades

1 Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x}$ b) $(\sqrt[3]{x^2})^5$

c) $\sqrt[15]{a^6}$ d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

2 Calcula.

a) $4^{1/2}$ b) $125^{1/3}$ c) $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ e) $64^{5/6}$ f) $36^{3/2}$

3 Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$ b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$ d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

5 Potencias e raíces coa calculadora

Potencias e raíces sinxelas: $\boxed{x^2}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x^3}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$

Todas as calculadoras científicas teñen as teclas $\boxed{x^2}$ e $\boxed{\sqrt{\ }}$. Moitas teñen tamén $\boxed{x^3}$ e $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$, aínda que estas adoitan aparecer como **segunda función** (é dicir, fóra da tecla e, polo tanto, deben ser precedidas por $\boxed{\text{SHIFT}}$).

Por exemplo:

$247^2 \rightarrow 247 \boxed{x^2} \boxed{61009}$ $\qquad 4{,}8^3 \rightarrow 4{,}8 \boxed{x^3} \boxed{110.592}$

$\sqrt{247} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }}\ 247 \boxed{=} \boxed{15.71623364}$

$\sqrt[3]{4{,}8} \rightarrow \boxed{\sqrt[3]{\ }}\ 4{,}8 \boxed{=} \boxed{1.686865331}$

Atención

Hai calculadoras antigas que proceden ao revés:

$\sqrt{247} \rightarrow 247 \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{15.71623360}$

Se hai na pantalla un número cuxa raíz cadrada queres calcular, antes de darlle á tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ pulsa $\boxed{=}$.

Por exemplo: $\boxed{58403} \boxed{=} \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{=} \boxed{241.6671264}$

POTENCIAS DE ÍNDICE CALQUERA: $\boxed{x^y}$ (OU BEN $\boxed{x^{\blacksquare}}$)

$17{,}84^5 \rightarrow 17{,}84 \boxed{x^y}\ 5 \boxed{=} \boxed{1807066.9784}$

$4^{2{,}5} \rightarrow 4 \boxed{x^y}\ 2{,}5 \boxed{=} \boxed{32}$

Raíces de índice calquera: $\boxed{\sqrt[y]{\ }}$ (ou ben $\boxed{\sqrt[\blacksquare]{\square}}$)

Atención, aquí a orde en que interveñen o índice, o radicando e a tecla dependen moito da calculadora. Por exemplo:

$\sqrt[5]{32}$:

- $5 \boxed{\sqrt[y]{\ }}\ 32 \boxed{=} \boxed{2}$ PANTALLA SINXELA
- $\boxed{\sqrt[\blacksquare]{\square}}\ 5 \blacktriangleright 32 \boxed{=}$ $\boxed{\sqrt[5]{32} \quad 2}$ PANTALLA DESCRITIVA

Actividades

Nalgunhas calculadoras, en vez de chamarlle a esta función $\sqrt[y]{\ }$, chámaselle $x^{1/y}$.

Incluso hai calculadoras coa tecla $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$. Con elas procédese así:

$\sqrt[5]{32} \rightarrow 32 \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ 5 \boxed{=} \boxed{2}$

CÁLCULO DE RAÍCES COA TECLA DA POTENCIA

$\sqrt[5]{32} = 32^{1/5} \rightarrow 32 \boxed{x^y}\ 5 \boxed{1/x} \boxed{=} \boxed{2}$

$\sqrt[5]{32^3} = 32^{3/5} \rightarrow 32 \boxed{x^y}\ 3 \boxed{a^b/c}\ 5 \boxed{=} \boxed{8}$

Actividades

Acha coa calculadora:

1 a) $\sqrt{541}$ b) 327^2 c) $\sqrt[3]{8{,}53}$

2 a) $\sqrt[5]{8{,}24}$ b) $\sqrt[6]{586}$ c) $\sqrt[4]{79{,}46}$

3 a) $\sqrt[5]{37^2}$ b) $\sqrt[4]{2{,}1^5}$ c) $\sqrt[3]{0{,}008^2}$

4 Calcula as raíces do exercicio 2 utilizando a tecla $\boxed{x^y}$.
(Por exemplo: $8{,}24 \boxed{x^y}\ 5 \boxed{1/x} \boxed{=}$).

5 Calcula as raíces do exercicio 3 utilizando a tecla $\boxed{x^y}$.
(Por exemplo: $37 \boxed{x^y}\ 2 \boxed{a^b/c}\ 5 \boxed{=}$).

6 Propiedades dos radicais

Os radicais teñen unha serie de propiedades que debes coñecer e utilizar con so[...] tura. Todas elas son consecuencia de propiedades das potencias.

Propiedade utilizada

$$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$$

XUSTIFICACIÓN:

$$\sqrt[np]{a^p} = a^{p/np} = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

SIMPLIFICACIÓN

Se o radicando está en forma de potencia, ou pode poñerse así, é posible qu[...] o radical poida simplificarse. Para iso, convén expresalo en forma exponencia[...]

Por exemplo:

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

Propiedade utilizada

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

XUSTIFICACIÓN:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} =$$
$$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

SACAR FACTORES FÓRA DUNHA RAÍZ

Se o radicando descomposto en factores ten potencias de expoñente igual o[...] maior que o índice da raíz, parte deles pode saír fóra da raíz.

Por exemplo:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2^{4/2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} =$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Propiedade utilizada

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

É a mesma propiedade que se enunciou arriba.

XUNTAR DOUS RADICAIS CO MESMO ÍNDICE

Por exemplo:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{15 \cdot 20} = \sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{5 \cdot 50} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

Propiedade utilizada

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

XUSTIFICACIÓN:

$$(\sqrt[n]{a})^p = (a^{1/n})^p = a^{p \cdot 1/n} = a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$$

ELEVAR UN RADICAL A UNHA POTENCIA

Por exemplo:

$$(\sqrt{2^3})^4 = \sqrt{2^{3 \cdot 4}} = \sqrt{2^{12}} = 2^{12/2} = 2^6$$

$$(\sqrt[5]{4})^3 = (\sqrt[5]{2^2})^3 = \sqrt[5]{2^{2 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^6}$$

$$(\sqrt[6]{7^2})^3 = \sqrt[6]{7^{2 \cdot 3}} = \sqrt[6]{7^6} = 7$$

Propiedade utilizada

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

XUSTIFICACIÓN:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/n \cdot 1/m} =$$
$$= a^{1/n \cdot m} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Lembra

$3\sqrt{7}$ e $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ son **radicais semellantes.**

Só poden sumarse ou restarse os radicais semellantes.

Observa

Multiplícase o denominador polo radical necesario para que desapareza a raíz:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \ ; \ \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7$$

Loxicamente, o numerador multiplícase pola mesma expresión.

RAÍZ DUN RADICAL

Por exemplo:

$$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$$
$$\sqrt{\sqrt[3]{11}} = \sqrt[6]{11}$$

SUMA E RESTA DE RADICAIS

Dous radicais distintos non poden sumarse se non é obtendo as súas expresións decimais aproximadas. Só poden sumarse radicais idénticos. Por exemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{7} + \sqrt[3]{7}\end{array}\right\}$$ Só poden realizarse de forma aproximada, ou ben hai que deixalas indicadas.

Si pode simplificarse a expresión seguinte:

$$7\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - \sqrt{5} = 17\sqrt{5}$$

Hai casos nos que a posibilidade de simplificar unha suma de radicais queda oculta. Previamente, deberemos sacar os factores que poidamos fóra das raíces, ou simplificalos. Por exemplo:

$$\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{50} = \sqrt{2^5} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{5^2 \cdot 2} =$$
$$= 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{8} + \sqrt[4]{4} = \sqrt{2^3} + \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

SUPRIMIR UN RADICAL DO DENOMINADOR

É costume nos resultados matemáticos nos que interveñen radicais evitar que estes estean no denominador. Vexamos uns casos nos que isto se consegue de forma sinxela:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

Actividades

1 Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$

2 Simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}}$

d) $(\sqrt[3]{a^2})^6$ e) $(\sqrt{x})^3 \cdot (\sqrt[3]{x})$ f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

3 Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt[10]{a^4b^6}$

4 Saca do radical os factores que sexa posible.

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $\sqrt[5]{64}$

5 Efectúa.

$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

6 Suprime o radical do denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ d) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{5^2}}$

Exercicios e problemas

PRACTICA

Números reais

1 a) Clasifica os seguintes números como racionais ou irracionais:

$$\frac{41}{13};\ \sqrt{49};\ 53,\widehat{7};\ 3,2;\ \sqrt{12};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{\pi}{2}$$

b) Algún deles é enteiro?

c) Ordénaos de menor a maior.

2 Di cales dos seguintes números son irracionais:

$$\frac{-3}{4};\ 1,7\widehat{3};\ \sqrt{3};\ \pi;\ \sqrt{9};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 3,7$$

3 Indica cales dos seguintes números poden expresarse como cociente de dous números enteiros e cales non:

$$21,5;\ \sqrt{7};\ 2,010010001\ldots;$$
$$\sqrt[3]{-8};\ 2+\sqrt{3};\ 0,\widehat{5};\ 2\pi-1$$

4 Clasifica estes números como naturais, enteiros, racionais e/ou reais:

3	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$	$7,23$
-2	π	0	-4
$\frac{1}{3}$	$\sqrt{-1}$	$\frac{11}{9}$	$\sqrt{5}$
2	$2,48$	18	$1+\sqrt{2}$
-1	$\sqrt[3]{-1}$	1	$1,010203\ldots$

5 Representa na recta real os seguintes números:

a) -3; $2,7$; $\sqrt{17}$; $\frac{1}{3}$, de forma exacta.

b) $\pi = 3,14\ldots$, de forma aproximada.

6 a) Escribe un número racional comprendido entre $\frac{2}{3}$ e 1.

b) Acha $\sqrt{5}$ coa calculadora e escribe dous números, un maior e outro menor que $\sqrt{5}$, que se diferencien con el nunha dez milésima.

7 Calcula o valor da diagonal dun cadrado de lado 1 e indica o tipo de número obtido.

Intervalos e semirrectas

8 Considera os números seguintes:

$$1;\ 2;\ 2,3;\ 3;\ 3,9;\ 4;\ 4,1$$

a) Indica cales deles pertencen ao intervalo $[2, 4)$.

b) E cales pertencen ao intervalo $[2, 4]$?

c) E cales ao $(2, +\infty)$?

9 Escribe en forma de intervalo e representa os nú meros que cumpren as condicións indicadas en cad caso:

a) $0 < x < 1$ b) $x \leq -3$ c) $x > 0$

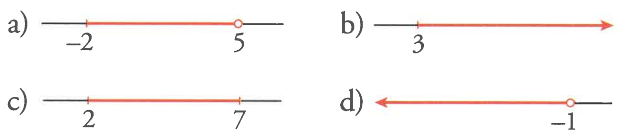
d) $-5 \leq x \leq 5$ e) $x > -5$ f) $1 \leq x < 3$

10 Escribe en forma de desigualdade e representa o seguintes intervalos:

a) $(1; 2,5)$ b) $[-2, 3]$ c) $[-7, 0)$

d) $[-3, +\infty)$ e) $(2, +\infty)$ f) $(-5, 2]$

11 Expresa como intervalo ou semirrecta e com unha desigualdade cada un dos conxuntos de número representados:



12 Escribe en forma de intervalo e representa os nú meros que cumpren as condicións dadas en cada caso:

a) Menores ou iguais que 3.

b) Comprendidos entre -1 e 0, incluíndo o 0, pero non o -1.

c) Maiores que 2, pero menores que 3.

d) Maiores que 5.

13 Representa nunha mesma recta as semirrecta $A = (-\infty, 3]$ e $B = [-3, +\infty)$. Cales son os números qu pertencen a A e a B? Exprésao como un intervalo.

14 Representa os intervalos $A = (2, 5]$ e $B = [-1, 4$ e di se teñen puntos en común. Se é un intervalo, d cal é.

15 Indica dous intervalos que teñan en común o puntos do intervalo $[-1, 1]$.

Potencias e raíces

16 Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[5]{a^2}$ c) $\sqrt[8]{a^5}$ d) $\sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt{a^{-1}}$ f) $\sqrt[4]{a^2}$ g) $\sqrt{a}$ h) $\sqrt{2}$

17 Expresa en forma de raíz.

a) $3^{2/5}$ b) $2^{3/4}$ c) $a^{1/3}$ d) $a^{1/2}$

e) $x^{1/4}$ f) $a^{3/2}$ g) $x^{-1/2}$ h) $x^{-3/2}$

18 Calcula.

a) $25^{1/2}$ b) $27^{1/3}$ c) $125^{2/3}$ d) $81^{3/4}$

e) $9^{5/2}$ f) $16^{5/4}$ g) $49^{3/2}$ h) $8^{5/3}$

19 Di o valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[k]{243} = 3$ b) $\sqrt[3]{k} = -2$

c) $\sqrt[4]{k} = \dfrac{3}{2}$ d) $\sqrt[k]{-125} = -5$

e) $\sqrt[3]{k} = -1$ f) $\sqrt[k]{\dfrac{49}{64}} = \dfrac{7}{8}$

20 Calcula as seguintes raíces:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[7]{0}$

d) $\sqrt[4]{1}$ e) $\sqrt[3]{-1}$ f) $\sqrt{-1}$

g) $\sqrt[3]{-27}$ h) $\sqrt{144}$ i) $\sqrt[6]{15\,625}$

21 Obtén coa calculadora.

a) $\sqrt[5]{9}$ b) $\sqrt[3]{-173}$ c) $\sqrt[4]{14^3}$

d) $\sqrt[4]{75{,}3}$ e) $\sqrt[6]{603}$ f) $\sqrt[3]{0{,}06^2}$

22 Acha coa calculadora.

a) $28^{3/4}$ b) $8^{1/2}$ c) $0{,}02^{2/3}$

d) $0{,}8^{3/5}$ e) $12^{5/2}$ f) $3{,}5^{1/5}$

Radicais

23 Simplifica.

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ e) $\sqrt[6]{125}$ f) $\sqrt[5]{3^{15}}$

24 Simplifica os seguintes radicais:

a) $\sqrt[10]{a^8}$ b) $\sqrt[4]{a^{12}}$ c) $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2b^2}$ e) $\sqrt[3]{a^6b^6}$ f) $\sqrt[6]{a^2b^4}$

25 Multiplica e simplifica o resultado.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}$ d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}$

26 Extrae todos os factores que poidas dos seguintes radicais:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{200}$ f) $\sqrt{300}$

27 Reduce a un só radical.

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ e) $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

28 Calcula e simplifica en cada caso:

a) $(\sqrt{2})^{10}$ b) $(\sqrt[3]{2})^4$ c) $(\sqrt[4]{3^2})^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ f) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6$

29 **Exercicio resolto**

Expresa como un só radical:

$$\sqrt{63} - 5\sqrt{28} + \sqrt{112}$$

Descompoñemos en factores cada radicando:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{63} &= \sqrt{3^2\cdot 7} = 3\sqrt{7}\\ \sqrt{28} &= \sqrt{2^2\cdot 7} = 2\sqrt{7}\\ \sqrt{112} &= \sqrt{2^4\cdot 7} = 4\sqrt{7}\end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow 3\sqrt{7} - 5\cdot 2\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 3\sqrt{7} - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = -3\sqrt{7}$$

30 Expresa como un só radical.

a) $2\sqrt{45} - 3\sqrt{20}$ b) $5\sqrt{48} + \sqrt{12}$

c) $3\sqrt{28} - 5\sqrt{7}$ d) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

31 Efectúa.

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8}$ d) $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$

32 Suprime o radical do denominador e simplifica.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

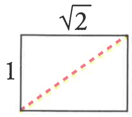
33 Suprime o radical do denominador.

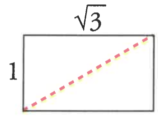
a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ d) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}}$

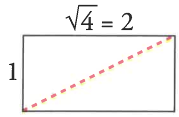
Exercicios e problemas

PENSA E RESOLVE

34 Calcula o valor da diagonal en cada caso e indica se é un número racional ou irracional:

a) 

b) 

c) 

35 Cales das seguintes raíces non existen?

$$\sqrt[3]{-20};\quad \sqrt[6]{0,12};\quad \sqrt{-1};\quad \sqrt[5]{241};\quad \sqrt[4]{-16}$$

36 **Exercicio resolto**

Expresa como potencia de base 2 cada un dos factores e simplifica.

$$(8^{2/3}) \cdot (\sqrt[5]{4})$$

$8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^{3 \cdot (2/3)} = 2^2$

$(\sqrt[5]{4}) = \sqrt[5]{2^2} = 2^{2/5}$

Polo tanto:

$(8^{2/3}) \cdot (\sqrt[5]{4}) = 2^2 \cdot 2^{2/5} = 2^{2+2/5} = 2^{12/5}$

37 Expresa como potencia única.

a) $(4^{1/3}) \cdot (\sqrt{2})$ b) $(\sqrt[3]{25}) : (5^{1/2})$

c) $(\sqrt{3}) \cdot (9^{1/3})$ d) $(27^{2/3}) \cdot (\sqrt[7]{9})$

38 Expresa como potencia única.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ b) $2\sqrt[3]{4}$ c) $a\sqrt{a}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ f) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a}$

39 Expresa en forma exponencial.

a) $(\sqrt[5]{a^2})^3$ b) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

d) $(\sqrt[4]{a})^3$ e) $(\sqrt[4]{a^2})^2$ f) $(\sqrt{a})^5$

40 Indica se o número que se obtén en cada caso é racional ou irracional:

a) A diagonal dun cadrado de lado $\sqrt{2}$ cm.

b) A área dun círculo de raio 2 cm.

c) O cateto do triángulo rectángulo de lados 24 cm e 25 cm.

d) A diagonal dun pentágono regular cuxo lado mide 1 cm.

41 Calcula a lonxitude do lado do cadrado inscrit nunha circunferencia de 6 cm de raio.

O resultado obtido pódese poñer en forma de fracción

42 Acha a área dun triángulo equilátero cuxo lad mide $\sqrt{3}$ cm. Expresa os cálculos con radicais.

43 Demostra, coa axuda da calculadora, qu $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ é distinto de $\sqrt{3+2}$.

44 Indaga para que valores de x se poden calcula as seguintes raíces:

a) $\sqrt{x-5}$ b) $\sqrt{5-x}$

c) $\sqrt{x^2+1}$ d) $\sqrt{-x}$

e) $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ f) $\sqrt{x(3-x)}$

45 **Exercicio resolto**

Ordena os seguintes radicais de menor a maior sim plificando previamente os que sexa posible:

$$\sqrt[4]{4} \quad \sqrt{5} \quad \sqrt[6]{7^3}$$

Simplificamos todo o posible:

$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{2/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

$\sqrt[6]{7^3} = 7^{3/6} = 7^{1/2} = \sqrt{7}$

Ordenar $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{7^3}$ é equivalente a ordenar $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$.

Como teñen o mesmo índice abonda observar os radicandos para ordenalos:

$$2 < 5 < 7 \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$$

Polo tanto:

$$\sqrt[4]{4} < \sqrt{5} < \sqrt[6]{7^3}$$

46 Simplifica os radicais que poidas e indica en cada caso cal é maior:

a) $\sqrt[6]{9}$ e $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[8]{121}$ e $\sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[6]{625}$ e $\sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt{5}$ e $\sqrt[4]{9}$

47 Ordena de menor a maior os seguintes radicais simplificándoos previamente:

$$\sqrt[6]{121} \quad \sqrt[12]{16} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[9]{125}$$

48 Comproba que os números $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$ son solucións da ecuación $x^2 - 3 = 0$.

Desenvolve as túas competencias

Infórmate

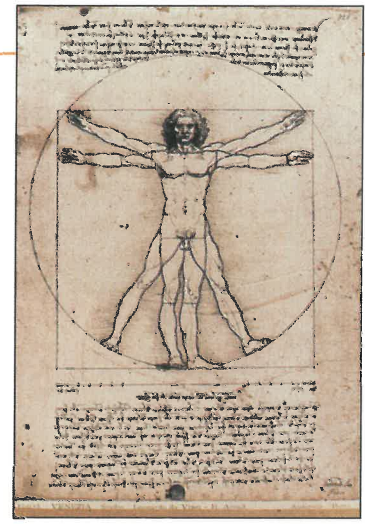
En páxinas anteriores fálase do **número de ouro** $\left(\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ como o primeiro número identificado entre os non racionais.

E iso non é de hai dous días; xa Platón (428-347 a.C.), na antiga Grecia, falaba del como a *divina proporción* e como *a mellor de todas as relacións matemáticas*.

A súa aparición non é casual, ata o punto de que se podería dicir que o levamos gravado de forma inconsciente na nosa mente. Poñeremos un exemplo: se che piden que debuxes, a bote pronto, un rectángulo, farao, seguramente, de forma que a proporción entre o lado longo e o lado curto se aproxime moito ao número de ouro.

O feito é que a súa presenza nas dimensións dos obxectos lles achega harmonía e beleza. E numerosos artistas, sabéndoo, introducírono nas súas obras ao longo da historia.

Todo o anterior pódese apreciar en obras tan famosas como o Partenón de Atenas, e o *Home de Vitruvio* de Leonardo da Vinci, ou en obxectos tan cotiáns como as tarxetas de crédito.



Autoavaliación

Reflexiona sobre a túa aprendizaxe

- Sabes clasificar os números nos distintos conxuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$?
- Coñeces e utilizas as distintas notacións para un intervalo?
- Sabes identificar unha raíz cunha potencia e manexar as operacións con radicais?

Verifícao resolvendo exercicios

1 Clasifica os seguintes números como naturais, enteiros, racionais, irracionais e/ou reais:

$$7{,}53;\ \sqrt{64};\ \frac{\sqrt{7}}{2};\ -5;\ \frac{\pi}{4};\ 3{,}2\overset{\frown}{3};\ \frac{7}{11}$$

2 a) Escribe en forma de intervalo e representa $-3 < x \le 5$.

b) Escribe en forma de desigualdade e representa $(-\infty, 8]$.

3 Acha o valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 7$ b) $\sqrt[k]{-125} = -5$ c) $\sqrt{625} = k$

4 Simplifica e, se é posible, extrae factores:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{15}}}$ b) $(\sqrt[7]{125})^4$ c) $\sqrt[8]{6^{10}}$

d) $\sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{18}$ e) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2}$ f) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

5 Opera: $\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{75}$

6 Suprime o radical do denominador e simplifica.

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{14}{\sqrt[4]{7}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$

3. No teu CD-ROM tes unha **autoavaliación moito máis ampla e completa.** Nel atoparás, ademais, orientacións e, se o desexas, as solucións dos exercicios.