CONVENCHE LEMBRAR

COMO EXPRESAR UN DECIMAL EXACTO EN FORMA DE FRACCIÓN

Para obter unha fracción equivalente a un número decimal exacto, abonda interpretar correctamente a parte decimal. Por exemplo:

$$27{,}8025 = \frac{278\,025}{10\,000} = \frac{11\,121}{400}$$

O denominador da fracción irredutible correspondente só ten os factores 2 e 5 ($400 = 2^4 \cdot 5^2$).

1 **Acha a fracción irredutible equivalente aos seguintes números decimais e descompón en factores primos os seus denominadores:**

a) $6{,}388$

b) $0{,}00875$

2 **Explica por que as seguintes fraccións son equivalentes a números decimais exactos:**

a) $\dfrac{3\,741}{100\,000}$ **b)** $\dfrac{3\,147}{1\,250}$ **c)** $\dfrac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7}$ **d)** $\dfrac{57\,330}{10\,500}$

COMO EXPRESAR UN DECIMAL PERIÓDICO EN FORMA DE FRACCIÓN

Para calcular a fracción xeratriz dun decimal periódico obténense, multiplicándoo por potencias de 10, dous decimais con idéntico período. A súa diferenza é un número enteiro.

O denominador da fracción irredutible equivalente a un decimal periódico ten algún factor distinto de 2 ou 5.

Exemplo 1º:

$$N = 7{,}\widehat{31}$$

$$\left.\begin{aligned} 100\,N &= 731{,}3131\ldots \\ N &= 7{,}3131\ldots \end{aligned}\right\} \; 100\,N - N = 731 - 7 \longrightarrow N = \frac{724}{99}$$

Exemplo 2º:

$$N = 5{,}3\widehat{724}$$

$$\left.\begin{aligned} 10\,000\,N &= 53\,724{,}724724\ldots \\ 10\,N &= 53{,}724724\ldots \end{aligned}\right\} \; N = \frac{53\,724 - 53}{10\,000 - 10} = \frac{53\,671}{9\,990}$$

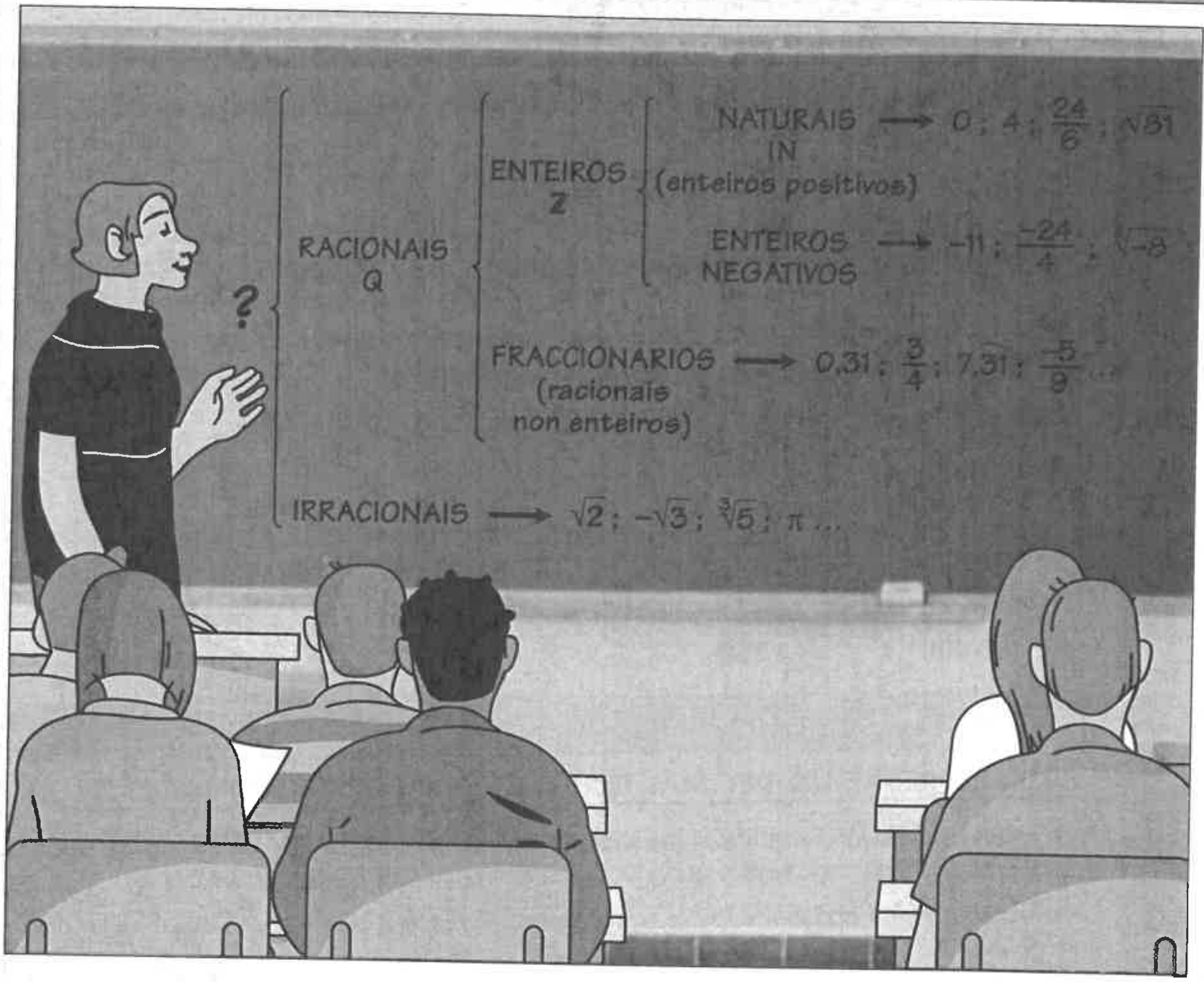
3 **Calcula a fracción xeratriz de: a)** $0{,}0\widehat{51}$ **b)** $1{,}23\widehat{456}$ **c)** $7{,}45\widehat{6}$

4 **Explica por que as seguintes fraccións son equivalentes a números decimais periódicos:**

a) $\dfrac{3}{7}$ **b)** $\dfrac{37}{2 \cdot 5 \cdot 7}$ **c)** $\dfrac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19}$

1 O NÚMERO REAL

REFLEXIONA



Arriba sinálase o conxunto que engloba a todos os números, racionais e non racionais. Nesta unidade estudarémolo con algún detalle. Comeza clasificando algúns números seguindo o esquema anterior.

- A seguinte lista consta de todos os números escritos no encerado e algúns máis:

$$0;\ 4;\ -11;\ 0{,}31;\ \sqrt{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{4};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{24}{6};\ \frac{-24}{4};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt{81};\ 7{,}\widehat{31};\ \pi;\ -\frac{5}{9}$$

Sitúaos, no teu caderno, sobre un cadro como o de abaixo. Ten en conta que un mesmo número pode estar en máis dun dos conxuntos.

NATURAIS ($\mathbb{N}$)	
ENTEIROS ($\mathbb{Z}$)	
RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)	
NON RACIONAIS	

1 NÚMEROS APROXIMADOS

Como xa sabemos doutros cursos e repasamos na páxina anterior, os números fraccionarios poden expresarse en forma decimal, xa sexa exacta ou periódica.

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \frac{4}{3} = 1{,}333... = 1{,}\widehat{3}$$

A expresión decimal dos números resulta moi cómoda para interpretalos, comparalos e operar con eles. Tamén para expresar números aproximados e controlar o grao de aproximación.

O pantano de El Cenajo (Albacete) ten unha capacidade aproximada de 437 hm^3.

EXPRESIÓN APROXIMADA DUN NÚMERO

Cando empregamos os números decimais para expresar medicións concretas, débense dar cunha cantidade axeitada de cifras significativas:

- Sería absurdo dicir que a capacidade dun pantano é 42 509 619 miles de litros (8 cifras significativas). É máis razoable dicir que ten 42 500 millóns de litros ou, mellor, 42,5 hm^3 (3 cifras significativas).
- Por moito que afinemos nos cálculos, non sería razoable dicir que a altura dunha árbore é 15,496 m. É unha valoración máis sensata 15 m (2 cifras significativas).
- A suma dos presupostos de todos os estados que forman a Unión Europea exprésase en billóns de euros. Por exemplo, 4,835 billóns (4 cifras significativas).

Chámanse **cifras significativas** a aquelas coas que se expresa un número aproximado. Só se deben utilizar aquelas das que nos conste a súa exactitude.

As estimacións que facemos na vida corrente, sen ánimo de que sexan moi precisas, teñen unha ou, como moito, dúas cifras significativas: "A superficie de xardín do parque ten setecentos corenta e tantos metros cadrados".

Unha cantidade dada con tres cifras significativas afina moito. Con catro estamos sendo extremadamente precisos. Só medicións altamente científicas superan as catro cifras significativas.

ACTIVIDADES

1 Expresa cun número razoable de cifras significativas as seguintes cantidades:

- Visitantes anuais a unha exposición de pintura: 1 345 589 persoas.
- Asistentes a unha manifestación ecolóxica: 1 345 589 persoas.
- Bacterias existentes en 1 dm^3 de certo preparado: 203 305 123 bacterias.
- Número de gotas de auga que hai nunha piscina: 8 249 327 741 gotas.
- Número de grans nun saco de area: 2 937 248 grans.

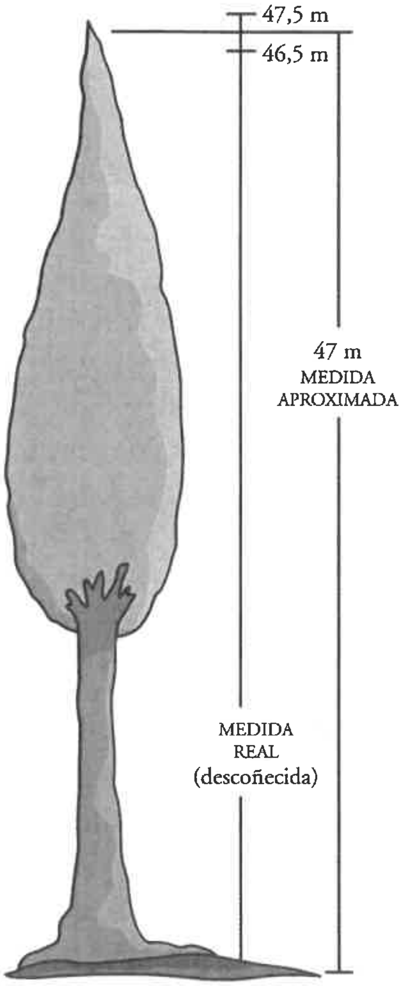
CONTROL DO ERRO COMETIDO

Cando damos unha medida aproximada, estamos a cometer un erro que consiste na diferenza entre o valor exacto e o valor aproximado. Chámase **erro absoluto.**

En xeral, o erro absoluto é descoñecido pero pode controlarse. Por exemplo, cando dicimos que a altura dunha árbore é 47 m, aproximadamente, é posible que poidamos asegurar que mide entre 46,5 m e 47,5 m. En tal caso, o erro cometido sería menor que 0,5 m:

$$\text{Erro absoluto} < 0{,}5 \text{ m}$$

0,5 m é a **cota do erro absoluto.**



Non é o mesmo dicir que o erro de medición é menor ca medio metro cando medimos a altura dunha maceira, ou a dun enorme ciprés. Por iso defínese o **erro relativo,** que é a relación entre o erro absoluto e o valor real.

Erro absoluto é a diferenza que hai entre o valor real e o valor da medición.

Erro relativo é o cociente entre o erro absoluto e o valor real.

$$\textbf{Erro absoluto} = \text{Valor real} - \text{Valor da medición}$$

$$\textbf{Erro relativo} = \frac{\text{Erro absoluto}}{\text{Valor real}}$$

Se $|\text{Erro absoluto}| < \varepsilon$, dicimos que ε é unha **cota do erro absoluto.** Nese caso, unha **cota do erro relativo** é:

$$\frac{\varepsilon}{\text{Valor real}} \approx \frac{\varepsilon}{\text{Valor da medición}}$$

Ao valernos de números decimais para dar valores aproximados, o erro absoluto é inferior a media unidade da última cifra significativa empregada.

O valor relativo é tanto menor cantas máis cifras significativas demos correctamente.

Por exemplo, se damos correctamente como área dun agro 370 miles de metros cadrados, o erro absoluto é menor que 500 m^2 e o erro relativo menor que $0{,}5/370 = 5/3\,700$.

Nas cantidades aproximadas é frecuente que os ceros situados ao final non sexan cifras significativas. Se así fose, na medición anterior o erro absoluto sería menor que 5 000 m^2 e o relativo, menor que 5/370.

ACTIVIDADES

2 Dá unha cota do erro absoluto e outra do erro relativo nas cantidades que expresaches no exercicio da páxina anterior.

2 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Os números seguintes están postos en notación científica:

$$2{,}48 \cdot 10^{14} \ (= \underbrace{248\,000\,000\,000\,000}_{14 \text{ cifras}})$$

$$7{,}561 \cdot 10^{-18} \ (= 0{,}\underbrace{000\,000\,000\,000\,000\,007}_{18 \text{ cifras}}561)$$

A notación científica ten sobre a usual a seguinte vantaxe: as cifras dánsenos contadas, co que a orde de magnitude do número é evidente. Esta notación é útil, sobre todo, para expresar números moi grandes ou moi pequenos.

Un número posto en notación científica consta de:

- Unha parte enteira formada por unha soa cifra que non é cero (a das unidades).
- O resto das cifras significativas postas como parte decimal.
- Unha potencia de base 10 que dá a orde de magnitude do número.

$$N = \underset{\text{Parte enteira (só unha cifra)}}{a}\,,\ \underset{\text{Parte decimal}}{\underline{b\,c\,d\ldots}} \cdot \underset{\text{Potencia enteira de base 10}}{\underline{10^n}}$$

Se n é positivo, o número N é "grande".

E se n é negativo, daquela N é "pequeno".

OPERACIÓNS CON NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para operar con números dados en notación científica procédese de forma natural, tendo en conta que cada número está formado por dous factores: a expresión decimal e a potencia de base 10.

O produto e o cociente son inmediatos, mentres que a suma e a resta esixen preparar os sumandos de modo que teñan todos a mesma potencia de base 10 e, así, poder sacar factor común.

OBSERVACIÓN

Nos exercicios resoltos temos que "amañar" a solución final para que adopte a notación científica: só unha cifra na parte enteira.

EXERCICIOS RESOLTOS

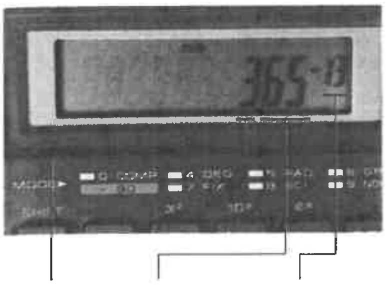
a) $(5{,}24 \cdot 10^6) \cdot (6{,}3 \cdot 10^8) = (5{,}24 \cdot 6{,}3) \cdot 10^{6+8} = 33{,}012 \cdot 10^{14} =$
$= 3{,}3012 \cdot 10^{15}$

b) $\dfrac{5{,}24 \cdot 10^6}{6{,}3 \cdot 10^{-8}} = (5{,}24 : 6{,}3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0{,}8317 \cdot 10^{14} = 8{,}317 \cdot 10^{13}$

c) $5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10} = 5{,}83 \cdot 10^9 + 6\,932 \cdot 19^9 - 75 \cdot 10^9 =$
$= (5{,}83 + 6\,932 - 75) \cdot 10^9 = 6\,862{,}83 \cdot 10^9 = 6{,}86283 \cdot 10^{12}$

ACTIVIDADES

1 Calcula: a) $(7{,}823 \cdot 10^{-5}) \cdot (1{,}84 \cdot 10^{13})$ b) $2{,}35 \cdot 10^8 + 1{,}43 \cdot 10^7$



CALCULADORA PARA A NOTACIÓN CIENTÍFICA

Interpretación: [5.74901 09] significa $5{,}74901 \cdot 10^9$

Escritura: Para poñer $5{,}74901 \cdot 10^9 \rightarrow 5{,}74901$ [EXP] 9

Para poñer $2{,}94 \cdot 10^{-13} \rightarrow 2{,}94$ [EXP] 13 [+/-]

Operacións: As operacións encadéanse coma se fosen números calquera. A propia calculadora, ao premer a tecla [=], dá o resultado en forma científica.

MODO CIENTÍFICO (SCI)

O MODO SCI fai que a calculadora traballe sempre con números en notación científica e, ademais, coa cantidade de cifras significativas que previamente lle indiquemos.

Por exemplo, cunha calculadora na que se accede ao MODO SCI mediante a secuencia [MODE] [8], desexamos traballar coa notación científica utilizando catro cifras significativas.

Se queremos multiplicar $(3\,475\,980\,000) \cdot (1{,}27 \cdot 10^{-5})$, faremos:

Preparación da calculadora ⟶ [MODE] [8] [4] [0.000 00]

Introdución do primeiro factor ⟶ 3 475 980 000 [×] [3.476 09]

Introdución do segundo factor e execución do produto } → 1,27 [EXP] 5 [+/-] [=] [4.414 04]

OBSERVACIÓNS

Cando a calculadora está en MODO SCI, admite expresións non científicas, pero ao darlle a unha tecla de operación ou ao [=], pon o número en notación científica, coas cifras significativas desexadas, redondeando.

A calculadora conserva na súa memoria os díxitos que non exhibe na pantalla. Se no exemplo anterior poñemos a calculadora en MODO NORMAL ([MODE] [9]), inmediatamente se amosa na pantalla o resultado con todas as cifras:

[44144.946]

ORDES DE MAGNITUDE

xiga	10^9
mega	10^6
quilo	10^3
hecto	10^2
deca	10
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}

Para designar ordes de magnitude (grandes ou pequenas), existen algúns prefixos.

Moitos deles xa os coñeces de usalos no sistema métrico decimal. Por exemplo, *centi, mili, deci, hecto, quilo*...

Hai outros que debes coñecer:

xiga (mil millóns): 10^9

mega (un millón): 10^6

micro (unha millonésima): 10^{-6}

nano (unha milmillonésima): 10^{-9}

3 NÚMEROS NON RACIONAIS

Números racionais son os que se poden poñer como cociente de dous números enteiros. Hai números que non son racionais como, por exemplo, $\sqrt{2}$.

Imos demostrar que, efectivamente, $\sqrt{2}$ **non se pode poñer como cociente de dous números enteiros.** Farémolo por *redución ao absurdo* (supoñer que si e ver que se chega a un absurdo).

— Supoñemos que $\sqrt{2}$ é racional.

— En tal caso, poderíase poñer como cociente de dous números enteiros:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

— Elevamos ao cadrado os dous membros:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow a^2 = 2b^2$$

Como b^2 é un cadrado perfecto, conteñen o factor 2 un número par de veces. Por tanto, $2b^2$ ten o factor 2 un número impar de veces, o cal é imposible por ser $2b^2 = a^2$ outro cadrado perfecto.

Deste modo completamos o seguinte razoamento: "Se supoñemos que $\sqrt{2}$ é racional, chegamos a un absurdo".

E así demostramos, *por redución ao absurdo,* que $\sqrt{2}$ non é racional.

NÚMEROS IRRACIONAIS

Os números *non racionais* chámanse **irracionais.** Acabamos de demostrar que $\sqrt{2}$ é irracional. Analogamente, probaríase que:

- Se p non é un cadrado perfecto, $\sqrt{p}$ é irracional.

  Por exemplo, $\sqrt{16}$ é racional porque $16 = 4^2$; porén, $\sqrt{7}$ é irracional porque $7 \neq n^2$ para calquera n enteiro.

- En xeral, se p é un número enteiro e $\sqrt[n]{p}$ non é un número enteiro (é dicir, p non é unha potencia n-ésima), daquela $\sqrt[n]{p}$ é irracional.

  Por exemplo, $\sqrt[3]{-125}$ é racional porque $-125 = (-5)^3$ e, porén, $\sqrt[3]{-127}$ é irracional porque $-127 \neq n^3$ para calquera n enteiro.

Tamén é irracional o número π.

Posto que os números decimais exactos ou periódicos son racionais, *os números irracionais teñen unha expresión decimal infinita non periódica.*

A expresión decimal dun número irracional ten infinitas cifras non periódicas.

En calquera intervalo da recta, por pequeno que sexa, hai infinitos números irracionais.

TEN EN CONTA

Na descomposición en factores primos dun cadrado perfecto, cada número primo está un número par de veces. Por exemplo:

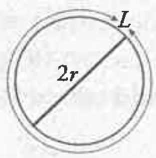
$$N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

$$N^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5^3)^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6$$

Todos os expoñentes de N^2 son pares.

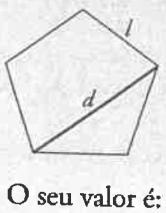
OS NÚMEROS π E Φ

Como sabes, π é a relación entre a lonxitude dunha circunferencia e o seu diámetro:



$$\frac{L}{2r} = \pi$$

A relación entre a diagonal dun pentágono regular e o seu lado chámase **número de ouro ou número áureo** e desígnase por Φ:



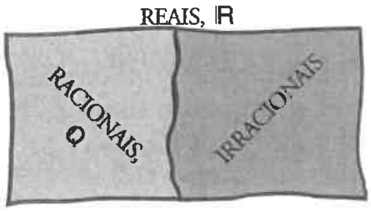
$$\frac{d}{l} = \Phi$$

O seu valor é:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\ldots$$

π e Φ son **números irracionais.**

4 OS NÚMEROS REAIS



En $\mathbb{R}$ están definidas as operacións:

$+ \quad - \quad \cdot \quad \div \quad \sqrt[n]{a}$

agás se n é par con a negativo.

O conxunto formado polos números racionais e os irracionais chámase **conxunto de números reais** e desígnase por $\mathbb{R}$.

Cos números reais podemos realizar as mesmas operacións que faciamos cos racionais: sumar, restar, multiplicar e dividir (agás polo cero) e séguense mantendo as mesmas propiedades.

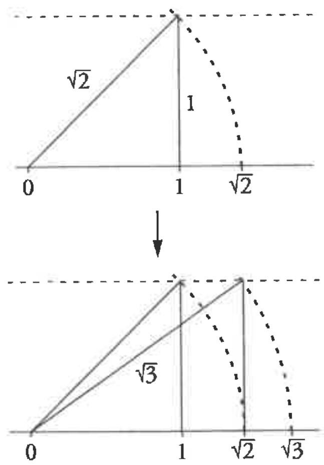
Tamén podemos extraer raíces de calquera índice (agás raíces de índice par de números negativos) e o resultado segue sendo un número real. Iso non ocorría cos números racionais.

A RECTA REAL

Sabemos que os números racionais se sitúan na recta de tal maneira que en cada treito, por pequeno que sexa, hai infinitos.

Porén, e aínda que pareza estraño, hai infinitos ocos que son ocupados polos números irracionais. Entre todos, enchen a recta.

Cada punto da recta corresponde a un número racional ou a un número irracional. Por iso á recta numérica chamámola **recta real.**



Á esquerda amósase un método exacto para situar sobre a recta os números do tipo $\sqrt{n}$, sendo n enteiros: en cada caso estamos considerando un triángulo de catetos $\sqrt{n-1}$ e 1 no cal a hipotenusa se pode obter polo teorema de Pitágoras.

Por exemplo:

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

ACTIVIDADES

1 Escribe en cada caso un número racional e outro irracional comprendidos entre M e N:

a) $M = \frac{1}{2}$; $N = \frac{1}{3}$

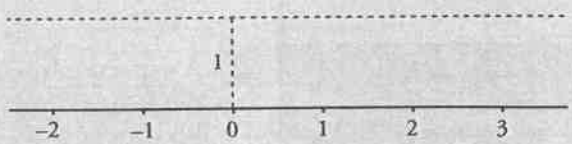
b) $M = 0{,}438$; $N = 0{,}439$

c) $M = 0{,}\widehat{31}$; $N = 0{,}\widehat{32}$

Poderías atopar sempre un racional e un irracional que estean comprendidos entre dous números calquera? Razoa a túa resposta.

2 Representa na recta numérica os seguintes números:

$\sqrt{10} \qquad \frac{\sqrt{10}}{3} \qquad -\frac{\sqrt{10}}{3}$



5 REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS SOBRE A RECTA REAL

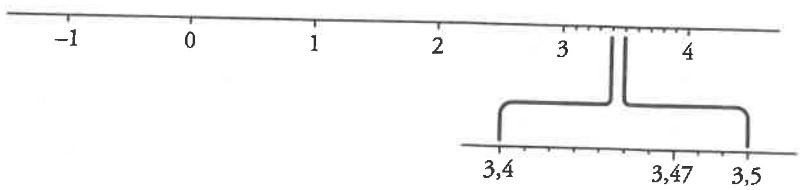
Como vimos en páxinas anteriores:

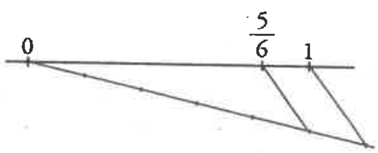
— Os números racionais pódense poñer mediante unha expresión decimal finita ou periódica.

— Os números irracionais exprésanse mediante infinitas cifras decimais non periódicas.

Todo número real pode situarse sobre a recta real, dependendo de como sexa o número:

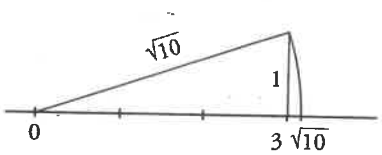
- **Enteiro ou decimal exacto.** Por exemplo, 3,47:



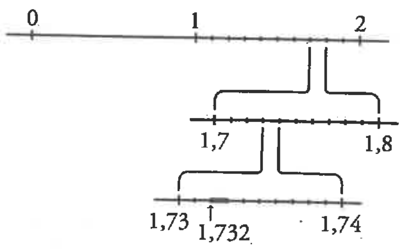


- **Decimal periódico.** Pode expresarse en forma de **fracción** e, deste modo, sitúase facilmente.

  Por exemplo: $0,83333\ldots = 0,8\widehat{3} = \dfrac{5}{6}$



- Se un número irracional é **radical cuadrático** ($\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ ...) ou unha combinación deles, pódese representar construíndo triángulos rectángulos, como vimos na páxina anterior.



- Se un **número irracional** vén dado pola **expresión** decimal, podemos representalo de forma aproximada mediante o proceso que describimos á esquerda para representar $\sqrt{3} = 1,732\ldots$

  O número $\sqrt{3}$ está situado no segmento vermello, que é unha centésima parte do intervalo 1,7 – 1,8. Na recta inicial sería máis fino cá punta dun alfinete. Pero aínda poderiamos seguir afinando máis, tanto como quixeramos.

Os números reais poden ser representados na recta real, segundo os casos, de forma exacta ou ben con tanta aproximación como queiramos.

ACTIVIDADES

1 Representa na recta real os números:

a) -2; $3,75$; $\sqrt{5}$; $0,666\ldots$ de forma exacta.

b) $\Phi = 1,618\ldots$ de forma aproximada.

6 INTERVALOS E SEMIRRECTAS

Para designar algúns treitos da recta real, existe unha nomenclatura que debes recoñecer:

NOME	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
INTERVALO ABERTO	(a, b)	$\{x / a < x < b\}$ Números comprendidos entre a e b.	a b
INTERVALO PECHADO	$[a, b]$	$\{x / a \leq x \leq b\}$ Números comprendidos entre a e b, estes incluídos.	a b
INTERVALO SEMIABERTO	$(a, b]$	$\{x / a < x \leq b\}$	a b
	$[a, b)$	$\{x / a \leq x < b\}$	a b
SEMIRRECTA	$(-\infty, a)$	$\{x / x < a\}$ Números menores que a.	a
	$(-\infty, a]$	$\{x / x \leq a\}$ Números menores que a e o propio a.	a
	$(a, +\infty)$	$\{x / a < x\}$ Números maiores que a.	a
	$[a, +\infty)$	$\{x / a \leq x\}$ Números maiores que a e o propio a.	a

A propia recta real pódese describir como $(-\infty, +\infty)$. É dicir, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

EXERCICIO RESOLTO

Vexamos para que valores de x son válidas as expresións seguintes:

a) $\sqrt{x-3}$ pode efectuarse sempre que x valla 3 ou máis: semirrecta $[3, +\infty)$.

3

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ pode efectuarse se x é maior que 3: semirrecta $(3, +\infty)$.

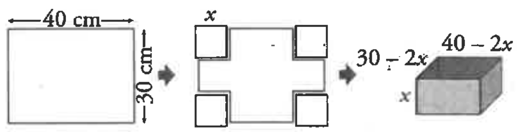
3

c) $\sqrt{(x+2)(3-x)}$ pode efectuarse se x vale -2 ou 3 ou está entre eses valores: intervalo pechado $[-2, 3]$.

-2 3

d) O volume da caixa que se constrúe a partir dun rectángulo de 40 cm × 30 cm é:

$$V = (40 - 2x)(30 - 2x)\,x$$



A caixa pode construírse sempre que o lado, x, dos cadradiños que cortamos sexa superior a 0 e inferior a 15 cm: intervalo aberto $(0,15)$.

0 15

7 RAÍCES

Ata agora encontrácheste, en ocasións, con raíces cadradas, cúbicas ou doutro índice. A partir deste curso encontraralas con moita máis frecuencia. En ocasións, deberás coñecer a súa expresión decimal (exacta ou aproximada). Noutros casos, deberás operar con elas sen efectuar a raíz. Por todo iso, imos estudar as súas propiedades comezando por recordar a súa definición:

Chámase **raíz *n*-ésima** dun número a, e escríbese $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumpre a seguinte condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ chámase **radical**; a, **radicando**, e n, **índice** da raíz.

CÁLCULO MENTAL

1. Di o valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ b) $\sqrt[4]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ d) $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

2. Calcula as raíces seguintes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[8]{0}$

e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$

ALGUNHAS PECULIARIDADES DAS RAÍCES

- Se $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe calquera que sexa n.
- Se $a < 0$, só existen as súas raíces de índice impar.
- Aínda que 4 ten dúas raíces cadradas, con $\sqrt{4}$ referímonos só á positiva: $\sqrt{4} = 2$. En xeral, un número positivo, a, ten dúas raíces cadradas: $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$

FORMA EXPONENCIAL DOS RADICAIS

Ao igual que as fraccións $\left(\frac{1}{a^n} = a^{-n}\right)$, tamén os radicais se poden expresar como potencias:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \text{ pois } (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ pois } \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por exemplo:

$$(\sqrt[6]{27})^2 = (\sqrt[6]{3^3})^2 = (3^{3/6})^2 = 3^{6/6} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

ACTIVIDADES

1 Expresa en forma exponencial:

a) $\sqrt[5]{x}$ b) $(\sqrt[3]{x^2})^5$

c) $\sqrt[15]{a^6}$ d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

2 Calcula: a) $4^{1/2}$ b) $125^{1/3}$ c) $625^{1/4}$ d) $8^{2/3}$ e) $64^{5/6}$

3 Expresa en forma radical:

a) $x^{7/9}$ b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$ d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

POTENCIAS E RAÍCES CON CALCULADORA

ATENCIÓN

Se xa hai un número na pantalla e queremos calcular a súa raíz cadrada, farémolo así:

[180] [=] [√] [=] [13.41640786]

As calculadoras antigas actúan ao revés:

[180] [√] [13.41640786]

RAÍCES CADRADAS [√]

Con seguridade, na túa calculadora hai unha tecla [√] para calcular raíces cadradas. A súa utilización é moi sinxela e clara. Por exemplo:

$\sqrt{180}$ → [√] 180 [=] [13.41640786]

POTENCIAS [x^y]

Hai outra tecla, [x^y], coa que se poden obter potencias. Por exemplo:

2^{64} → 2 [x^y] 64 [=] [1.844674407 19]

Como sabes, este número é $1{,}844674407 \cdot 10^{19}$.

RAÍCES COA TECLA [x^y]

A notación exponencial da raíz permítenos expresar calquera raíz en forma de potencia e, polo tanto, utilizar a tecla anterior para efectuar raíces calquera. Por exemplo:

$= (483)^{2/5}$ → 483 [x^y] [(] 2 [÷] 5 [)] [=] [11.84619432]

$= 100\,000^{1/10}$ → 100 000 [x^y] 10 [1/x] [=] [3.16227766]

NOTA IMPORTANTE

Se a notación x^y está fóra da tecla, [ ], daquela debe ser precedida pola tecla [INV] ou [SHIFT], segundo o modelo de calculadora. Por exemplo:

→ 350 [INV] [x^y] 5 [1/x] [=] [3.227108809]

Analogamente faríase coa función [√], ou con calquera outra a designación da cal estea fóra da tecla.

ATENCIÓN

Noutras calculadoras, en lugar da tecla [$x^{1/y}$] existe esta outra tecla: [$\sqrt[x]{y}$].

realízase así:

5 [$\sqrt[x]{y}$] 350 [=] [3.227108809]

TECLA [$x^{1/y}$]

Con esta tecla, ou no seu lugar [ ], obtense directamente raíces y-ésimas (o índice da raíz é y):

→ 350 [$x^{1/y}$] 5 [=] [3.227108809]

ou ben 350 [INV] [$x^{1/y}$] 5 [=] [3.227108809]

ACTIVIDADES

4 Empregando a tecla [√], calcula:

; ; ; ; ;

5 Empregando a tecla [x^y], acha: 7^4; 2^{100}; $1{,}41^{20}$

6 Empregando a tecla [x^y], resolve: ; ;

7 Empregando a tecla [$x^{1/y}$] ou ben [$\sqrt[x]{y}$], acha:

; ; ;

8 PROPIEDADES DOS RADICAIS

Os radicais teñen unha serie de propiedades que debemos coñecer e utilizar con soltura. Todas elas son consecuencias inmediatas de coñecidas propiedades das potencias:

1. $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$ pois $\sqrt[np]{a^p} = a^{\frac{p}{np}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Aplicacións

- Simplificar radicais. Por exemplo: $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$
- Reducir radicais a índice común. Por exemplo, para comparar $\sqrt[3]{586}$ con $\sqrt{70}$:

$$\sqrt[3]{586} = \sqrt[6]{586^2} = \sqrt[6]{343\,396}, \quad \sqrt{70} = \sqrt[6]{70^3} = \sqrt[6]{343\,000}$$

Polo tanto: $\sqrt[3]{586} > \sqrt{70}$

2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ pois $\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Aplicacións

- Sacar un factor fóra dunha raíz. Por exemplo:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

- Xuntar dous radicais nun só. Por exemplo:

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{15 \cdot 20} = \sqrt{300}$$

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ pois $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Aplicacións

- Xunto ás propiedades **1** e **2**, serve para poñer produtos e cocientes de radicais baixo unha soa raíz. Por exemplo:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{18}$$

4. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$ pois $(\sqrt[n]{a})^p = (a^{\frac{1}{n}})^p = a^{\frac{1}{n} \cdot p} = (a^p)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ pois $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[mn]{a}$

6. Dous radicais distintos non poden sumarse se non é obtendo as súas expresións decimais aproximadas. Só poden sumarse radicais idénticos.

Por exemplo, as expresións $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ou $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7}$ só poden realizarse de forma aproximada ou ben hai que deixalas indicadas.

Si pode simplificarse a expresión: $7\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - \sqrt{5} = 17\sqrt{5}$

Hai casos nos que a posibilidade de simplificar unha suma de radicais queda oculta. Por exemplo:

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{2\,500} = \sqrt{2^3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt[4]{2^2 \cdot 5^4} =$$
$$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

NON O ESQUEZAS

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

$(a - \sqrt{b}) \cdot (a + \sqrt{b}) = a^2 - b$

7. **Racionalización de denominadores.** Ás veces convén suprimir as raíces do denominador. Para iso, hai que multiplicalo pola expresión axeitada. Naturalmente, o numerador tamén se multiplicará por esa mesma expresión.

Por exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$

$$\frac{1}{5 - \sqrt{3}} = \frac{5 + \sqrt{3}}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} = \frac{5 + \sqrt{3}}{5^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5 + \sqrt{3}}{22}$$

ACTIVIDADES

1 Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$

2 Cal dos dous é maior en cada caso?

a) $\sqrt[4]{31}$ e $\sqrt[3]{13}$

b) $\sqrt[3]{51}$ e $\sqrt[9]{132\,650}$

3 Reduce:

a) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt[10]{a^4 b^6}$

4 Saca do radical todos os factores que sexa posible:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $\sqrt[5]{64}$

5 Simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 b^5 c}}{\sqrt{ab^3c^3}}$

d) $(\sqrt[3]{a^2})^6$ e) $(\sqrt{x})^3\,(\sqrt[3]{x})$ f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

6 Efectúa:

a) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

b) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

7 Racionaliza os denominadores:

a) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{3}{2 - \sqrt{3}}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$ f) $\dfrac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{3}}$

FAI UN ESQUEMA

NÚMEROS REAIS

Os números racionais, xunto cos irracionais, enchen toda a recta numérica.

NÚMEROS RACIONAIS

Pódense expresar como unha fracción de números enteiros.

- **Números enteiros**
- **Decimais exactos**
- **Decimais periódicos**

NÚMEROS IRRACIONAIS

Non se poden expresar como unha fracción de números enteiros.

DECIMAIS NON EXACTOS

A súa expresión require de infinitas cifras non periódicas.

Por exemplo: $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$, π, Φ

APROXIMACIÓN DECIMAL

Na práctica, adoita ser suficiente expresar, tanto os números racionais como os irracionais, cunhas poucas cifras significativas.

RADICAIS

Raíz *n*-ésima de *a*: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Exemplo: $\sqrt[3]{1728} = 12$ pois $12^3 = 1728$

Notación exponencial: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Exemplo: $\sqrt[4]{3^6} = 3^{\frac{6}{4}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3}$

Propiedades dos radicais

- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Racionalización de denominadores

Consiste en eliminar as raíces do denominador.

Por exemplo:

- $\frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{2}$
- $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,(\sqrt{3} + \sqrt{2})} =$

  $= \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3 - 2} = 3\sqrt{6} + 6$

EXERCICIOS DA UNIDADE

PRACTICA

Aproximación e erros

1 Expresa cun número axeitado de cifras significativas:

a) Audiencia dun programa de televisión: 3 017 849 espectadores.

b) Tamaño dun virus: 0,008375 mm.

c) Resultado de 15^7.

d) Forza de atracción entre dous corpos: 18 753 N.

e) Presuposto dun concello: 987 245 €.

f) Porcentaxe de votos dun candidato a delegado: 37,285%.

g) Capacidade dun pantano: 3 733 827 000 *l*.

2 Calcula, en cada un dos apartados do exercicio anterior, o erro absoluto e o erro relativo das cantidades dadas como aproximacións.

3 EXERCICIO RESOLTO

Acha unha cota do erro absoluto e outra do erro relativo das seguintes aproximacións:

a) 350 000 *b) 0,03*

Resolución

Supoñemos que os ceros non son cifras significativas. Só se poñen para expresar o número.

a) $350\,000 \longrightarrow \dfrac{10\,000}{2} = 5\,000$ cota do erro absoluto

$\dfrac{5\,000}{350\,000} \approx 0{,}014$ cota do erro relativo

O erro absoluto cometido, ao dar como aproximación 350 000, é menor que 5 000, e o erro relativo é menor que 0,014.

b) $0{,}03 \longrightarrow \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}005$ cota de erro absoluto

$\dfrac{0{,}005}{0{,}03} \approx 0{,}1667$ cota de erro relativo

O erro absoluto cometido, ao dar como aproximación 0,03, é menor que 0,005, e o erro relativo é menor que 0,1667.

4 Dá unha cota do erro absoluto e outra do erro relativo nas seguintes aproximacións:

a) Raio da Terra: 6 400 km.

b) Distancia Terra-Sol: 150 000 000 km.

c) Habitantes de España: 41 millóns.

d) Tempo que tarda a luz en percorrer unha distancia: 0,007 segundos.

e) Volume dunha pinga de auga: 0,4 mm^3.

Notación científica

5 Expresa con todas as cifras:

a) $6{,}25 \cdot 10^8$ b) $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ c) $3 \cdot 10^{-6}$

d) $5{,}18 \cdot 10^{14}$ e) $3{,}215 \cdot 10^{-9}$ f) $-4 \cdot 10^{-7}$

6 Escribe en notación científica:

a) 4 230 000 000 b) 0,00000004

c) 84 300 d) –0,000572

7 Expresa en notación científica:

a) Recadación das quinielas nunha xornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Toneladas de CO_2 que se emitiron á atmosfera en 1995 en Estados Unidos: 5 228,5 miles de millóns.

c) Raio do átomo de osíxeno:

0,000000000066 m

8 Calcula unha cota do erro absoluto e outra do erro relativo dos seguintes redondeos dados en notación científica:

a) $9{,}254 \cdot 10^5$ b) $3{,}7 \cdot 10^8$ c) $5{,}28 \cdot 10^{-6}$

d) $8{,}4 \cdot 10^{-3}$ e) $1{,}95 \cdot 10^6$ f) $2{,}185 \cdot 10^{-8}$

9 Calcula con lapis e papel e comproba despois o resultado coa calculadora:

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (1{,}5 \cdot 10^7)$

b) $(3 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^4)$

c) $(1{,}25 \cdot 10^{-17}) \cdot (4 \cdot 10^{13})$

d) $(2{,}4 \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$

EXERCICIOS DA UNIDADE

10 ▲▲△ Efectúa e expresa o resultado en notación científica, sen empregar a calculadora:

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$

c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d) $(5 \cdot 10^{9})^2$

e) $(4 \cdot 10^{5})^{-2}$ f) $3{,}1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$

11 ▲▲△ Expresa en notación científica e calcula:

a) $(0{,}0073)^2 \cdot (0{,}0003)^3$

b) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$

c) $\dfrac{0{,}000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0{,}00302}$

d) $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0{,}00003 - 0{,}00015}$

12 ▲▲△ Utiliza a calculadora para efectuar as seguintes operacións e expresa o resultado con dous e con tres cifras significativas.

a) $(4{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (8{,}37 \cdot 10^{-4})$

b) $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3{,}25 \cdot 10^{-9})$

c) $(8{,}4 \cdot 10^{11}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6})$

d) $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3$

13 ▲▲△ Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$

b) $\dfrac{7{,}35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^7$

c) $(4{,}3 \cdot 10^3 - 7{,}2 \cdot 10^5)^2$

Números reais

14 ▲△△ a) Clasifica os seguintes números racionais ou irracionais:

$\dfrac{41}{13}$; $-\sqrt{49}$; $53{,}\widehat{7}$; $3{,}2 \cdot 10^{-10}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt[3]{5}$

b) Algún deles é enteiro?

c) Ordénaos de menor a maior.

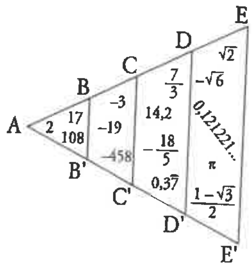
15 ▲△△ Di cales dos seguintes números son irracionais:

$-\dfrac{3}{4}$; $1{,}7\widehat{3}$; $\sqrt{3}$; π; $\sqrt{9}$; $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

16 ▲△△ Ordena de menor a maior:

a) $1{,}45$; $1{,}\widehat{4}$; $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\dfrac{13}{9}$

17 ▲△△ a) Observa o diagrama e completa no teu caderno o cadro adxunto.



ℕ	ABB'	2, 17,
ℤ	A...	
ℚ		
ℝ		

b) Sitúa os seguintes números no lugar que lles corresponda no diagrama e no cadro:

$3{,}\widehat{28}$; $\dfrac{14}{7}$; $\sqrt{8}$; $-\sqrt{9}$

c) Como se chaman os números de DEE'D'?

18 ▲▲△ Clasifica estes números segundo pertenzan aos conxuntos ℕ, ℤ, ℚ e ℝ.

3	$-3/4$	$\sqrt{2}$	$7{,}23$
-2	π	0	-4
$1/3$	$\sqrt[3]{-1}$	$11/9$	$\sqrt{-5}$
2	$2{,}48$	18	$1+\sqrt{2}$
-1	$\sqrt[4]{-5}$	1	$1{,}010203\ldots$

Intervalos

19 ▲△△ EXERCICIO RESOLTO

Escribe en forma de intervalo e representa o conxunto $M = \{x \mid -3 < x \leq 4\}$.

Resolución

$M = (-3, 4]$ é un intervalo semiaberto que inclúe o 4 e non inclúe o −3.

20 ▲△△ Escribe simbolicamente e representa os seguintes intervalos:

$A = \{x \,/\, -6 \leq x \leq 3\}$ $\quad B = \{x \,/\, -4 < x \leq 4\}$

$C = \{x \,/\, 3 \leq x\}$ $\quad D = \{x \,/\, 0 < x < 5\}$

$E = \{x \,/\, x > -2\}$ $\quad F = \{x \,/\, 10 \geq x\}$

21 ▲△△ Escribe en forma de intervalo e representa os números que cumpren a desigualdade indicada en cada caso:

a) $0 < x < 1$ $\quad$ b) $x \leq -3$ $\quad$ c) $x > 0$

d) $-5 \leq x \leq 5$ $\quad$ e) $-5 < x$ $\quad$ f) $1 \leq x < 3$

22 ▲▲△ Escribe en forma de desigualdade e representa os seguintes intervalos:

$P = (1; 2{,}5)$ $\quad Q = [-2, 3]$ $\quad R = [-7, 0]$

$S = [-3, +\infty)$ $\quad T = (2, +\infty)$ $\quad I = (-5, 2]$

Potencias e raíces

23 ▲▲△ EXERCICIO RESOLTO

Expresa como potencia de base 2 cada un dos números que van entre parénteses e efectúa despois a operación:

$$(16^{1/4}) \cdot (\sqrt[6]{4}) \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$$

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} 16^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2 \\ \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{2/6} = 2^{1/3} \\ \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3} = 2^{-3} \end{array}\right\} \; 2 \cdot 2^{1/3} \cdot 2^{-3} = 2^{-5/3}$$

24 ▲▲△ Expresa como potencia única:

a) $\sqrt{3}\sqrt[3]{3}$ $\quad$ b) $2\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ $\quad$ c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ $\quad$ e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$ $\quad$ f) $a\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

25 ▲△△ Obtén coa calculadora:

a) $\sqrt[5]{9{,}5^2}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{-173}$ $\quad$ c) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{14}{9}\right)^3}$

d) $\sqrt[4]{5^{-9}}$ $\quad$ e) $28^{3/4}$ $\quad$ f) $8^{-1/3}$

g) $0{,}03^{-3/2}$ $\quad$ h) $(\sqrt[5]{0{,}0025})^{-1}$

26 ▲△△ Expresa en forma exponencial:

a) $\sqrt[3]{x^2}$ $\quad$ b) $(\sqrt[5]{a^2})^3$ $\quad$ c) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2}$ $\quad$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

e) $(\sqrt{a})^{-3}$ $\quad$ f) $\sqrt[6]{a^3}$ $\quad$ g) $(\sqrt[4]{a^2})^2$ $\quad$ h) $\sqrt[5]{a^{10}}$

27 ▲△△ Expresa como unha raíz:

a) $15^{1/2}$ $\quad$ b) $(a^2)^{1/3}$ $\quad$ c) $(x^{-1})^{5/4}$ $\quad$ d) $(a^{1/5})^{-4}$

e) $(a^{2/3})^{1/2}$ $\quad$ f) $a^2 \cdot a^{1/2}$ $\quad$ g) $(3^{-2/5})^{10/3}$

28 ▲▲△ Expresa como potencia única:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4}$ $\quad$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}}$ $\quad$ c) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$

d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}$ $\quad$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}}$ $\quad$ f) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2} \cdot \dfrac{a^3}{\sqrt{a}}$

Radicais

29 ▲△△ Multiplica e simplifica o resultado:

a) $\sqrt{2a}\ \sqrt{3a}\ \sqrt{6a}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{a^2}\ \sqrt[3]{b^4}\ \sqrt[3]{b^2}$

c) $\sqrt{5a}\ \sqrt{10ab}\ \sqrt{8a^3b}\ \sqrt{a}$

30 ▲△△ Simplifica os seguintes radicais:

a) $\sqrt[6]{5^3}$ $\quad$ b) $\sqrt[15]{2^{12}}$ $\quad$ c) $\sqrt[10]{a^8}$

d) $\sqrt[12]{a^4 \cdot b^8}$ $\quad$ e) $\sqrt[8]{(x^2y^2)^2}$ $\quad$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}}$

31 ▲▲△ Extrae factores dos seguintes radicais:

a) $\sqrt[3]{16x^6}$ $\quad$ b) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}}$ $\quad$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$

d) $\sqrt{\dfrac{8a^5}{b^4}}$ $\quad$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^6}}$ $\quad$ f) $\sqrt{\dfrac{32a^3}{45b^4}}$

32 ▲▲△ Reduce a índice común e ordena de menor a maior:

a) $\sqrt{2}\,, \sqrt[3]{3}\,, \sqrt[4]{4}\,, \sqrt[5]{5}\,, \sqrt[6]{6}$

b) $\sqrt[3]{2^4}\,, \sqrt[4]{5^3}\,, \sqrt[6]{3^5}$

EXERCICIOS DA UNIDADE

33 ▲▲△ Introduce dentro da raíz e simplifica:

a) $2\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

34 ▲▲△ Divide e simplifica o resultado:

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}} : \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$

35 ▲▲△ EXERCICIO RESOLTO

Expresa como un só radical:

$$\sqrt{63} - \frac{5}{2}\sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3}$$

Resolución

Descompoñemos en factores cada radicando:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7}\\ \sqrt{28} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7}\\ \sqrt{112} = \sqrt{2^4 \cdot 7} = 4\sqrt{7}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\sqrt{7} - \frac{5}{2} \cdot 2\sqrt{7} + \frac{4\sqrt{7}}{3} =$$

$$= 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + \frac{4\sqrt{7}}{3} = \left(3 - 5 + \frac{4}{3}\right)\sqrt{7} = -\frac{2}{3}\sqrt{7}$$

36 ▲▲△ Suma:

a) $\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

d) $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48}$

37 ▲▲△ Efectúa:

a) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500}$ b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{64}} + \sqrt{\frac{7}{4}}$ d) $\sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{\frac{3}{32}}$

e) $\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

38 ▲△△ Racionaliza e simplifica:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{12}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{15}}$

39 ▲▲△ EXERCICIO RESOLTO

Racionaliza: a) $\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ *b)* $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

Resolución

a) Multiplicamos o numerador e denominador por $\sqrt{3}$.

$$\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{18}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$$

b) Multiplicamos numerador e denominador por $3\sqrt{3} - 2$.

$$\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2} = \frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 2)} =$$

$$= \frac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{(3\sqrt{3})^2 - 2^2}$$

Simplifica e comproba que é igual a $\sqrt{2}$.

40 ▲▲△ Racionaliza:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ c) $\frac{8}{\sqrt{5} - 1}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

41 ▲▲△ Racionaliza e simplifica:

a) $\frac{2}{1 + \sqrt{2}}$ b) $\frac{14}{3 - \sqrt{2}}$ c) $\frac{23}{5 - \sqrt{2}}$

d) $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$ e) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$ f) $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$

g) $\frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ h) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3}$ i) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

PENSA E RESOLVE

42 ▲▲△ A masa do Sol é 330 000 veces a da Terra, aproximadamente, e esta é $5{,}98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica a masa do Sol en quilos.

43 ▲▲△ O ser vivo máis pequeno é un virus que pesa da orde de 10^{-18} g e o máis grande é a balea azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. Cantos virus serían necesarios para conseguir o peso dunha balea?

44 Os lados iguais dun triángulo isóscele miden o dobre cá base, cuxa lonxitude é $\sqrt{3}$ m. Calcula o perímetro do triángulo, a súa altura e a súa área. Expresa o resultado en radicais.

45 Nun cubo cuxa aresta mide $\sqrt{3}$ cm, acha:

a) A diagonal dunha cara.

b) A diagonal do cubo.

c) O volume do cubo.

Expresa os resultados en forma radical.

46 Reduce a un só radical:

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}$ c) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2}}$

REFLEXIONA SOBRE A TEORÍA

47 Cales das seguintes raíces non existen?

$\sqrt[3]{-20}$, $\sqrt[6]{0,12}$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt[5]{241}$, $\sqrt[4]{-16}$

48 Escribe un número racional e outro irracional comprendidos entre os números dados:

a) $3,\widehat{7}$ e $3,78$ b) $\dfrac{71}{50}$ e $\dfrac{64}{45}$

c) $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ d) $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{3}$

49 Cantos números racionais hai entre $0,\widehat{8}$ e $0,\widehat{9}$? Pon exemplos e razoa a túa resposta.

50 Escribe dous números racionais, un maior ca $\sqrt{2}$ e outro menor ca $\sqrt{2}$, que se diferencien del en menos dunha milésima.

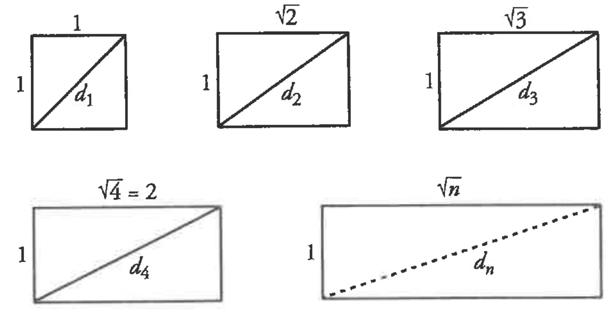
51 Xustifica se, en cada caso, os dous radicais son iguais ou distintos:

a) $\sqrt[6]{8}$ e $\sqrt[8]{16}$ b) $\sqrt[3]{27}$ e $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[6]{9}$ e $\sqrt[12]{16}$ d) $\sqrt[4]{25}$ e $\sqrt[6]{125}$

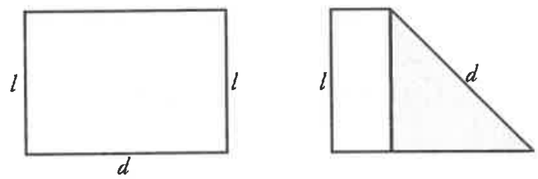
52 Explica un procedemento para construír un segmento que mida exactamente $\sqrt{7}$ cm.

53 Calcula o valor da diagonal en cada caso:



AFONDA

54 Dobra unha folla DIN A-4 formando un cadrado e expresa a diagonal dese cadrado en función do lado menor, *l*. Comproba, con outra folla igual, que o lado maior mide o mesmo que a diagonal do cadrado. Cal é a razón entre as dimensións da folla DIN 4-A?



55 Racionaliza e simplifica:

a) $\dfrac{2 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

c) $\dfrac{4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}}{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}$ d) $\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

56 Efectúa e simplifica:

a) $\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}\right)(3 + 2\sqrt{2})$ b) $\dfrac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} - 1} - 3\sqrt{5}$

c) $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right) : \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}\right)$

57 Para que valores de x se poden calcular as seguintes raíces?

a) $\sqrt{x - 2}$ b) $\sqrt{-x}$ c) $\sqrt[4]{8 - x}$ d) $\sqrt{x^2 + 1}$

58 Se sabes que $a > 1$, como ordenarías os seguintes números de menor a maior?

$$a, \ \frac{1}{a}, \ -\frac{1}{a}, \ \frac{1}{a + 1}, \ -\frac{1}{a + 1}$$