NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

OPCIÓN A

1 — 1. i. Enunciado do Teorema de Rolle.

2.5 — ii. Estudar o valor de m para que a función $f(x)=\begin{cases} x^2 & se \ x\in(-\infty,1) \\ mx-1 & se \ x\in[1,+\infty) \end{cases}$ estea nas hipóteses do teorema anterior no intervalo $[-3,5]$. [Nota: debe-se utilizar a definición de derivada.]

1.5 — iii. Obter, no caso anterior, o ponto no que a tanxente á curva f é paralela á recta $y=-3x+4$.

i. Enunciado do Teorema de Rolle: se f é unha función contínua nun intervalo $[a,b]$ e derivábel en (a,b), e tal que $f(a)=f(b)$, entón $\exists \ c\in(a,b) \ / \ f'(c)=0$.

ii. f é contínua e derivábel en $\mathbb{R}$, agás posibelmente en $x=1$, onde haberá que facer o estudo de xeito particular.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} x^2=\lim_{x\to 1^+} mx-1 \Leftrightarrow 1=m-1 \Leftrightarrow m=2$$

Para $m=2$ a función fica $f(x)=\begin{cases} x^2 & se \ x\in(-\infty,1) \\ 2x-1 & se \ x\in[1,+\infty) \end{cases}$ e resulta $f(1)=1$.

Neste caso as derivadas laterais en $x=1$ son:

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0^-} h+2=2$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(1+h)-1-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2+2h-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}=2$$

Logo para $m=2$ a función é derivábel tamén en $x=1$, ao coincidir as derivadas laterais, asi que $f'(1)=2$ e como, neste caso, $f(-3)=f(5)=9$, a función está nas hipóteses do Teorema de Rolle.

iii. A recta $y=-3x+4$ ten pendente -3, polo que temos que buscar $x\in\mathbb{R} \ / \ f'(x)=-3$.

$f'(x)=\begin{cases} 2x & se \ x\in(-\infty,1) \\ 2 & se \ x\in[1,+\infty) \end{cases}$, e como $2\neq -3$, a única posibilidade é que $2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$, solución admisíbel xá que $-\frac{3}{2}<1$, asi que $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$.

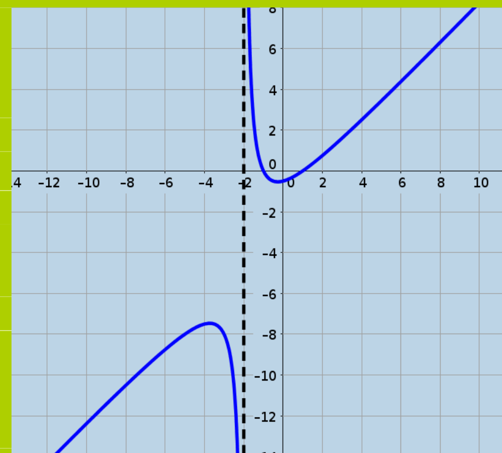
$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$; e polo tanto a tanxente é $y-\frac{9}{4}=-3\cdot(x-(-3)) \Leftrightarrow y-\frac{9}{4}=-3x-9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y-9=-12x-36 \Leftrightarrow 4y=-12x-27 \Leftrightarrow y=-3x-\frac{27}{4}$

2	

2. Estudar os extremos, curvatura e pontos de inflexión da función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$.

$Dom\, f=\mathbb{R}-\{-2\}$, e as derivadas son:
$f'(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$ e $f''(x)=\dfrac{6}{(x+2)^3}$.



$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+4x+1=0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$

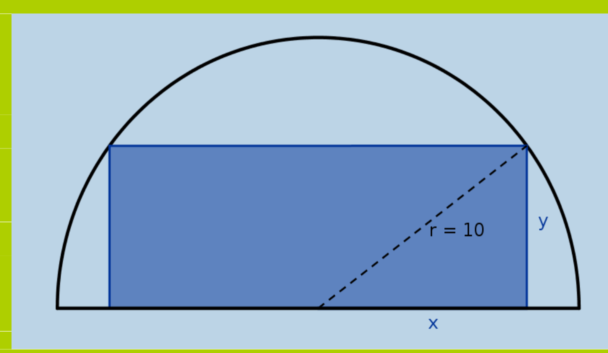
$f''(-2-\sqrt{3})<0$ e $f''(-2+\sqrt{3})>0$, e polo tanto f presenta un máximo relativo en $x_1=-2-\sqrt{3}$ e un mínimo relativo en $x_2=-2+\sqrt{3}$.

$f''(x)\neq 0 \;\;\forall\;\; x\in Dom\, f$, polo que non existen pontos de inflexión.

$f''(x)>0 \;\Leftrightarrow\; x>-2$ e $f''(x)<0 \;\Leftrightarrow\; x<-2$; asi que a función é cóncava en $(-\infty,-2)$ e convexa en $(-2,+\infty)$.

3. Calcular as dimensións dun rectángulo inscrito nun semicírculo de $10\ cm$ de raio, de xeito que a sua área sexa máxima.

Sexa x a metade da base do rectángulo e y a sua altura. A área do rectángulo é $A=2xy$.



Ao estar inscrito nun semicírculo, obtemos a restrición: $x^2+y^2=10^2 \;\Leftrightarrow\; y=\sqrt{100-x^2}$

E polo tanto a área pode ser expresada da forma $A(x)=2x\cdot\sqrt{100-x^2}$.

$$A'(x)=2\sqrt{100-x^2}+2x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=2\sqrt{100-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{200-2x^2-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$A'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 200-4x^2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=50 \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt{50}=\pm5\sqrt{2}$$

Rexeitando a solución negativa por motivos evidentes, temos un posíbel extremo relativo en $x=5\sqrt{2}$.

$$A''(x)=\frac{-8x\cdot\sqrt{100-x^2}-\dfrac{(200-4x^2)\cdot(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}=\frac{-16x(100-x^2)+(200-4x^2)x}{2(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}=$$

$$=\frac{12x^3-1.400x}{2(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}=\frac{6x^3-700x}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}$$

$A''(5\sqrt{2})<0 \Rightarrow A$ presenta un máximo relativo (e absoluto) en $x=5\sqrt{2}$, para o que $y=\sqrt{100-(5\sqrt{2})^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Logo as dimensións do rectángulo serán $10\sqrt{2}\ cm$ de base e $5\sqrt{2}\ cm$ de altura, e a sua área será $A=2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}=100\ cm^2$.

OPCIÓN B

1 4. i. Enunciado do Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial.

2.5 ii. Estudar a continuidade e derivabilidade da función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & se\ \ x\leqslant 2 \\ kx-5 & se\ \ x>2 \end{cases}$, dependendo do valor de k. [Nota: debe-se utilizar a definición de derivada.]

1.5 iii. No caso de que f estea nas hipóteses do teorema anterior, obter o valor c ao que se refire o teorema no intervalo $[-1,4]$ e a ecuación da recta tanxente a f no ponto c.

i. Enunciado do Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial: se f é unha función contínua nun intervalo $[a,b]$ e derivábel no intervalo (a,b), $\exists\ c\in(a,b)\ /\ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ii. f é contínua e derivábel en $\mathbb{R}-\{2\}$, e será contínua tamén en 2 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} x^2-1=\lim\limits_{x\to 2^+} kx-5 \Leftrightarrow (-2)^2-1=k\cdot 2-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3=2k-5 \Leftrightarrow k=4$, co que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=3$

Logo, para $k=4$ a función é contínua en $\mathbb{R}$, e neste caso estudamos a derivabilidade en $x=2$, para o que calculamos as derivadas laterais:

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2+h)^2-1-3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0^-} h+4=4$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4\cdot(2+h)-5-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h}{h}=\lim_{h\to 0^+} 4=4$$

Logo f é contínua e derivábel en $\mathbb{R}$, polo que está nas hipóteses do teorema.

iii. Segundo o teorema, debe existir $c\in(-1,4)\ /\ f'(c)=\dfrac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}$.

Para $k=4$, $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & se\ \ x\leqslant 2 \\ 4x-5 & se\ \ x>2 \end{cases}$ e $f'(x)=\begin{cases} 2x & se\ \ x\leqslant 2 \\ 4 & se\ \ x>2 \end{cases}$; logo:

$f'(c)=\dfrac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\dfrac{15-4}{5}=\dfrac{11}{5}$, e como para $c>2$ $f'(c)=4$, a única posibilidade é que sexa $c\leqslant 2$ e asi $2c=\dfrac{11}{5} \Leftrightarrow c=\dfrac{11}{10}$, de xeito que $\dfrac{11}{10}\in(-1,4)$ e $f'\left(\dfrac{11}{10}\right)=2\cdot\dfrac{11}{10}=\dfrac{11}{5}$.

Para $c=\dfrac{11}{10}$, $f(c)=\left(\dfrac{11}{10}\right)^2-1=\dfrac{121}{100}-1=\dfrac{21}{100}$; e polo tanto a tanxente á curva no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{11}{10},\dfrac{21}{100}\right)$ é:

$$y-\frac{21}{100}=f'\left(\frac{11}{10}\right)\cdot\left(x-\frac{11}{10}\right)\Leftrightarrow y-\frac{21}{100}=\frac{11}{5}\cdot\left(x-\frac{11}{10}\right)\Leftrightarrow y-\frac{21}{100}=\frac{11}{5}\cdot x-\frac{11}{5}\cdot\frac{11}{10}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y-\frac{21}{100}=\frac{11x}{5}-\frac{121}{50}\Leftrightarrow 100y-21=220x-242\Leftrightarrow y=\frac{1}{100}\cdot(220x-221)$$

2	

5. Estudar o domínio e as asíntotas da función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

$Dom\ f=[0,1)\cup(1,+\infty)$

Debido ao domínio, non ten sentido procurar asíntotas horizontais ou oblícuas para $x\to-\infty$.

Asíntotas horizontais

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; este límite é unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se pode resolver multiplicando polo conxugado do denominador e dividindo posteriormente o numerador e o denominador por x :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}-1}=-1$$

Logo $y=-1$ é unha asíntota horizontal para $x\to+\infty$, polo que non existen asíntotas oblícuas.

Asíntotas verticais

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\frac{1}{0}=\infty$; asi que temos unha asíntota vertical en $x=1$, de xeito que $\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=+\infty$ e $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=-\infty$.

3	

6. Representar graficamente a función $f(x)=\frac{x^2-x+2}{2-x}$, indicando de forma explícita, cando menos, os seguintes elementos: pontos de corte cos eixos, asíntotas, extremos relativos e pontos de inflexión.

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{2\}$; é unha función contínua e derivábel en todo o seu domínio.

$x^2-x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}\notin\mathbb{R}$, logo non hai cortes co eixo OX .

$f(0)=1$, logo temos un corte co eixo OY en $A(0,1)$

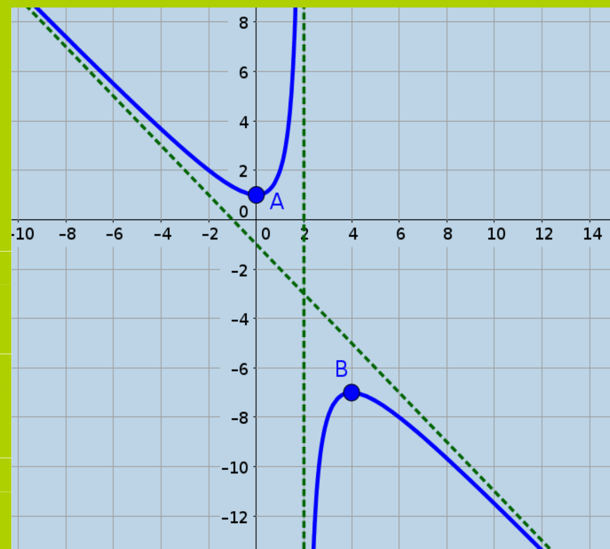
As derivadas son: $f'(x)=\frac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$ e $f''(x)=-\frac{8}{(x-2)^3}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+4x=0\Leftrightarrow x(4-x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$$

Logo dividimos o domínio nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ e $(4, +\infty)$, de xeito que:

$f'(-1)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \ \forall \ x \in (-\infty, 0)$, $f'(1)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \ \forall \ x \in (0, 2)$, $f'(3)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \ \forall \ x \in (2, 4)$ e $f'(5)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \ \forall \ x \in (4, +\infty)$.

Asi que f é crecente en $(0, 2) \cup (2, 4)$ e decrecente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$; ademais $f''(0)>0 \Rightarrow f$ presenta un mínimo relativo en $x=0$, que se corresponde co ponto $A(0, 1)$, e $f''(4)<0 \Rightarrow f$ presenta un máximo relativo en $x=4$, que se corresponde co ponto $B(4, -7)$.



$f''(x) \neq 0 \ \forall \ x \in Dom\, f \Rightarrow f$ non presenta pontos de inflexión.

Analisando os intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$, obtemos:

$f''(0)>0 \Rightarrow f''(x)>0 \ \forall \ x \in (-\infty, 2)$ e $f''(4)<0 \Rightarrow f''(x)<0 \ \forall \ x \in (2, +\infty)$, logo f é convexa en $(-\infty, 2)$ e cóncava en $(2, +\infty)$.