MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 03/03/2017
TEMA 3 MATRICES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 | 1. i. Definir os conceitos de dependéncia linear e de rango dun conxunto dentro dun espazo vectorial V , aportando exemplos.

1 | ii. Estudar o rango do conxunto $W=\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$.

1 | iii. No caso de ser posíbel, suprimir de xeito razoado dous elementos do conxunto W coa condición de que non varie o seu rango.

i. Di-se que un subconxunto W nun espazo vectorial V é linearmente dependente se existe algunha combinación linear non trivial dos elementos de W que dá o elemento neutro da suma, é dicer, o vector nulo.

Chama-se rango dun conxunto W , e representa-se por $rang\ W$, ao número máximo de elementos de W que forman un conxunto linearmente independente.

<u>Exemplos</u>

O conxunto $W=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ é linearmente dependente xá que $1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

O rango deste mesmo conxunto é 2 , debido a que o subconxunto $W'=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ é linearmente independente.

ii. Para estudar o rango de W , podemos estudar o rango da matriz A que ten por colunas os elementos de W : $A=\begin{pmatrix}0&-2&1&-2\\2&0&2&-2\\-1&2&-2&3\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&1&-2\\2&0&2&-2\\-1&2&-2&3\end{pmatrix}\overset{F_1\leftrightarrow F_3}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&-2&3\\2&0&2&-2\\0&-2&1&-2\end{pmatrix}\overset{F_2+2F_1}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&-2&3\\0&4&-2&4\\0&-2&1&-2\end{pmatrix}\overset{F_3+\frac{1}{2}F_2}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1&2&-2&3\\0&4&-2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{; logo } rang\ W=rang\ A=2 .$$

iii. Se escollemos na matriz A orixinal un determinante de orde 2 distinto de 0 , teremos un conxunto de duas colunas linearmente independente e, polo tanto, un conxunto de dous vectores de W linearmente independente: $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, logo o conxunto $W' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ é linearmente independente, asi que se suprimimos os elementos $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ o rango de W non varia.

0,5	

2. i. Obter os valores de t para os que a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & t & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ t & 2 & 3 \end{pmatrix}$ é regular.

1	

ii. Resolver para $t=0$ a ecuación matricial $A^t \cdot X \cdot A = 2 I_3$, onde I_3 é a matriz identidade de orde 3.

i. $det\ A = \begin{vmatrix} -2 & t & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ t & 2 & 3 \end{vmatrix} = t^2 + t - 2$; $det\ A = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$

Asi que A é regular $\Leftrightarrow$ $t \neq 1$ e $t \neq -2$.

ii. Para $t=0$ a matriz é regular xá que o seu determinante é $det\ A = -2$, e polo tanto existe A^{-1}, asi que:

$A^t \cdot X \cdot A = 2 I_3 \Leftrightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = (A^t)^{-1} \cdot 2 I_3 \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot 2 I_3 \cdot A^{-1} = 2 \cdot (A^t)^{-1} \cdot A^{-1}$

No caso $t=0$, temos $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e as inversas son:

$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Logo $X = 2 \cdot (A^t)^{-1} \cdot A^{-1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 56 & -22 \\ 1 & -22 & 9 \end{pmatrix}$.

1		3. i. Enunciado do Teorema de Rouché.
1		ii. Razoar a seguinte afirmación: se S é un sistema linear tal que a sua matriz ampliada M^* é regular, entón S é incompatíbel.

i. Sexa S un sistema linear con m ecuacións e n incógnitas, e sexan M e M^* as matrices de coeficientes e ampliada respectivamente; entón: S é un sistema compatible se e só se $rang\ M = rang\ M^*$

Ademais, se $rang\ M = rang\ M^* = n$ entón o sistema é determinado e se $rang\ M = rang\ M^* < n$ o sistema é indeterminado; a diferenza entre o número de incógnitas e o rango das matrices é o grau de liberdade do sistema.

ii. Nun sistema con estas características, se a matriz M^* é regular entón $M^* \in M_n(\mathbb{R})$ e $\det M^* \neq 0$, logo $rang\, M^* = n$, onde n é o número de filas da matriz e, polo tanto, o número de ecuacións do sistema. Sendo asi, a matriz de coeficientes ten $n-1$ colunas, polo que $rang\ M < rang\ M^*$ e como consecuéncia o sistema será incompatíbel.

1,5		4. i. Estudar a compatibilidade do sistema $S \equiv \begin{cases} 3x - 2y + kz = 1 \\ x + y - 3z = k \\ 4x - y - 4z = 0 \end{cases}$, dependendo dos valores de k.
1		ii. Resolver o sistema nos casos en que sexa posíbel, utilizando a Regra de Cramer.

i. As matrices do sistema son $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & k & 1 \\ 1 & 1 & -3 & k \\ 4 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det M = \begin{vmatrix} 3 & -2 & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -5k - 5 \ ; \ \det M = 0 \ \Leftrightarrow \ -5k - 5 = 0 \ \Leftrightarrow \ k = -1$$

Logo se $k \neq -1$, $rang\ M = rang\ M^* = 3$ e o sistema será compatíbel determinado.

No caso $k = -1$, a matriz ampliada é $M^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Tomando como base o determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ resulta $rang\ M = 2$ e, como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, entón $rang\ M = rang\ M^* = 2 < 3$, co que estamos ante un sistema compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade.

ii. A resolución no caso $k \neq -1$ é, pola Regra de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & k\\ k & 1 & -3\\ 0 & -1 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & k\\ 1 & 1 & -3\\ 4 & -1 & -4\end{vmatrix}}=\frac{-k^2-8k-7}{-5k-5}=\frac{k+7}{5}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & k\\ 1 & k & -3\\ 4 & 0 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & k\\ 1 & 1 & -3\\ 4 & -1 & -4\end{vmatrix}}=\frac{-4k^2-12k-8}{-5k-5}=\frac{4(k+2)}{5}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & k\\ 4 & -1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & k\\ 1 & 1 & -3\\ 4 & -1 & -4\end{vmatrix}}=\frac{-5k-5}{-5k-5}=1$$

Logo a solución no caso xeral é $\left(\frac{k+7}{5},\frac{4(k+2)}{5},1\right)\ \ \forall\ \ k\neq-1$.

No caso particular $k=-1$ transforma-se o sistema en $S'\equiv\begin{cases}3x-2y=z+1\\ x+y=3z-1\end{cases}$ e por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}z+1 & -2\\ 3z-1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{7z-1}{5}\quad \text{e}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3 & z+1\\ 1 & 3z-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{8z-4}{5}$$

Logo a solución no caso $k=-1$ é $\left(\frac{7z-1}{5},\frac{8z-4}{5},z\right)$, con $z\in\mathbb{R}$.

1	

5. Calcular o determinante da matriz $B^{-1}\cdot C$ sabendo que $det\ B=2$, que $C=(C_1+C_2,3C_2)$ e que $det\ (C_1,C_2)=4$, indicando as propriedades utilizadas.

Polas propriedades dos determinantes sabe-se que $det\ B=2\ \Leftrightarrow\ det\ B^{-1}=\frac{1}{det\ B}=\frac{1}{2}$.

Ademais: $det\ C=det\ (C_1+C_2,3C_2)=det\ (C_1,3C_2)+det\ (C_2,3C_2)=3\cdot det\ (C_1,C_2)=3\cdot4=12$.

Utilizaron-se as propriedades “suma de colunas”, “extración de factor común a unha coluna” e “coluna múltiplo de outra coluna”, e finalmente, pola propriedade do determinante dun produto de matrices:

$$det\ B^{-1}\cdot C=det\ B^{-1}\cdot det\ C=\frac{1}{2}\cdot12=6$$