MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 10/11/2016
TEMA 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

OPCIÓN A

1 — 1. i. Enunciado do Teorema de Bolzano.

1.5 — ii. Estudar o domínio e a continuidade de $f(x)=\frac{(kx-1)\cdot(x-2)}{x-1}$, dependendo do valor de k, e estender o domínio con continuidade se é posíbel.

1.5 — iii. No caso anterior, estudar de forma razoada se a ecuación $\hat{f}(x)=sen\, x$ ten algunha solución e localizar un intervalo no que se poda atopar tal solución. [Nota: $\hat{f}$ é a función estendida.]

i. Enunciado do Teorema de Bolzano: se f é unha función contínua nun intervalo $[a,b]$, e tal que toma valores de signo oposto nos extremos do intervalo, entón $\exists\ c\in(a,b)\ /\ f(c)=0$.

ii. Ao ser un cociente de polinómios, f é unha función contínua en todo o seu domínio: $Dom\, f=\mathbb{R}-\{1\}$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(kx-1)\cdot(x-2)}{x-1}=\frac{(k-1)\cdot(-1)}{0}=\frac{1-k}{0}$$

Logo $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \Leftrightarrow k\neq 1$, caso no que temos unha discontinuidade de salto infinito, e $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \Leftrightarrow k=1$.

Neste caso resolvendo a indeterminación obtemos: $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1} x-2=-1$, e neste caso podemos definir f(1):=-1, co que resolvemos a discontinuidade evitábel.

A función estendida para $k=1$ será $\hat{f}(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x-1} & se\ \ x\neq 1\\ -1\ \ se\ \ x=1\end{cases}$, que simplificando a expresión resulta $\hat{f}(x)=x-2$.

iii. A ecuación $\hat{f}(x)=sen\, x$ equivale a $\hat{f}(x)-sen\, x=0$, e definindo $g(x):=\hat{f}(x)-sen\, x=x-2-sen\, x$, temos unha función contínua en $\mathbb{R}$.

$g(0)=0-2-sen\, 0=-2<0$ e $g(\pi)=\pi-2-sen\,\pi=\pi-2>0$; logo $g(x)$ está nas hipóteses do Teorema de Bolzano no intervalo $[0,\pi]$, asi que $\exists\ c\in(0,\pi)\ /\ g(c)=0$ e polo tanto $\hat{f}(c)=sen\, c$.

1.5 2. Calcular o límite $\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{4-x}}{2-\sqrt{x}}$.

Substituíndo obtemos unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, e multiplicando polo conxugado do denominador resulta:

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{4-x}}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{4-x}\cdot(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})\cdot(2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{4-x}\cdot(2+\sqrt{x})}{4-x} \overset{[1]}{=} \lim_{x\to 4^-} \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} = \frac{4}{0} \overset{[2]}{=} +\infty$$

[1] Simplifica-se a expresión.
[2] Como $x\to 4^-$, o numerador e o denominador son positivos. Observe-se que non ten sentido, a este respeito, o límite para $x\to 4^+$.

Tamén se pode utilizar a Regra de L'Hôpital: $\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{4-x}}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4^-} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} = \frac{2}{0} = +\infty$

2.5 3. Un segmento de lonxitude 10 divide-se en dous anacos, sobre os que se construen un triángulo equilátero mais un cuadrado respectivamente. Determinar o ponto no que se há de dividir o segmento de xeito que a suma das áreas de ambas figuras sexa mínima.

Se trazamos o segmento e designamos por x a lonxitude da base do triángulo, o cuadrado terá base $10-x$, e ademais $x\in[0,10]$.

Asi, a altura do triánguo é $h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{4x^2-x^2}{4}}=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, e polo tanto a sua área é $A_t=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

A área do cuadrado é $A_c=(10-x)^2=(x-10)^2$; e polo tanto a suma das áreas é $A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+(x-10)^2$, que é a función a optimizar.

Derivando obtemos: $A'(x)=2\frac{\sqrt{3}}{4}x+2(x-10)=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x-20$

$$A'(x)=0 \Leftrightarrow \left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x-20=0 \Leftrightarrow \left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x=20 \Leftrightarrow x=\frac{20}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{40}{4+\sqrt{3}}=\frac{40(4-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{40(4-\sqrt{3})}{16-3}=\frac{40(4-\sqrt{3})}{13}\approx 6{,}98$$

$A''(x)=2+\frac{\sqrt{3}}{2}>0\ \ \forall\ \ x\in[0,10]$; logo a función suma das áreas presenta o mínimo en $x=\frac{40(4-\sqrt{3})}{13}\approx 6{,}98$, co que o segmento inicial ficará dividido en dous de lonxitudes $6{,}98$ e $3{,}02$ sobre os que se construirán o triángulo e o cuadrado respectivamente.

A suma das áreas nese caso é $A\left(\frac{40(4-\sqrt{3})}{13}\right)\approx A(6{,}98)=\frac{6{,}98^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3{,}02^2\approx 30{,}21$.

OPCIÓN B

1 4. i. Enunciado do Teorema de Rolle.

1.5 ii. Estudar o valor de m para que a función $f(x)=\begin{cases} mx-5 & se \quad x\in(-\infty,-2) \\ x^2-1 & se \quad x\in[-2,+\infty) \end{cases}$ sexa derivábel en todo o seu domínio. Nota: utilizar a definición de derivada.

1.5 iii. No caso anterior, estudar de forma razoada se existe algun $c\in(-5,4)$ / $f'(c)=0$.

i. Enunciado do Teorema de Rolle: se f é unha función contínua nun intervalo $[a,b]$ e derivábel en (a,b), e tal que $f(a)=f(b)$, entón $\exists\ c\in(a,b)$ / $f'(c)=0$.

ii. f é contínua e derivábel en $\mathbb{R}$, agás posibelmente en $x=-2$, onde haberá que facer o estudo de xeito particular:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -2^-} mx-5=\lim_{x\to -2^+} x^2-1 \Leftrightarrow -2m-5=4-1=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2m=3+5=8 \Leftrightarrow m=-4$$

Para $m=-4$ a función fica $f(x)=\begin{cases} -4x-5 & se \quad x\in(-\infty,-2) \\ x^2-1 & se \quad x\in[-2,+\infty) \end{cases}$ resulta $f-(2)=3$, e as derivadas laterais son:

$$f'(-2^-)=\lim_{h\to -2^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to -2^-}\frac{-4(-2+h)-5-3}{h}=\lim_{h\to -2^-}\frac{-4h}{h}=-4$$

$$f'(-2^+)=\lim_{h\to -2^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to -2^+}\frac{(-2+h)^2-1-3}{h}=\lim_{h\to -2^+}\frac{4-4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to -2^+}\frac{h^2-4h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to -2^+} h-4=-4$$

Logo para $m=-4$ a función é derivábel tamén en $x=-2$ por coincidir as derivadas laterais e $f'(-2)=-4$.

iii. Para $m=-4$, f é unha función contínua e derivábel en $\mathbb{R}$, e $f(-5)=f(4)=15$, logo está nas hipóteses do Teorema de Rolle, asi que existe $c\in(-5,4)$ / $f'(c)=0$.

1.5 5. Calcular o límite $\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{1-\cos x}$.

Substituíndo obtemos unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, e pola Regra de L'Hôpital temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\, tg\, x \sec^2 x}{sen\, x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\, sen\, x}{sen\, x\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos^3 x}=2$$

2.5	

6. Representar graficamente a función $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x^2}$, indicando de forma explícita, cando menos, os seguintes elementos: pontos de corte cos eixos, asíntotas, extremos relativos e pontos de inflexión.

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}$; é unha función contínua e derivábel en todo o seu domínio.

$f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-1}=0$, condición que non se dá en nengún caso porque $e^{x-1}> \ \forall \ x\in\mathbb{R}$, logo non presenta cortes cos eixos e $f(x)>0 \ \forall \ x\in Dom\ f$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x-1}}{x^2}=+\infty$; logo f presenta unha discontinuidade de salto infinito e polo tanto unha asíntota vertical en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x-1}}{x^2}=0$, xá que o numerador tende a 0 e o denominador a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{x^2}\overset{[2]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{2x}\overset{[2]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{2}=+\infty$$

Logo existe unha asíntota horizontal $y=0$ en $-\infty$.

É posíbel que exista asíntota oblícua en $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{x-1}}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{x^3}\overset{[2]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{3x^2}\overset{[2]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{6x}\overset{[2]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{6}=+\infty$$, logo non hai tal asíntota.

$$f'(x)=\frac{e^{x-1}\cdot x^2-e^{x-1}\cdot 2x}{x^4}=\frac{xe^{x-1}-2e^{x-1}}{x^3}=\frac{(x-2)e^{x-1}}{x^3}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)e^{x-1}=0 \Leftrightarrow x=2$, polo que temos un posíbel extremo relativo.

$$f''(x)=\frac{[e^{x-1}+(x-2)e^{x-1}]x^3-(x-2)e^{x-1}\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{e^{x-1}(x+x^2-2x-3x+6)}{x^4}=\frac{e^{x-1}(x^2-4x+6)}{x^4}$$

$f''(2)=\frac{e}{8}>0 \Rightarrow f$ presenta un mínimo relativo en $x=2$, con $f(2)=\frac{e}{4}$; logo o mínimo está no ponto $A\left(2,\frac{e}{4}\right)$.

$f'(-1)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \ \forall \ x\in(-\infty,0)$, $f'(1)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \ \forall \ x\in(0,2)$ e $f'(3)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \ \forall \ x\in(2,+\infty)$.

Logo f é monótona crecente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ e monótona decrecente en $(0,2)$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 6}}{2}=2\pm\frac{\sqrt{-8}}{4}\notin\mathbb{R}$, logo a función non presenta pontos de inflexión.

$f''(-1)>0 \Rightarrow f''(x)>0 \ \forall \ x\in(-\infty,0)$ e $f''(1)>0 \Rightarrow f''(x)>0 \ \forall \ x\in(0,+\infty)$, polo que f é convexa en todo o seu domínio.

[1] Resolución das indeterminacións usando a Regra de L'Hôpital.

A gráfica resulta a da figura.