MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 19/04/2016

REC
- □ CINT — EXCS 5-10 (10 PTOS)
- □ MDSL — EXCS 11-16 (10 PTOS)
- □ CDIF & CINT — EXCS 1-7, 9 (15 PTOS)
- □ CINT & MDSL — EXCS 5-7, 9, 11-13, 15 (14.5 PTOS)

Exames e Textos de Matemática de Pepe Sacau ten unha licenza Creative Commons Atribución Compartir igual 4.0 Internacional

NOTA: QUEN TEÑA QUE RECUPERAR VÁRIOS TEMAS DEBERÁ OBTER UN MÍNIMO DE 5 PTOS EN CADA UN DELES

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 — 1. i. Estudar, dependendo do valor de k, a continuidade da función $f(x)=\frac{kx^2-4}{x+2}$, e indicar se é posíbel en algun caso estender o seu domínio con continuidade.

1 — ii. Usando a definición de derivada, obter o valor de k para que $f'(1)=0$.

i. A función $f(x)$ é contínua en todo o seu domínio, por ser cociente de funcións contínuas. Como $Dom\, f=\mathbb{R}-\{-2\}$, estudaremos en particular a continuidade en $x=-2$.

Para $x=-2$ temos que $\lim_{x\to-2}\frac{kx^2-4}{x+2}=\frac{4k-4}{0}$. Este límite será ∞ se $k\neq 1$ e será unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$ no caso de que $k=1$. Polo tanto se $k\neq 1$, $f(x)$ presentará unha discontinuidade de salto infinito en $x=-2$.

Se $k=1$ resulta $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2} x-2=-4$, asi que $f(x)$ presentará unha discontinuidade de tipo evitábel en $x=-2$.

Neste ultimo caso, é posíbel estender o domínio da función con continuidade a toda a recta real, definindo $f(-2):=-4$, de xeito que a función estendida toma a forma $\hat{f}(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x+2} & se\ \ x\neq-2\\ -4 & se\ \ x=-2\end{cases}$ ou tamén $\hat{f}(x)=x-2$, que é contínua en $\mathbb{R}$.

ii. A derivada en $x=1$ é:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{k(1+h)^2-4}{1+h+2}-\frac{k-4}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{k(1+2h+h^2)-4}{h+3}-\frac{k-4}{3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{k+2kh+kh^2-4}{h+3}-\frac{k-4}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3k+6kh+3kh^2-12-kh+4h-3k+12}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5kh+3kh^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}5k+3kh+4=5k+4$$

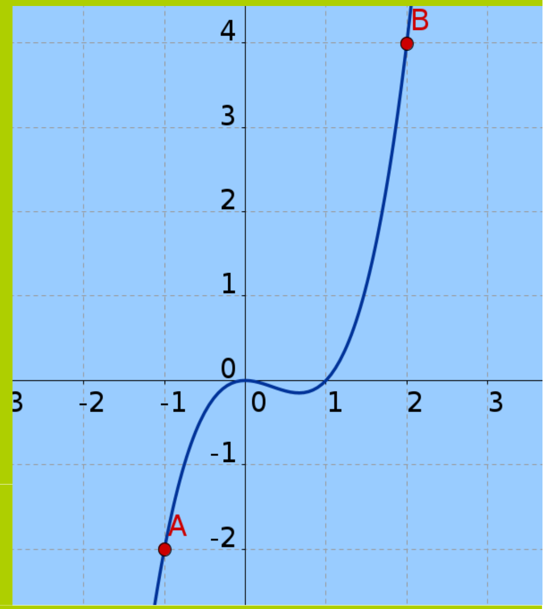
Como a condición é $f'(1)=0$, resulta $5k+4=0 \Leftrightarrow k=-\frac{4}{5}$.

1 2. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema de Bolzano.

1 ii. Estudar de xeito razoado se é posíbel afirmar que a ecuación $sen\ x+2x=1$ ten algunha solución real? Procurar de forma razonada un intervalo que conteña tal solución, se existe.

i. Sexa unha función $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ e tal que f toma valores de signo oposto nos extremos do intervalo; nestas circunstáncias $\exists\ c\ \in\ (a,b)\ /\ f(c)=0$.

Resulta evidente que se a función é contínua debe alcanzar todos os valores comprendidos entre $f(a)$ e $f(b)$, entre os que está 0, xá que $f(a)$ e $f(b)$ son de signo oposto. A única posibilidade de que non sexa asi é que a función sexa discontínua.



ii. $sen\ x+2x=1\ \Leftrightarrow\ sen\ x+2x-1=0$

Se definimos $f(x)=sen\ x+2x-1$, esta función é contínua en $\mathbb{R}$, e ademais $f(0)=-1<0$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi>0$, logo está nas hipóteses do Teorema de Bolzano, polo que:

$\exists\ c\ \in\ (0,\pi)\ /\ f(c)=0$, que equivale a afirmar que a ecuación ten polo menos unha solución no intervalo $(0,\pi)$.

2 3. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, indicando de forma explícita, como mínimo, os pontos de corte cos eixos, asíntotas, extremos relativos e pontos de inflexión.

<u>Domínio, continuidade e derivabilidade</u>

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ e f é contínua e derivábel en todo o seu domínio.

<u>Cortes cos eixos</u>

Corte OX : $f(x)\neq 0\ \ \forall\ x\ \in\ Dom\ f\ \Rightarrow\ \ f$ non presenta pontos de corte co eixo OX.
Corte OY : $0\ \notin\ Dom\ f\ \Rightarrow\ \ f$ non presenta pontos de corte co eixo OY.

<u>Simetria</u> $f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x}=\frac{x^2+1}{-x}=-\frac{x^2+1}{x}=-f(x)\ \Rightarrow\ \ f$ presenta unha simetria de xiro (simetria impar).

__Asíntotas__

- horizontais: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\infty$, logo non hai asíntotas horizontais.

- verticais: $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\infty$, asi que hai unha asíntota vertical en $x=0$, de xeito que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=-\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$.

- oblícuas:
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$ e $\lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, asi que existe unha asíntota oblícua $y=x$, tanto no caso $x\to-\infty$ como no caso $x\to+\infty$.

__Derivadas__

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}\ ;\ f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

__Extremos e monotonia__

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$; como $f''(1)>0$ e $f''(-1)<0$, f presenta un mínimo relativo en $A(1,2)$ e un máximo relativo en $B(-1,-2)$.

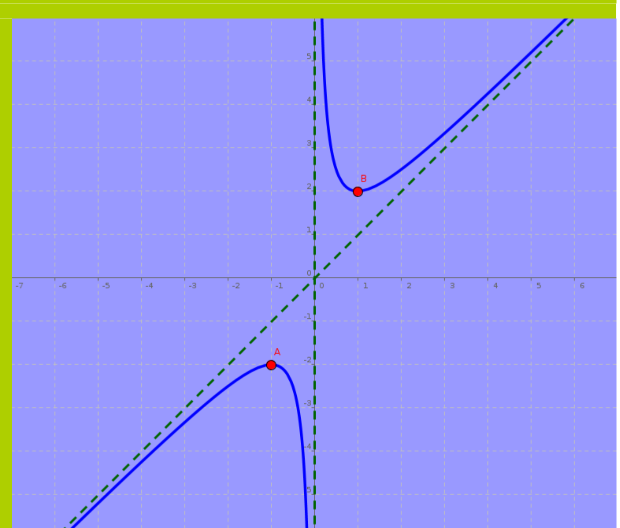
$f'(-2)>0 \Rightarrow f'(x)>0\ \forall\ x\in(-\infty,-1)$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow f'(x)<0\ \forall\ x\in(-1,0)$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow f'(x)<0\ \forall\ x\in(0,1)$

$f'(2)>0 \Rightarrow f'(x)>0\ \forall\ x\in(1,+\infty)$

Polo tanto f é monótona crecente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e monótona decrecente en $(-1,0)\cup(0,1)$.



__Inflexións e curvatura__

$f''(x)\neq 0\ \forall\ x\in Dom\ f$; logo non presenta pontos de inflexión.

$f''(-1)<0 \Rightarrow f'(x)<0\ \forall\ x\in(-\infty,0)$

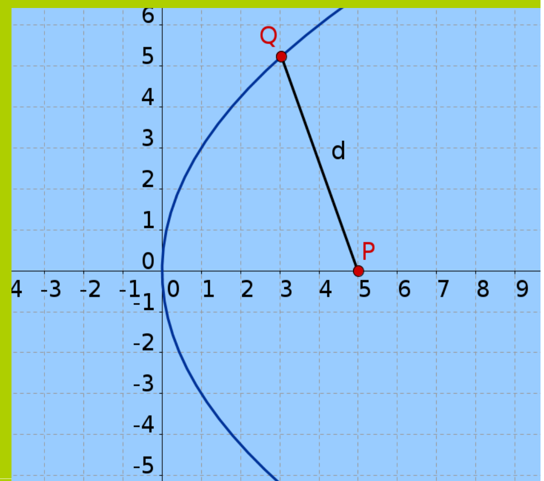
$f''(1)>0 \Rightarrow f'(x)>0\ \forall\ x\in(0,+\infty)$

Logo f é cóncava en $(-\infty,0)$ e convexa en $(0,+\infty)$.

1.5	

4. Obter os pontos da curva $y^2 = 9x$ mais próximos ao ponto $P(5,0)$.

Os pontos da curva son da forma $Q(x, \pm 3\sqrt{x})$, e a distáncia de P a Q calcula-se como o módulo do vector PQ.



$$d(PQ) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x-5)^2 + (\pm 3\sqrt{x})^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 9x^2} = \sqrt{10x^2 - 10x + 25}$$

Para obter o mínimo desta función, buscamos as raíces da sua derivada:

$$d'(x) = \frac{20x - 10}{2\sqrt{10x^2 - 10x + 25}} = \frac{10x - 5}{\sqrt{10x^2 - 10x + 25}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$d''(x) = \frac{10 \cdot \sqrt{10x^2 - 10x + 25} - (10x - 5) \cdot \dfrac{10x - 5}{\sqrt{10x^2 - 10x + 25}}}{10x^2 - 10x + 25} =$$

$$= \frac{10 \cdot (10x^2 - 10x + 25) - (10x - 5)^2}{\sqrt{(10x^2 - 10x + 25)^3}} = \frac{225}{\sqrt{(10x^2 - 10x + 25)^3}} > 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$$

Polo tanto, temos efectivamente dous mínimos e os pontos buscados son $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $Q'\left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, e a distáncia mínima é $d\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{1}{2} + 25} = \sqrt{\frac{10}{4} + 20} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

1 5. i. Definir os conceitos de primitiva e de integral definida, aportando algun exemplo de cada un deles.

1 ii. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral.

0.5 iii. Obter o ponto c ao que se refire o teorema anterior para a función $f(x)=x^2-1$ no intervalo $[-2,4]$.

i. Chama-se primitiva dunha función $f(x)$ a outra función $G(x)$ tal que $G'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Dom\ f$

Chama-se integral definida dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, á area da rexión determinada pola curva $f(x)$ e o eixo OX no intervalo $[a,b]$. Esta área considera-se positiva se a función é positiva no intervalo $[a,b]$ e negativa se a función é negativa nese intervalo. No caso de que a función tome valores de signo positivo e negativo, a integral definida é a diferenza entre a suma das rexións positivas e as negativas.

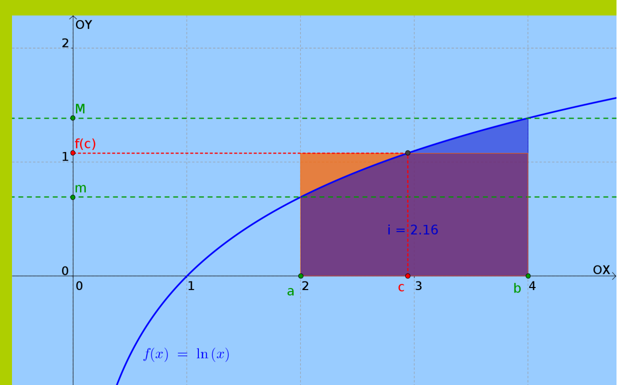
Exemplos

Dada a función $f(x)=3x^2$, unha primitiva de $f(x)$ é a función $G(x)=x^3$, xá que $G'(x)=3x^2=f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

A integral definida da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é: $\int_2^5 3x^2\,dx=\left[x^3\right]_2^5=5^3-2^3=125-8=117\,u^2$.

Nota: Para obter esta área utiliza-se a Regra de Barrow.

ii. Dada unha función $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, $\exists\ c\in(a,b)\ /\ \int_a^b f(x)\,dx=f(c)\cdot(b-a)$.



Na igualdade $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\cdot(b-a)$, o primeiro membro representa a área determinada pola curva f no intervalo $[a,b]$, e o segundo membro representa a área dun rectángulo de base o intervalo $[a,b]$ e altura $f(c)$, con $c\in(a,b)$.

Resulta imediato que debe existir tal elemento c xá que a altura do rectángulo en cuestión debe ser un valor comprendido entre os valores mínimo e máximo da función no intervalo $[a,b]$, e pola continuidade da función, esa altura debe ser imaxe de algun elemento $c\in(a,b)$.

iii. $\int_{-2}^4 (x^2-1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^4=\left(\frac{64}{3}-4\right)-\left(\frac{-8}{3}-(-2)\right)=\frac{72}{3}-6=18$

Logo $f(c)\cdot(4-(-2))=18 \Leftrightarrow 6\cdot f(c)=18 \Leftrightarrow f(c)=3 \Leftrightarrow c^2-1=3 \Leftrightarrow c^2=4 \Leftrightarrow c=\pm 2$

O valor que responde ás condicións do teorema é $c=2\in(-2,4)$.

2	

6. Calcular as integrais indefinidas: i. $\int (x+2)\, sen\, x\; dx$ ii. $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$

i. Integrando por partes, fai-se $u=x+2$ e $dv=sen\, x\; dx$, de onde resulta $du=dx$ e $v=\int sen\, x\; dx=-cos\, x$; e substituindo temos:

$$\int (x+2)\, sen\, x\; dx=(x+2)\cdot(-cos\, x)-\int -cos\, x\; dx=-(x+2)\cdot cos\, x+\int cos\, x\; dx=$$

$$=-(x+2)\cdot cos\, x+sen\, x+C$$

ii. O polinómio x^2-4x+3 descompón-se do xeito $x^2-4x+3=2(x-1)(x-3)$, polo que $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}=\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$.

Aplicando o método de integración racional temos:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A\cdot(x-3)+B\cdot(x-1)}{(x-1)(x-3)} \Rightarrow 1=A\cdot(x-3)+B\cdot(x-1)$$

E obtemos os valores de A e B: $x=3 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$ e $x=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$.

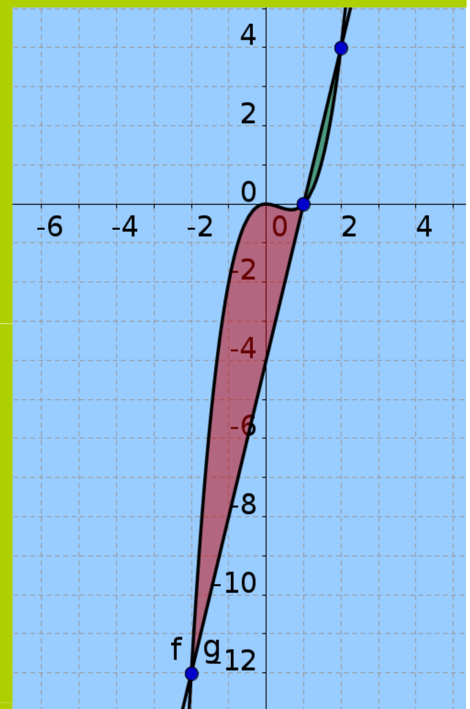
Asi que: $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}=\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\left(-\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{dx}{x-3}\right)=\frac{1}{2}\, ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$

1.5	

7. Representar o recinto delimitado polas gráficas das funcións $f(x)=x^3-x^2$ e $g(x)=4(x-1)$ e calcular a sua área.

Facendo $f(x)=g(x)$ temos que $x^3-x^2=4(x-1) \Leftrightarrow x^3-x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)=0$, logo as gráficas cortan-se en $x=-2$, $x=1$ e $x=2$.

A integral fará-se polo tanto en dous intervalos: $[-2,1]$ e $[1,2]$. No primeiro intervalo temos que $f(0)=0$ e $g(0)=-4$, polo que $f(0)>g(0) \Rightarrow f(x)>g(x)\ \forall\ x\in(-2,1)$.



No segundo intervalo $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{8}$ e $g\left(\frac{3}{2}\right)=2$, logo $f\left(\frac{3}{2}\right)<g\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f(x)<g(x)\ \forall\ x\in(1,2)$.

Asi que a área será:

$$\int_{-2}^{1}(f(x)-g(x))\,dx+\int_{1}^{2}(g(x)-f(x))\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3-x^2-4x+4)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^3+x^2+4x-4)\,dx=$$

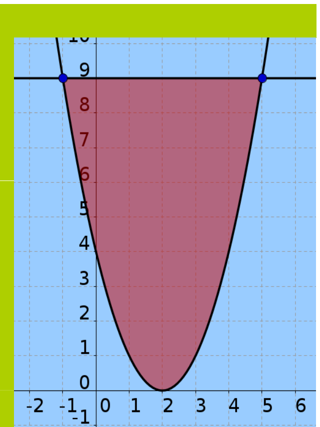
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+2x^2-4x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{1}^{2}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-2+4\right)-\left(4+\frac{8}{3}-8-8\right)+\left(-4+\frac{8}{3}+8-8\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+2-4\right)=\frac{23}{12}+\frac{24}{3}-\frac{4}{3}+\frac{23}{12}=\frac{63}{6}=\frac{21}{2}\ u^2$$

1.5	

8. Calcular o valor de $a>0$ tal que a rexión delimitada pola recta $y=a$ e a curva $y=(x-2)^2$ teña unha área de $36\ u^2$.

$(x-2)^2=a \Leftrightarrow x-2=\pm\sqrt{a} \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{a}$, e debido á simetria das duas funcións a respeito da abscisa $x=2$, podemos estudar unicamente o intervalo $[2,2+\sqrt{a}]$, de xeito que a condición é:



$$\int_{2}^{2+\sqrt{a}}(a-(x-2)^2)\,dx=18$$

$$\int_{2}^{2+\sqrt{a}}(a-(x-2)^2)\,dx=\left[ax-\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{2}^{2+\sqrt{a}}=$$

$=\left((2+\sqrt{a})a-\frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right)-2a=\frac{2\sqrt{a^3}}{3}$, e polo tanto:

$$\frac{2\sqrt{a^3}}{3}=18 \Leftrightarrow \sqrt{a^3}=27 \Leftrightarrow \sqrt{a}=3 \Leftrightarrow a=9$$

1.5	

9. Obter unha primitiva $F(x)$ da función $f(x)=2x \cdot e^{x^2}$ tal que $F(0)=-1$ e calcular a área delimitada pola curva $f(x)$ no intervalo $[-1,1]$.

As primitivas de $f(x)$ son da forma $F(x)=\int 2x\, e^{x^2}\, dx$, que é unha integral imediata, sen mais que pensar que $2x$ é a derivada de x^2 (tamén se pode obter a integral polo método de substitución).

Asi: $F(x)=\int 2x\, e^{x^2}\, dx=e^{x^2}+C$

Como $F(0)=-1$, resulta: $F(0)=e^0+C=-1 \Leftrightarrow C=-2$, logo a primitiva buscada é $F(x)=e^{x^2}-2$.

$f(x)=2x \cdot e^{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$, e ademais $f(x)<0\ \forall\ x<0$ e $f(x)>0\ \forall\ x>0$, logo a área pedida é:

$$A=-\int_{-1}^{0} 2x\, e^{x^2}\, dx+\int_{0}^{1} 2x\, e^{x^2}\, dx=-\left[e^{x^2}\right]_{-1}^{0}+\left[e^{x^2}\right]_{0}^{1}=-(e^0-e)+(e-e^0)=2(e-1)\ u^2$$

1	

10. Dada a función $G(x)=\int_1^x \frac{sen\ t}{t}\, dt$, obter de xeito razoado $G(1)$, $G'(\pi)$ e $G''(\pi)$.

Polo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, a función $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)=\frac{sen\ x}{x}$, logo $G'(x)=f(x)=\frac{sen\ x}{x}$ e $G''(x)=f'(x)=\frac{x \cdot cos\ x-sen\ x}{x^2}$.

Polo tanto temos:

$G(1)=0$ polas própria definición de función integral.

$$G'(\pi)=f(\pi)=\frac{sen\ \pi}{\pi}=0$$

$$G''(\pi)=f'(\pi)=\frac{-\pi}{\pi^2}=-\frac{1}{\pi}$$

1	
0.5	
0.5	

11. i. Definir os conceitos de independéncia linear e de rango dun conxunto dentro dun espazo vectorial V, aportando algun exemplo de cada un deles.

ii. Calcular o rango do conxunto $W=\{(1,2,1,3,2),(0,4,4,7,7),(-1,2,3,4,5)\}$.

iii. Engadir un vector ao conxunto W de xeito que o seu rango aumente nunha unidade.

i. Di-se que un conxunto W contido nun espazo vectorial V é linearmente independente se a única combinación linear dos elementos de W que dá o vector nulo é a que ten todos os escalares nulos.
Chama-se rango do conxunto W ao cardinal do maior subconxunto de W que é linearmente independente.

ii. O rango de W coincide co rango da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Triangularizando polo método de Gauss obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{F_3+F_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}^{F_3-F_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $rang\ W=2$.

iii. Para que o rango aumente nunha unidade engadiremos un vector que non sexa combinación linear dos dous primeiros, por exemplo $(0,0,0,0,1)$, xá que asi:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

1.5	

12. Resolver a ecuación matricial $AB-2X=CX$, con $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

$AB-2X=XC \Leftrightarrow AB=2X+XC \Leftrightarrow AB=2I_{3X}+XC \Leftrightarrow AB=X2I_3+XC \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB=X(2I_3+C) \Leftrightarrow X=AB(2I_3+C)^{-1}$

$2I_3+C=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow det(2I_3+C)=43\neq 0$; logo $\exists (2I_3+C)^{-1}$.

$(2I_3+C)^{-1}=\frac{1}{43}\begin{pmatrix}13 & -3 & 1\\ 4 & 9 & -3\\ -3 & 4 & 13\end{pmatrix}$, asi que:

$$X=AB(2I_3+C)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{43}\begin{pmatrix}13 & -3 & 1\\ 4 & 9 & -3\\ -3 & 4 & 13\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{43}\begin{pmatrix}7 & -1 & 5\\ 8 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13 & -3 & 1\\ 4 & 9 & -3\\ -3 & 4 & 13\end{pmatrix}=\frac{1}{43}\begin{pmatrix}72 & -10 & 75\\ -95 & 13 & 96\\ 19 & -11 & 18\end{pmatrix}$$

2	

13. Estudar a compatibilidade e resolver, nos casos en que sexa posíbel, o sistema linear $S \equiv \begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ x-3y+2z=0 \\ -3x-z=k \end{cases}$

Sexan $M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $M^*=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}$ as matrices do sistema.

$\det M=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow rang\ M \leqslant 2$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-9 \Rightarrow rang\ M=2$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & k \end{vmatrix}=-9k-27=0 \Leftrightarrow k=-3$; logo temos $rang\ M^*=2$ se $k=-3$ e $rang\ M^*=3$ se $k \neq -3$, polo que o sistema será incompatíbel se $k \neq -3$ e será compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade se $k=-3$.

Resolvendo para $k=-3$ temos: $S \equiv \begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ x-3y+2z=0 \\ -3x-z=k \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x+3y=z+3 \\ x-3y=-2z \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} z+3 & 3 \\ -2z & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{3z-9}{-9}=\frac{3-z}{3} \quad \text{e} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & z+3 \\ 1 & -2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-5z-3}{-9}=\frac{5z+3}{9} .$$

Logo a solución neste caso é $\left(\frac{3-z}{3}, \frac{5z+3}{9}, z\right) \quad \forall \ z \in \mathbb{R}$

1.5	

14. Calcular o determinante da matriz $B^{-1} \cdot C$ sabendo que $\det B=2$, que $C=(C_1+C_2, 3C_2)$ e que $\det (C_1, C_2)=4$, indicando as propriedades utilizadas.

Polas propriedades dos determinantes sabe-se que $\det B=2 \Leftrightarrow \det B^{-1}=\frac{1}{\det B}=\frac{1}{2}$.

Ademais: $\det C=\det (C_1+C_2, 3C_2)=\det (C_1, 3C_2)+\det (C_2, 3C_2)=3 \cdot \det (C_1, C_2)=3 \cdot 4=12$.

Nota: utilizaron-se as propriedades "suma de colunas", "extración de factor comun a unha coluna" e "coluna múltiplo de outra coluna".

Polo tanto, pola propriedade do determinante dun produto de matrices:

$$\det B^{-1} \cdot C=\det B^{-1} \cdot \det C=\frac{1}{2} \cdot 12=6$$

1.5 15. Resolver a ecuación $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & 1-x & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1-x \\ 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} = x \cdot [-(1-x)^3 - (-x)^3] =$$

$$= x \cdot [(x-1)^3 - x^3]$$

Logo $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \cdot [(x-1)^3 - x^3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x-1)^3 - x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x-1)^3 = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

16. Sexa S un sistema linear homoxéneo con igual número de ecuacións que de incógnitas, razoar os seguintes enunciados:

0.5 i. Se S é compatíbel indeterminado, que se pode afirmar acerca do determinante da matriz de coeficientes?

0.5 ii. E se S é compatíbel determinado?

0.5 iii. É posíbel que o sistema sexa incompatíbel?

i. Ao ser un sistema homoxéneo é sempre compatíbel, polo que para ser indeterminado abonda con que o determinante da matriz de coeficientes sexa nulo, de xeito que o rango do sistema sexa inferior ao número de incógnitas.

ii. Para que o sistema sexa compatíbel determinado, a matriz de coeficientes debe ser regular, é dicer, o seu determinante há de ser distinto de 0 .

iii. É imposíbel que o sistema sexa incompatíbel, xá que cando menos ten por solución a trivial. Dito de outra maneira, os rangos da matriz de coeficientes e ampliada coincide sempre, xá que a coluna de termos independentes, por ser nula, non incrementa o rango da matriz de coeficientes.