NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 1. i. Dar as definicións de combinación linear e de rango dun conxunto e aportar algún exemplo de ambas dentro do espazo vectorial das matrices $M_{1,3}(\mathbb{R})$.

1 ii. Estudar o rango do conxunto $W=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-5\\2\end{pmatrix}\right\} \subset M_{4,1}(\mathbb{R})$.

0.5 iii. Suprimir de forma razoada un dos elementos de W de xeito que non varie o seu rango.

i. Nun espazo vectorial V, di-se que un vector v é combinación linear dos vectores u_1, u_2, ..., u_k se existen escalares α_1, α_2, ..., α_k tais que $v=\alpha_1 \cdot u_1+\alpha_2 \cdot u_2+\ldots+\alpha_k \cdot u_k$.
Se W é un conxunto de vectores $\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$ nun espazo vectorial, chama-se rango do conxunto W ao maior número de elementos de W que forman un subconxunto linearmente independente.

En $M_{1,3}(\mathbb{R})$ a matriz $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ é combinación linear das matrices $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\end{pmatrix}$, xá que $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

O conxunto $W=\{\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\end{pmatrix}\} \subset M_{1,3}(\mathbb{R})$ ten rango 2, debido a que o primeiro dos seus elementos é combinación linear dos outros dous e estes dous últimos forman un subconxunto de W linearmente independente, logo $rang\ W=2$.

ii. Sexa $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\2 & 0 & 4\\-1 & -1 & -5\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ a matriz formada polas matrices coluna de W; asi $rang\ W=rang\ A$, e utilizando o método de Gauss temos:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\2 & 0 & 4\\-1 & -1 & -5\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}F_2+2F_1\\F_3-F_1\\F_4+F_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 2 & 6\\0 & -2 & -6\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}F_3+F_2\\2F_4-F_2\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 2 & 6\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
, logo $rang\ W=rang\ A=2$.

iii. Suprimindo o último dos elementos, por exemplo, obtemos o subconxunto $W'=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\} \subset W$, que ten claramente rango 2 porque os seus elementos non son múltiplos un do outro.

1 2. Resolver a ecuación matricial $I_3 - 2X = XM$, onde I_3 é a matriz unitária de orden 3 e $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[Nota: a inversa deberá calcular-se por determinantes]

$$I_3 - 2X = XM \Leftrightarrow -2X - XM = -I_3 \Leftrightarrow 2X + XM = I_3 \Leftrightarrow X \cdot (2I_3 + M) = I_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = I_3 \cdot (2I_3 + M)^{-1} = (2I_3 + M)^{-1}$$

$$2I_3 + M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$det(2I_3 + M) = 9 \neq 0 \Rightarrow \exists\ (2I_3 + M)^{-1}$; logo $X = (2I_3 + M)^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ -9 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

2 3. Estudar a compatibilidade do sistema $\begin{cases} 4x - y + kz = 5 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ kx + y + z = -3 \end{cases}$ en función do valor de k e resolvé-lo nos casos en que sexa posíbel, utilizando a regra de Cramer.

As matrices son $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & k \\ 2 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} 4 & -1 & k & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ k & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$det\ M = \begin{vmatrix} 4 & -1 & k \\ 2 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2k^2 + 3k + 14 = -2 \cdot (k+2) \cdot \left(k - \frac{7}{2}\right)$$

Polo tanto: $det\ M = 0$ se $k = -2$ ou $k = \frac{7}{2}$.

No caso xeral, $k \neq -2$ e $k \neq \frac{7}{2}$, temos que $rang\ M = rang\ M^* = 3$, logo é un sistema compatíbel determinado e ademais é un sistema de Cramer, por ser $det\ M \neq 0$.

No caso $k = -2$ a matriz ampliada é $M^* = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, logo $\{F_1, F_2\}$ e $\{C_1, C_2\}$ son conxuntos linearmente independentes e polo tanto $rang\ M = 2$ e $rang\ M^* \geqslant 2$.

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$; asi que $rang\ M^* = 2$, logo se $k = -2$ o sistema é compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade.

E no caso $k=\frac{7}{2}$ a matriz ampliada é $M^*=\begin{pmatrix} 4 & -1 & \frac{7}{2} & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=10\neq 0$, logo $\{F_1, F_2\}$ e $\{C_1, C_2\}$ son conxuntos linearmente independentes e polo tanto $rang\ M=2$ e $rang\ M^*\geqslant 2$.

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{vmatrix}=-55\neq 0$; asi que $rang\ M^*=3$, logo o sistema é incompatíbel.

A solución no caso xeral, $k\neq -2$ e $k\neq \frac{7}{2}$ é:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & k \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 & k \\ 2 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{6k+12}{-2\cdot(k+2)\cdot\left(k-\frac{7}{2}\right)}=-\frac{6}{2k-7}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & k \\ 2 & 0 & -1 \\ k & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 & k \\ 2 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-11k-22}{-2\cdot(k+2)\cdot\left(k-\frac{7}{2}\right)}=\frac{11}{2k-7}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ k & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 & k \\ 2 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-10k-20}{-2\cdot(k+2)\cdot\left(k-\frac{7}{2}\right)}=\frac{10}{2k-7}$$

Logo a solución é $\left(-\frac{6}{2k-7}, \frac{11}{2k-7}, \frac{10}{2k-7}\right)\ \forall\ k\neq -2,\ k\neq \frac{7}{2}$ **.**

No caso particular $k=-2$, o sistema pode transformar-se en $\begin{cases} 4x-y=5+2z \\ 2x+2y=z \end{cases}$, e por Cramer resulta: $x=\frac{\begin{vmatrix} 5+2z & -1 \\ z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{5z+10}{10}=\frac{z+2}{2}$ e $y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 5+2z \\ 2 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-10}{10}=-1$

A solución por tanto, neste caso, é $\left(\frac{z+2}{2}, -1, z\right)\ z\in\mathbb{R}$.

1	

4. Sexa M unha matriz cuadrada de orde 3, tal que $\det M = 5$. Obter de xeito razoado o determinante da matriz $-2 \cdot M^{-1} \cdot M^t$.

A matriz $-2 \cdot M^{-1} \cdot M^t$ pode expresar-se como $-2 I_3 \cdot M^{-1} \cdot M^t$, e polas propiedades dos determinantes:

$$\det\left(-2 I_3 \cdot M^{-1} \cdot M^t\right) = \det\left(-2 I_3\right) \cdot \det M^{-1} \cdot \det M^t$$

$$\det M = 5 \Rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{\det M} = \frac{1}{5}$$

Ademais o determinante dunha matriz e o da sua trasposta coinciden, polo tanto $\det M^t = \det M = 5$

E finalmente $\det\left(-2 I_3\right) = (-2)^3 = -8$

Logo: $\det\left(-2 I_3 \cdot M^{-1} \cdot M^t\right) = \det\left(-2 I_3\right) \cdot \det M^{-1} \cdot \det M^t = -8 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5 = -8$

1	

5. i. Enunciado do Teorema de Rouché-Fröbenius.

1.5	

ii. Estudar a compatibilidade do sistema $S \equiv \begin{cases} x - y - 3z = -1 \\ 3x - 3y - z = 1 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases}$ e resolvé-lo, se é posíbel, utilizando a regra de Cramer.

i. Sexa S un sistema linear e sexan M e M^* as matrices de coeficientes e ampliada do sistema; entón o sistema é compatíbel $\Leftrightarrow \text{rang } M = \text{rang } M^*$. Ademais, neste caso, o sistema é determinado $\Leftrightarrow \text{rang } M = n$ e será indeterminado $\Leftrightarrow \text{rang } M < n$, onde n é o número de incógnitas de S. A diferenza entre o número de incógnitas e o rango de M chama-se grau de liberdade do sistema.

ii. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ son as matrices de coeficientes e ampliada.

$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, logo $\{F_1, F_2\}$ e $\{C_2, C_3\}$ son conxuntos linearmente independentes e polo tanto $\text{rang } M \geq 2$.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, asi que $\text{rang } M = 2$.

$\begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, asi que $\text{rang } M^* = 3$, logo o sistema é incompatíbel e polo tanto non procede a sua resolución.

6. Razoar se son certas ou falsas as seguintes afirmacións:

0.5 i. En todo sistema linear incompatíbel, a coluna de termos independentes non pode ser combinación linear das colunas de coeficientes.

0.5 ii. Un sistema linear homoxéneo con matriz de coeficientes cuadrada e singular pode ser compatíbel determinado.

i. É certo, porque do contrário o rango das matrices de coeficientes M e ampliada M^* serian o mesmo e o sistema seria compatíbel.

ii. É falso: todo sistema homoxéneo é compatíbel, xá que polo menos ten unha solución, que é a trivial. Para ser determinado o rango da matriz de coeficientes debe coincidir co número de incógnitas e polo tanto o seu determinante debe ser distinto de 0, xá que do contrário o seu rango seria inferior ao seu orde e, por conseguinte, inferior tamén ao número de incógnitas. Como conclusión, un sistema nestas circuunstáncias debe ser compatíbel indeterminado.