MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 07/03/2016

REC ☐ 1 CÁLCULO DIFERENCIAL EXS 1-6 (10 PTOS)

☐ 2 CÁLCULO INTEGRAL EXS 7-12 (10 PTOS)

☐ TODO CDIF EXCS 3, 4, 5, 6 (7.5 PTOS)

CINT EXCS 8, 9, 10, 11, 12 (7.5 PTOS)

NOTA: QUEN TEÑA QUE RECUPERAR AMBOS TEMAS DEBERÁ OBTER UN MÍNIMO DE 5 PTOS EN CADA UN DELES

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 1. i. Estudar a continuidade da función $f(x)=\frac{kx^2-1}{x+1}$ dependendo do valor de k e indicando os tipos de discontinuidade que presenta en cada caso.

0.5 ii. Estudar se é posíbel estender o domínio de continuidade de $f(x)$.

i. A función $f(x)$ é contínua en todo o seu domínio, por ser cociente de funcións contínuas. Como $Dom\, f=\mathbb{R}-\{-1\}$, estudaremos en particular a continuidade en -1.

Para $x=-1$ temos que $\lim_{x\to-1}\frac{kx^2-1}{x+1}=\frac{k-1}{0}$. Este límite será ∞ se $k\neq 1$ e será unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$ no caso de que $k=1$. Polo tanto se $k\neq 1$, $f(x)$ presentará unha discontinuidade de salto infinito en $x=-1$.

Se $k=1$ resulta $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1} x-1=-2$, asi que $f(x)$ presentará unha discontinuidade de tipo evitábel en $x=-1$.

ii. O domínio de continuidade pode estender-se sempre que a función presente discontinuidades de tipo evitábel, cousa que ocorre se $k=1$.

Neste caso a función pode estender-se con continuidade en $x=-1$ definindo $\hat{f}(-1):=-2$.

A función estendida é $\hat{f}(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} & \forall\ x\neq -1\\ -2 & se\ \ x=-1\end{cases}$ ou tamén $\hat{f}(x)=x-1$, que é contínua en $\mathbb{R}$.

1	

2. Calcular os límites: i. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ ii. $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}$

i. Substituíndo x por $-\infty$ obtemos unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que podemos resolver multiplicando polo conxugado do numerador:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=0$$

ii. $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$ é unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que podemos resolver utilizando a regra de L'Hôpital duas veces consecutivas:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

1	
1	

3. i. Estudar a derivabilidade da función $f(x)=x^3+x$ en $x=2$ utilizando a definición de derivada.
ii. Obter a ecuación da recta tanxente á curva $f(x)$ no seu ponto de inflexión.

i. $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3+(2+h)-10}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3+2+h-10}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h^2+13h}{h}=\lim_{h\to 0} h^2+6h+13=13$, logo $f(x)$ é derivábel en $x=2$ e $f'(2)=13$.

ii. Para obter as inflexións de $f(x)$ calcula-se a segunda derivada:

$f'(x)=3x^2+1$ e $f''(x)=6x$, e polo tanto $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Ademais $f'''(x)=6\neq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$, logo $f(x)$ presenta un ponto de inflexión en $O(0,0)$ no que a pendente é $f'(0)=1$.

Calcularemos logo a tanxente á curva $f(x)$ en $x=0$, que será a recta $t \equiv y-0=f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow t \equiv y=x$

1	

4. i.Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial.

0.5	

ii.Calcular o ponto ao que se refire este teorema para a función $f(x)=\frac{x-1}{x}$ no intervalo $[1,5]$.

i.Sexa unha función $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ e derivábel en (a,b); nestas circunstáncias $\exists\ c \in (a,b)\ /\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

A expresión $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dá a taxa de variación méia da función no intervalo $[a,b]$, que é a pendente da recta secante que pasa polos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$, mentres que $f'(c)$ representa a taxa de variación instantánea de f en c, ou equivalentemente, a pendente da recta tanxente á curva no ponto $(c,f(c))$. A igualdade entre ambas expresións pode-se intrepretar como a existéncia de algun ponto c no intervalo (a,b) onde coinciden ambas pendentes, ou sexa, onde a secante e a tanxente son paralelas.

ii. $f(x)=\frac{x-1}{x}$, e a taxa de variación méia no intervalo $[1,5]$ é: $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{\frac{4}{5}-0}{4}=\frac{1}{5}$

A derivada é $f'(x)=\frac{x-(x-1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}$, e igualando obtemos:

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

Das duas posíbeis solucións, a que responde ás condicións do teorema é $x_1=\sqrt{5} \in [1,5]$ xá que $x_2=-\sqrt{5} \notin [1,5]$.

2	

5. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, indicando de forma explícita, como mínimo, os pontos de corte cos eixos, asíntotas, extremos relativos e pontos de inflexión.

Domínio, continuidade e derivabilidade

$Dom\, f=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ e f é contínua e derivábel en todo o seu domínio.

Cortes cos eixos

Corte OX: $f(x)\neq 0\ \ \forall\ x \in Dom\, f \Rightarrow$ f non presenta pontos de corte co eixo OX.
Corte OY: $0 \notin Dom\, f \Rightarrow$ f non presenta pontos de corte co eixo OY.

Simetria $f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x}=\frac{x^2+1}{-x}=-\frac{x^2+1}{x}=-f(x) \Rightarrow$ f presenta unha simetria de xiro (simetria impar).

Asíntotas

- horizontais: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty$, logo non hai asíntotas horizontais.

- verticais: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x} = \infty$, asi que hai unha asíntota vertical en $x=0$, de xeito que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$.

- oblícuas:
$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, asi que existe unha asíntota oblícua $y=x$, tanto no caso $x \to -\infty$ como no caso $x \to +\infty$.

Derivadas

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \; ; \; f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Extremos e monotonia

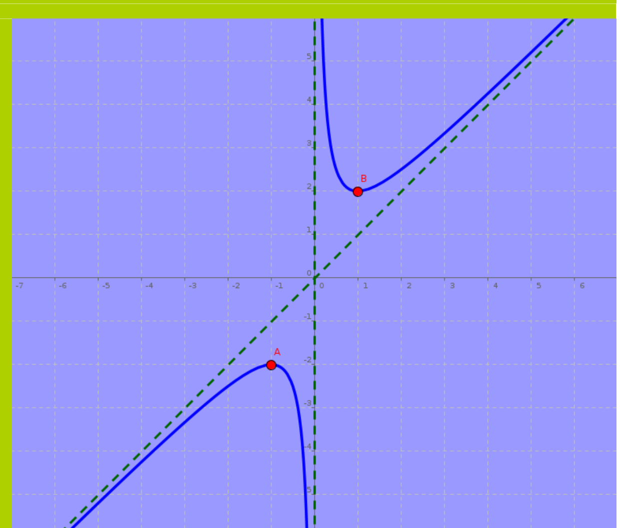
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$; como $f''(1)>0$ e $f''(-1)<0$, f presenta un mínimo relativo en $A(1,2)$ e un máximo relativo en $B(-1,-2)$.

$f'(-2)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \;\; \forall \;\; x \in (-\infty,-1)$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \;\; \forall \;\; x \in (-1,0)$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \;\; \forall \;\; x \in (0,1)$

$f'(2)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \;\; \forall \;\; x \in (1,+\infty)$



Polo tanto f é monótona crecente en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ e monótona decrecente en $(-1,0) \cup (0,1)$.

Inflexións e curvatura

$f''(x) \neq 0 \;\; \forall \;\; x \in Dom\, f$; logo non presenta pontos de inflexión.

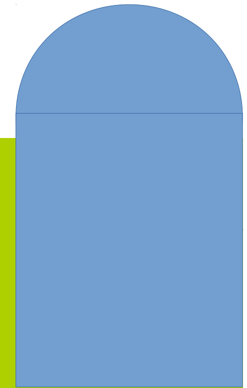
$f''(-1)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \;\; \forall \;\; x \in (-\infty,0)$

$f''(1)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \;\; \forall \;\; x \in (0,+\infty)$

Logo f é cóncava en $(-\infty,0)$ e convexa en $(0,+\infty)$.

2

6. Calcular as dimensións (raio do semicírculo e altura do rectángulo) da figura sabendo que o seu perímetro é $10\ cm$ e de xeito que a sua área sexa máxima.



Se chamamos r ao raio do semicírculo e h á altura do rectángulo, resulta que o perímetro é $P(r,h)=\pi r+2(r+h)$ e a área $A(r,h)=\frac{\pi r^2}{2}+2rh$ [1].

Como o perímetro há de ser $10\ cm$, temos que:

$$P(r,h)=\pi r+2(r+h)=10 \Leftrightarrow h=\frac{10-\pi r-2r}{2}=5-\frac{\pi r}{2}-r=5-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)r$$

Substituíndo en [1] resulta:

$$A(r)=\frac{\pi r^2}{2}+2r\left(5-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)r\right)=\frac{\pi r^2}{2}+10r-\pi r^2-2r^2=10r-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)r^2$$

$A'(r)=10-(\pi+4)r$, e igualando a 0 obtemos: $A'(r)=10-(\pi+4)r=0 \Leftrightarrow r=\frac{10}{\pi+4}$.

$A''(r)=-(\pi+4)<0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, logo temos un máximo da área para $r=\frac{10}{\pi+4}$.

$$h=5-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)r=5-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot\frac{10}{\pi+4}=\frac{5\pi+20-5\pi-10}{\pi+4}=\frac{10}{\pi+4}$$

As dimensións da figura son, polo tanto, $r=\frac{10}{\pi+4}$, $h=\frac{10}{\pi+4}$ e a área máxima é:

$$A\left(\frac{10}{\pi+4}\right)=10\left(\frac{10}{\pi+4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)\left(\frac{10}{\pi+4}\right)^2=\frac{100\pi+400-50\pi-200}{(\pi+4)^2}=\frac{50\pi+200}{(\pi+4)^2}=\frac{50}{\pi+4}\ cm^2$$

1	

7. i. Definir os conceitos de integral definida e de función integral nun intervalo $[a,b]$, aportando algun exemplo de cada un deles.

0.5	

ii. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

1	

iii. Dada a función definida como $G(x)=\int_x^{\pi} t^5 \cos t\, dt$, calcular de xeito razoado $G(\pi)$ e $G'(\pi)$.

i. Chama-se integral definida dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $\int_a^b f(x)\, dx$, á area da rexión determinada pola curva $f(x)$ e o eixo OX no intervalo $[a,b]$. Esta área considera-se positiva se a función é positiva no intervalo $[a,b]$ e negativa se a función é negativa nese intervalo. No caso de que a función tome valores de signo positivo e negativo, a integral definida é a diferenza entre a suma das rexións positivas e as negativas.

Exemplo

A integral definida da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é: $\int_2^5 3x^2\, dx = [x^3]_2^5 = 5^3-2^3=125-8=117\, u^2$.

Nota: Para obter esta área utiliza-se a Regra de Barrow.

Chama-se función integral dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)\, dt$, á función que a cada $x \in [a,b]$ asócia-lle a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a,x]$.

Exemplo

A función integral da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é a función $F(x)=\int_2^x 3t^2\, dt = [t^3]_2^x = x^3-2^3=x^3-8$.

Nota: Para obter esta función utiliza-se tamén a Regra de Barrow.

ii. Dada unha función $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, a función $F(x)=\int_a^x f(t)\, dt$ (función integral de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$) é unha primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, ou de outro xeito, $F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in [a,b]$.

iii. Pola própria definición da integral definida temos que $G(\pi)=\int_\pi^\pi t^5 \cos t\, dt=0$.

Utilizando as propriedades da integral definida sabe-se que $G(x)=\int_x^\pi t^5 \cos t\, dt = -\int_\pi^x t^5 \cos t\, dt = \int_\pi^x -t^5 \cos t\, dt$, e polo tanto $G'(x)=-x^5 \cos x$.

Asi que $G'(\pi)=-\pi^5 \cdot \cos\pi=\pi^5$

1 8. Calcular as integrais indefinidas: i. $\int (x-1)\cos x \, dx$ ii. $\int \frac{5\,dx}{2x^2-6x+4}$

i. Integrando por partes, fai-se $u=x-1$ e $dv=\cos x\,dx$, de onde resulta $du=dx$ e $v=\int \cos x\,dx=\operatorname{sen} x$; e substituindo temos:

$$\int (x-1)\cos x\,dx = (x-1)\cdot \operatorname{sen} x-\int \operatorname{sen} x\,dx = (x-1)\cdot \operatorname{sen} x+\cos x+C$$

ii. O polinómio $2x^2-6x+4$ descompón-se do xeito $2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)$, polo que $\int \frac{5\,dx}{2x^2-6x+4}=\frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$.

Aplicando o método de integración racional temos:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A\cdot(x-2)+B\cdot(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow 1=A\cdot(x-2)+B\cdot(x-1)$$

E obtemos os valores de A e B: $x=2 \Rightarrow B=1$ e $x=1 \Rightarrow A=-1$.

Asi que: $\int \frac{5\,dx}{2x^2-6x+4}=\frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}=\frac{5}{2}\left(-\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{dx}{x-2}\right)=\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$

2 9. Representar o recinto delimitado polas gráficas das funcións $f(x)=x^3-x$ e $g(x)=x^3-x^2-4x$ e a recta vertical $x=2$ e calcular a sua área.

Facendo $f(x)=g(x)$ temos que $x^3-x=x^3-x^2-4x \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\cdot(x+3)=0$, logo as gráficas cortan-se en $x=0$ e $x=-3$.

A integral fará-se polo tanto en dous intervalos: $[-3,0]$ e $[0,2]$.

No primeiro intervalo temos que $f(-1)=0$ e $g(-1)=2$, polo que:

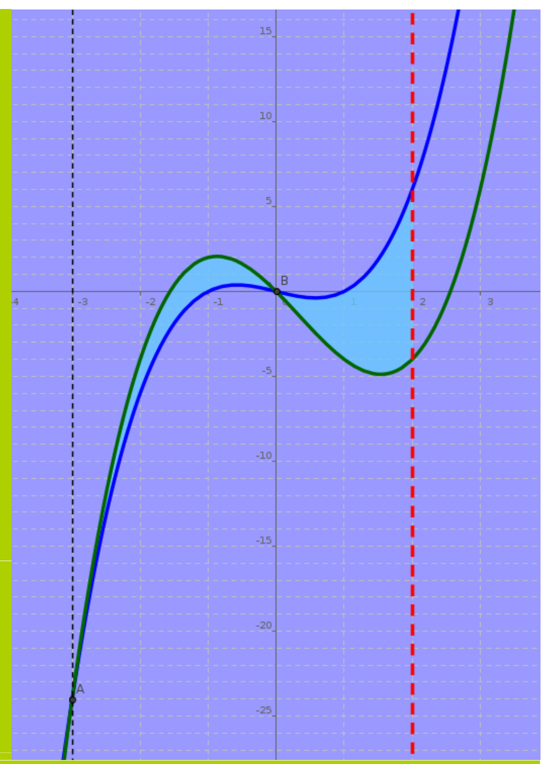
$$g(-1)>f(-1) \Rightarrow g(x)>f(x) \quad \forall \quad x\in(-3,0)$$

No segundo intervalo $f(1)=0$ e $g(1)=-4$, logo:

$$f(1)>g(1) \Rightarrow f(x)>g(x) \quad \forall \quad x\in(0,2)$$

Asi que a área será

$$\int_{-3}^{0}(g(x)-f(x))\,dx+\int_{0}^{2}(f(x)-g(x))\,dx=$$



$$=\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{2}(x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=-9+\frac{27}{2}+\frac{8}{3}+6=\frac{79}{6}\ u^2$$

1.5

10. Calcular o valor de $m>0$ tal que a área da rexión delimitada polas curvas $y=x^3$ e $y=mx$ sexa de $18\ u^2$.

$x^3=mx \Leftrightarrow x^3-mx=0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2-m)=0$, logo as curvas cortan-se en $x=0$ e $x^2=m \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{m}$.

Debido á simetria das duas funcións podemos estudar unicamente o intervalo $[0,\sqrt{m}]$, de xeito que a condición é:

$$\int_0^{\sqrt{m}} (mx-x^3)\ dx=9$$

$$\int_0^{\sqrt{m}} (mx-x^3)\ dx=\left[\frac{mx^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{m}}=\frac{m^2}{2}-\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{4}$$, e polo tanto:

$$\frac{m^2}{4}=9 \Leftrightarrow m^2=36 \Leftrightarrow m=\pm 6$$

A solución polo tanto é $m=6>0$.

1.5

11. Obter unha primitiva $F(x)$ da función $f(x)=\ln x$ tal que $F(1)=0$ e calcular a área delimitada pola curva $f(x)$ no intervalo $[1,+\infty)$.

As primitivas de $f(x)$ son da forma $F(x)=\int \ln x\ dx$.
Integrando por partes obtemos:

$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$ e $dv=dx \Rightarrow v=x$, e polo tanto:

$$F(x)=\int \ln x\ dx=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\ln x-x=x(\ln x-1)+C$$

$F(1)=\ln 1-1+C=-1+C=0 \Leftrightarrow C=1$, logo a primitiva buscada é $F(x)=x(\ln x-1)+1$.

Como a función é positiva en $(1,+\infty)$, a área debe entender-se como o límite de $\int_1^{\lambda} \ln x\ dx$ cando $\lambda\rightarrow+\infty$, ou sexa:

$$\int_1^{+\infty} \ln x\ dx=\lim_{\lambda\rightarrow+\infty}\int_1^{\lambda} \ln x\ dx=\lim_{\lambda\rightarrow+\infty}[(x-1)\ln x]_1^{\lambda}=\lim_{\lambda\rightarrow+\infty}(\lambda-1)\ln\lambda=+\infty$$

Estamos polo tanto ante unha área non finita.

1.5	

12. Obter de xeito razoado o valor da integral $\int_{-3}^{3}[4\cdot f(x)+5]\,dx$ sabendo que $f(x)$ é unha función simétrica par e que $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ tal que $F(0)=2$ e $F(3)=7$.

Se definimos $g(x):=4\cdot f(x)+5$, como a función $f(x)$ presenta simetria par resulta:

$g(-x):=4\cdot f(-x)+5=4\cdot f(x)+5=g(x)$; logo $g(x)$ tamén ten simetria par, asi que:

$$\int_{-3}^{3}[4\cdot f(x)+5]\,dx=2\cdot\int_{0}^{3}[4\cdot f(x)+5]\,dx$$

Integrando temos:

$$\int_{0}^{3}[4\cdot f(x)+5]\,dx=4\cdot\int_{0}^{3}f(x)\,dx+\int_{0}^{3}5\,dx=4\cdot[F(x)]_{0}^{3}+[5x]_{0}^{3}=4\cdot[F(3)-F(0)]+15=$$

$$=4\cdot(7-2)+15=4\cdot 5+15=35$$

Polo tanto: $\int_{-3}^{3}[4\cdot f(x)+5]\,dx=2\cdot\int_{0}^{3}[4\cdot f(x)+5]\,dx=2\cdot 35=70$