MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 26/01/2016
TEMA 2 CÁLCULO INTEGRAL

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 1. i.Definición de primitiva dunha función e de integral definida dunha función nun intervalo.
1 ii.Obter unha primitiva $G(x)$ da función $f(x)=x-sen\ x$ tal que $G(0)=\frac{\pi}{2}$.

i.Chama-se primitiva dunha función $f(x)$ a outra función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Dom f$.

Chama-se integral definida dunha función f no intervalo $[a,b]$, e representa-se por $\int_a^b f(x)\,dx$, á area do recinto determinado pola gráfica da función f co eixo OX no intervalo $[a,b]$.
Esta área considera-se positiva se a función ten signo positivo no intervalo e negativa se f é de signo negativo. No caso de que a función tome valores positivos e negativos nese intervalo, a integral será a diferenza entre as áreas positivas e as negativas.

ii.As primitivas de $f(x)$ son da forma $G(x)=\int(x-sen\ x)\,dx=\frac{x^2}{2}+cos\ x+C$.

Como $G(0)=\frac{\pi}{2}$ temos: $G(0)=cos\ 0+C=1+C=\frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ C=\frac{\pi}{2}-1$

1 2. i.Definición de función integral e enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.
1 ii.Obter a función integral de $f(x)=e^x-1$ no intervalo $[0,3]$.

i.Chama-se función integral de f no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, á función que asócia a cada valor $x\in[a,b]$ a integral definida de f en $[a,x]$.

O Teorema Fundamental do Cálculo Integral afirma que dada unha función f definida no intervalo $[a,b]$, a función integral $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é unha primitiva de $f(x)$, é dicer: $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in[a,b]$.

ii.A función integral $F(x)$ no intervalo $[0,3]$ é da forma $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ para $x\in[0,3]$, e como consecuéncia do Teorema Fundamental, $F(x)$ é unha primitiva de f , e polo tanto esta función deberá ser da forma $F(x)=\int(e^x-1)\,dx=e^x-x+C$.

Ademais ten que ser $F(0)=\int_0^0(e^t-1)\,dt=0$, asi que: $F(0)=e^0+C=0\ \Leftrightarrow\ C=-1$, e polo tanto a función integral é $F(x)=e^x-x-1$.

2	

3. Obter as integrais indefinidas:

i. $\int x \cdot ln\, x\, dx$

ii. $\int \frac{2\, dx}{x-x^2}$

i. $\int x \cdot ln\, x\, dx$ é un produto de funcións elementares, polo que se pode integrar por partes, identificando $u = ln\ x$ e $dv = x$, co que $du = \frac{dx}{x}$ e $v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$, co que resulta:

$$\int x \cdot ln\, x\, dx = ln\ x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = ln\ x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x\, dx = ln\ x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4}(2\ ln\ x - 1) + C$$

ii. $\int \frac{2\, dx}{x-x^2}$ é unha integral racional na que o numerador ten menor grau que o denominador, polo que abonda con descompór o denominador.

$x - x^2 = x(1-x)$; polo que o integrando pode descompór-se en:

$$\frac{2}{x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} \quad \Rightarrow \quad 2 = A(1-x) + Bx \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$$

Tomando $x = 0$ obtemos $2 = A$, e tomando $x = 1$ resulta $2 = B$; polo tanto:

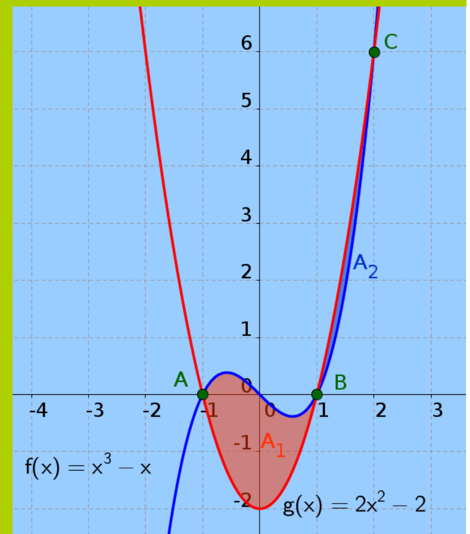
$$\int \frac{2\, dx}{x-x^2} = \int \frac{2}{x}\, dx + \int \frac{2}{1-x}\, dx = \int \frac{2}{x}\, dx - \int \frac{2}{x-1}\, dx = 2\ ln\ |x| - 2\ ln\ |x-1| + C = 2\, ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C =$$

$$= ln \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 + C$$

2	

4. Representar graficamente o recinto delimitado polas gráficas das funcións $f(x)=x^3-x$ e $g(x)=2x^2-2$ e calcular a sua área.

Ambas funcións son polinómicas, polo que estudando os cortes cos eixos e o signo, obtemos facilmente as suas gráficas.



$f(x)=x^3-x=x(x^2-1)=x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$, logo f corta ao eixo OX en $x=-1$, $x=0$ e $x=1$, e ademais $f(x)<0$ en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ e $f(x)>0$ en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

$g(x)=2x^2-2=2(x^2-1)=2\cdot(x-1)\cdot(x+1)$, logo g corta ao eixo OX en $x=-1$ e $x=1$, e ademais $f(x)<0$ en $(-1,1)$ e $f(x)>0$ en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Os pontos de corte de ambas curvas obteñen-se igualando as suas expresións:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-x=2x^2-2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

O recinto é o que aparece na gráfica adxunta, e para o cálculo da área integrará-se nos intervalos $[-1,1]$ e $[1,2]$.

No intervalo $[-1,1]$ $f(x)\geqslant g(x)$, logo a área correspondente a este intervalo é:

$$A_1=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-2\right)=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

No intervalo $[1,2]$ $f(x)\leqslant g(x)$, logo a área correspondente a este intervalo é:

$$A_2=\int_{1}^{2}[g(x)-f(x)]\,dx=\int_{1}^{2}(-x^3+2x^2+x-2)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}=$$

$$=\left(-4+\frac{16}{3}+2-4\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=-4+\frac{14}{3}-\frac{1}{4}=\frac{-48+56-3}{12}=\frac{5}{12}$$

A área será entón: $A=A_1+A_2=\dfrac{8}{3}+\dfrac{5}{12}=\dfrac{32+5}{12}=\dfrac{37}{12}\ u^2$

2	

5. Calcular o valor de $k>0$ tal que a área da rexión delimitada pola curva $y=k^2-x^2$ e os semieixos positivos OX e OY sexa $10\ u^2$.

Ao ter coeficiente principal negativo, a curva $y=k^2-x^2$ é unha parábola cóncava, e os pontos de corte cos eixos son:

Eixo OX : $y=0 \Rightarrow x=\pm k$; logo obtemos o ponto de corte co semieixo positivo $A(k,0)$.

Eixo OY : $x=0 \Rightarrow y=k^2$; logo o ponto de corte co semieixo positivo é $B(0,k^2)$.

Asi que a rexión a integrar corresponde-se co intervalo $[0,k]$, logo:

$$\int_0^k (k^2-x^2)\,dx=\left[k^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^k=k^3-\frac{k^3}{3}=\frac{2k^3}{3}$$

Como a área debe ser $10\ u^2$, temos: $\frac{2k^3}{3}=10 \Leftrightarrow k^3=15 \Leftrightarrow k=\sqrt[3]{15}\approx 2,47$

2	

6. Sexa f unha función contínua, derivábel e simétrica par en $\mathbb{R}$, tal que $f(2)=3$. Calcular de xeito razoado o valor da integral $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ sabendo que $\int_0^2 x\cdot f'(x)\,dx=5$.

Como f é unha función par, resulta $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=2\cdot\int_0^2 f(x)\,dx$.

Para o cálculo de $\int f(x)\,dx$ podemos utilizar o método de integración por partes. Chamando $u=f(x)$ e $dv=dx$, resulta $du=f'(x)\,dx$ e $v=\int dx=x$, e temos:

$$\int f(x)\,dx=x\cdot f(x)-\int x\cdot f'(x)dx$$

Aplicando a regra de Barrow obtemos:

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\left[x\cdot f(x)-\int x\cdot f'(x)dx\right]_0^2=[x\cdot f(x)]_0^2-\int_0^2 x\cdot f'(x)dx=2\cdot f(2)-5=2\cdot 3-5=1$$

Logo $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=2\cdot\int_0^2 f(x)\,dx=2$