MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 10/12/2015
REC 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 | 1. i. Estudar o domínio e a continuidade da función $f(x)=\frac{x-1}{x^2-x}$, indicando os tipos de discontinuidade que presente.

0.5 | ii. Estudar se é posíbel en algún caso estender a continuidade de f .

i. O domínio é: $Dom\ f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2-x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{0,1\}$

Por ser un cociente de funcións polinómicas, a función é contínua no seu domínio.

En $x=0$ temos:

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2-x}=\infty$, logo f presenta unha discontinuidade de salto infinito en $x=0$.

En $x=1$ o límite $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-x}$ é unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, e simplificando a fración resulta:

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$, logo $f(1)\neq\lim_{x\to 1} f(x)=1$, asi que f presenta unha discontinuidade evitábel en $x=1$.

ii. A estensión da continuidade é posíbel en $x=1$, onde a discontinuidade é evitábel, definindo $f(1):=1$, co que obtemos a función $\hat{f}(x)=\frac{1}{x}$, que é contínua en todo o seu domínio e coincide coa orixinal f agás en $x=1$.

No caso $x=0$ non é posíbel estender a función por ser unha discontinuidade de salto infinito.

1	

2. i.Calcular, utilizando a definición de derivada, o valor de k para que a función $f(x)=\begin{cases} kx & se \;\; x<0 \\ x^2+3x & se \;\; x\geqslant 0 \end{cases}$ sexa derivábel en $x=0$.

1	

ii.Obter no caso anterior, o valor c ao que se refire o Teorema de Lagrange no intervalo $[-2,2]$.

i.A función é contínua en $x=0$, xá que coinciden os límites laterais e o valor da función:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

Para que a función sexa derivábel en $x=0$, deben coincidir as derivadas laterais:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{kh}{h}=\lim_{h\to 0^-} k=k$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0^-} h+3=3$$

Logo f é derivábel en $x=0 \Leftrightarrow k=3$, e neste caso a función será $f(x)=\begin{cases} 3x & se \;\; x<0 \\ x^2+3x & se \;\; x\geqslant 0 \end{cases}$.

ii.Para $k=3$, f é contínua e derivábel en todo o seu domínio e, polo tanto, tamén en $[-2,2]$.

Asi que $\exists \;\; c\in(-2,2) \;\; / \;\; f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$.

A taxa de variación média no intervalo é $\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\dfrac{10-(-6)}{4}=\dfrac{16}{4}=4$.

Logo $f'(x)=\begin{cases} 3 & se \;\; x<0 \\ 2x+3 & se \;\; x\geqslant 0 \end{cases}$, e como $3\neq 4$, forzosamente há de ser $x\geqslant 0$ e $2x+3=4$; asi que:

$$2x+3=4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in(-2,2)$$

O valor pedido é $c=\dfrac{1}{2}$, e $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$.

2	

3. Calcular os límites:

i. $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}$ ii. $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{1-\sqrt{4-x}}$

i. É unha indeterminación de tipo $\infty\cdot 0$, que podemos resolver transformando o produto nunha fración e aplicando duas veces a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

ii. É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que se pode resolver utilizando multiplicando polo conxugado:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{1-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\cdot(1+\sqrt{4-x})}{(1-\sqrt{4-x})\cdot(1+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\cdot(1+\sqrt{4-x})}{1-(4-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\cdot(1+\sqrt{4-x})}{x-3}=\lim_{x\to 3}-(1+\sqrt{4-x})=-2$$

1	
0.5	

4. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema de Rolle.
   ii. Estudar, utilizando o teorema anterior, se a función $f(x)=(x^2-4)\ln x$ ten algún extremo relativo no intervalo $(1,2)$.

i. Teorema de Rolle: sexa f unha función contínua no intervalo $[a,b]$, derivábel en (a,b) e tal que $f(a)=f(b)$; entón $\exists\, c\in(a,b)\ /\ f'(c)=0$.

Este teorema asegura que toda función contínua e derivábel nun intervalo, e que toma o mesmo valor nos seus extremos, ten algún ponto no que se anula a sua derivada, ou equivalentemente, ten un extremo relativo no intervalo.

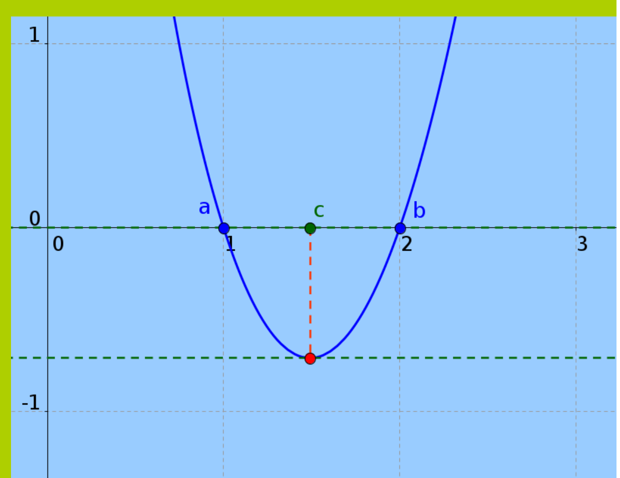
Nota: serve como gráfica ilustrativa deste teorema a do segundo apartado.

ii. A función $f(x)=(x^2-4)\ln x$ é contínua e derivábel en todo o seu domínio, que é $(0,+\infty)$, logo é tamén contínua e derivábel en particular no intervalo $[1,2]$, e ademais $f(1)=f(2)=0$.

Cumpre polo tanto as hipóteses do Teorema de Rolle, asi que:

$$\exists\, c\in(1,2)\ /\ f'(c)=0$$

En consecuéncia, a función ten un extremo relativo en $(1,2)$.



2	

5. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$, indicando de forma explícita, como mínimo, os seguintes elementos:
   i.pontos de corte cos eixos
   ii.asíntotas
   iii.extremos relativos
   iv.pontos de inflexión

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{-1\}$; é unha función contínua e derivábel en todo o seu domínio.

$f(x)=0 \Leftrightarrow e^x=0$, logo non presenta cortes co eixo OX ; $f(0)=1$, asi que f ten un ponto de corte co eixo OY en $A(0,1)$.

Ademais $f(x)<0\ \forall\ x<-1$ e $f(x)>0\ \forall\ x>-1$.

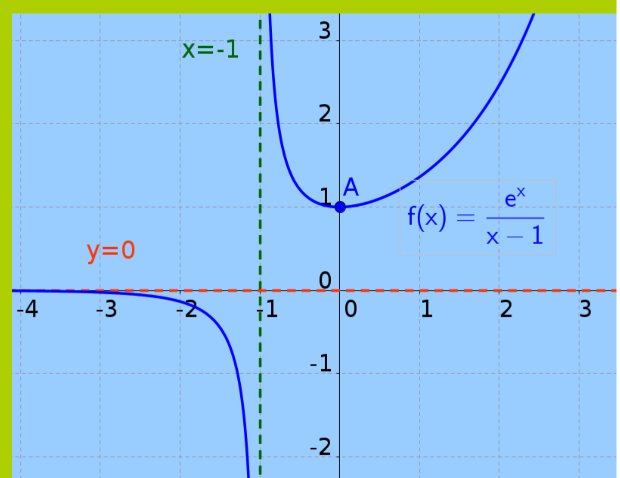
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1}=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+1}=+\infty$; logo $y=0$ é unha asíntota horizontal en $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^x}{x+1}=\infty$; logo existe unha asíntota vertical tal que $f(x)\to-\infty$ se $x\to-1^-$ e $f(x)\to+\infty$ se $x\to-1^+$ e f presenta unha discontinuidade de salto infinito en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+x}\overset{[1]}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x+1}\overset{[1]}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty\notin\mathbb{R}$, logo non hai asíntota oblícua.

Nota [1]: son indeterminacións do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que se resolven por L'Hôpital.

$f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{-x+1}\neq\pm f(x)$, asi que non hai simetrias e tampouco periodicidade, por non ser unha función trigonométrica.



As derivadas son:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(e^x+x\cdot e^x)\cdot(x+1)^2-x\cdot e^x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(e^x+x\cdot e^x)\cdot(x+1)-2x\cdot e^x}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{e^x\cdot[(x+1)^2-2x]}{(x+1)^3}=\frac{e^x\cdot(x^2+1)}{(x+1)^3}$$

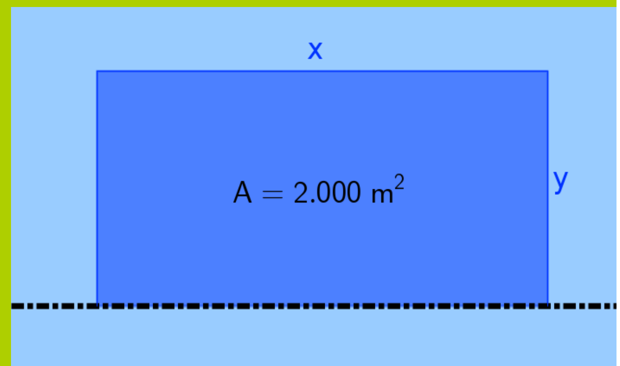
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, logo temos un posíbel extremo relativo en $x=0$; $f''(0)=1>0 \Rightarrow f$ presenta un mínimo relativo en $A(0,1)$.

$f''(x)\neq0\ \forall\ x\in Dom\ f$, logo non hai pontos de inflexión.

$f''(x)<0\ \forall\ x<-1$ e $f''(x)>0\ \forall\ x>-1$, asi que a función é cóncava en $(-\infty,-1)$ e convexa en $(-1,\infty)$.

2	

6. Quere-se cercar unha finca rectangular de $2.000\ m^2$ que linda nun dos seus lados con un muro xá existente, polo que nese lado non é necesário o valado. Calcular as dimensións óptimas para que a lonxitude do valado sexa mínima.



Se chamamos x ao lado colindante co muro e y ao perpendicular, a área da finca é $xy=2.000$.

O perímetro a cercar é $P=x+2y$.

Da condición $xy=2.000$, obtemos $y=\frac{2.000}{x}$, e polo tanto podemos expresar o perímetro en función de x da forma:

$P(x)=x+2\cdot\frac{2.000}{x}=x+\frac{4.000}{x}$, que será a función a optimizar.

Derivando resulta $P'(x)=1-\frac{4.000}{x^2}$, e igualando a 0 temos:

$$P'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{4.000}{x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=4.000 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4.000}=\pm 20\sqrt{10}$$

A solución $x=-20\sqrt{10}$ non ten sentido xeométrico, e polo tanto estudaremos a condición de extremo para o valor $x=20\sqrt{10}$:

$P''(x)=\frac{8.000}{x^3}>0\ \forall\ x>0$; logo en particular $P''(20\sqrt{10})>0$, co que se confirma que $x=20\sqrt{10}$ é un mínimo relativo da función obxectivo $P(x)$.

As dimensións da finca serán polo tanto $x=20\sqrt{10}\ m$ e $y=\frac{2.000}{20\sqrt{10}}=10\sqrt{10}\ m$.

E a lonxitude total do valado é:

$$P(20\sqrt{10})=20\sqrt{10}+\frac{4.000}{20\sqrt{10}}=\frac{4.000+4.000}{20\sqrt{10}}=\frac{8.000}{20\sqrt{10}}=40\sqrt{10}$$