MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 12/11/2015
TEMA 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

TOTAL	SUMA	EE/EM	NOTA
10			

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 | 1. i.Determinar os valores de a e b para que a función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & se \quad x<3 \\ ax+b & se \quad x\geqslant 3 \end{cases}$ sexa contínua e derivábel en $x=3$.

1 | ii.Estudar no caso anterior se f está nas hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo $[0,5]$ e obter nese caso o valor c ao que se refire o teorema.

i.Para que a función sexa contínua en $x=3$, deben coincidir os limites laterais e o valor de f en 3, polo tanto:

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} x^2-1=8$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} ax+b=3a+b$; logo ten que ser $f(3)=3a+b=8$.

Ademais, para ser derivábel en $x=3$ han de coincidir as derivadas laterais:

$$f'(3^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(3+h)^2-1-8}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+6h+9-9}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0^-} h+6=6$$

$$f'(3^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{a(3+h)+b-8}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3a+ah+b-8}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{ah}{h}=\lim_{h\to 0^+} a=a$$

Logo ten que ser $a=6$ e polo tanto $3a+b=8 \Leftrightarrow b=8-3a=8-18=-10$, asi que a función será $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & se \quad x<3 \\ 6x-10 & se \quad x\geqslant 3 \end{cases}$

ii.Para $a=6$ e $b=-10$ a función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & se \quad x<3 \\ 6x-10 & se \quad x\geqslant 3 \end{cases}$ é contínua e derivábel en $\mathbb{R}$; logo está nas hipóteses do Teorema do Valor Médio en $[0,5]$.

Asi que $\exists\, c\in(0,5) \;/\; f'(c)=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{20-(-1)}{5}=\frac{21}{5}$

A derivada é $f'(x)=\begin{cases} 2x & se \quad x<3 \\ 6 & se \quad x\geqslant 3 \end{cases}$; e como $6\neq\frac{21}{5}$, a única posibilidade é que $c<3$ e neste caso:

$f'(c)=\frac{21}{5} \Leftrightarrow 2c=\frac{21}{5} \Leftrightarrow c=\frac{21}{10}<3$ e ademais $c\in(0,5)$; logo $c=\frac{21}{10}$ é o valor pedido.

2 2. Calcular os límites:

i. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x^2}$ ii. $\lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{1-\cos x}$

i.Sumando ambas fracións temos:

$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2-1} = \infty$; e ademais:

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$ e $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$.

ii.É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que se pode resolver utilizando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\, sen\, x \cos x}{sen\, x} = \lim_{x \to 0} 2 \cos x = 2$$

1 3. i.Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema de Bolzano.

1 ii.Estudar se a ecuación $2-x=\ln x$ ten algunha solución e, en caso afirmativo, localizar tal solución nun intervalo de amplitude non superior a 2 unidades.

i.Teroema de Bolzano: sexa f unha función contínua no intervalo $[a,b]$, e tal que f toma valores de signo oposto nos extremos do intervalo; entón $\exists\, c \in (a,b) \;/\; f(c)=0$.

Este teorema asegura que toda función contínua nun intervalo no que a función experimenta un cámbio de signo, forzosamente há de ter algunha raíz, ou o que é o mesmo, algún ponto de corte co eixo OX .

Nota: serve como gráfica ilustrativa deste teorema a do segundo apartado.

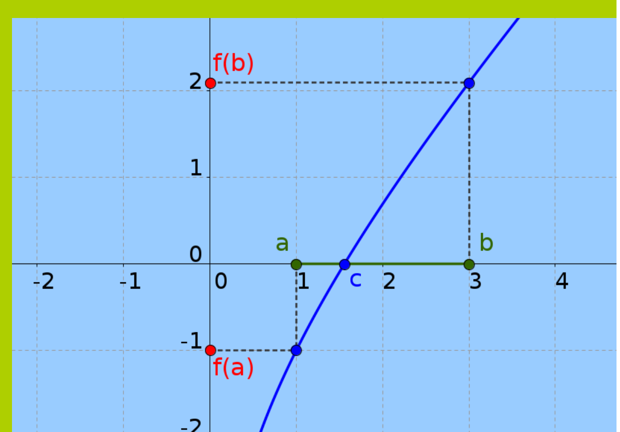
ii.A ecuación $2-x=\ln x$ é equivalente a $x-2+\ln x=0$.

Tomando como función $f(x)=x-2+\ln x$, que é contínua en $(0,+\infty)$, procuraremos un intervalo $[a,b]$ no que a función experimente un cámbio de signo:

$f(1)=1-2+\ln 1=-1<0$

$f(3)=3-2+\ln 3=1+\ln 3>0$

Logo no intervalo $[1,3]$ a función está nas hipóteses do teorema de Bolzano e polo tanto



$\exists\, c \in (1,3) \;/\; f(c)=0 \Leftrightarrow c-2+\ln c=0 \Leftrightarrow 2-c=\ln c$.

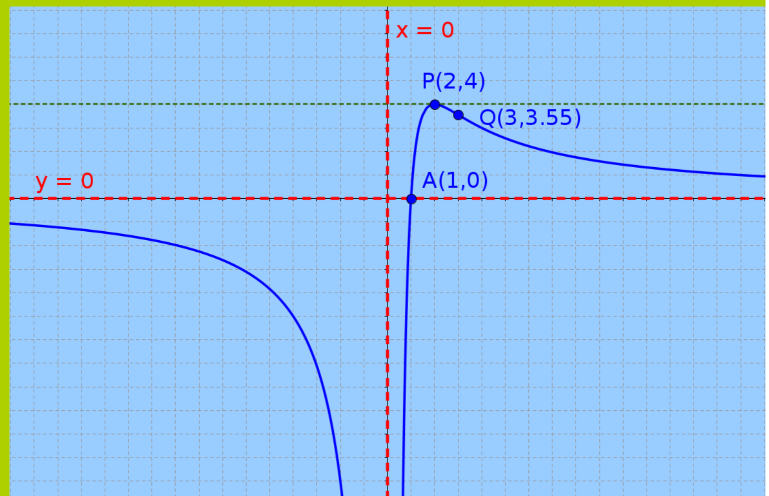
Asi que a ecuación ten polo menos unha solución no intervalo $(1,3)$.

2

4. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\dfrac{16(x-1)}{x^2}$, indicando de forma explícita, como mínimo, os seguintes elementos:

i. pontos de corte cos eixos
ii. asíntotas
iii. extremos relativos
iv. pontos de inflexión

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}$; é unha función contínua e derivábel en todo o seu domínio.



$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$, logo presenta un corte co eixo OX en $A(1,0)$ e non corta ao eixo OY xá que $0\notin Dom\ f$. Ademais $f(x)<0\ \forall\ x<1$ e $f(x)>0\ \forall\ x>1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16(x-1)}{x^2}=-\infty$; logo f presenta unha discontinuidade de salto infinito e polo tanto unha asíntota vertical en $x=0$.

Ademais $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{16(x-1)}{x^2}=0$, polo que $y=0$ é unha asíntota horizontal en $\pm\infty$ e, como consecuéncia, non existen asíntotas oblícuas.

$f(-x)=\dfrac{4(-x)-1}{(-x)^2}=\dfrac{-4x-1}{x^2}\neq\pm f(x)$, asi que non hai simetrias e tampouco periodicidade, por non ser unha función trigonométrica.

As derivadas son:

$$f'(x)=\frac{16\cdot x^2-16(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-16x^2+32x}{x^4}=\frac{16(2-x)}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{-16\cdot x^3-16(2-x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{32x^3-96x^2}{x^6}=\frac{32(x-3)}{x^4}$$

$$f'''(x)=\frac{32\cdot x^4-32(x-3)\cdot 4x^3}{x^8}=\frac{-96x^4+384x^3}{x^8}=\frac{96(4-x)}{x^5}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$, logo temos un posíbel extremo relativo en $x=2$; $f''(2)=-2<0 \Rightarrow f$ presenta un máximo relativo en $P(2,4)$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=3$, logo temos un posíbel ponto de inflexión en $x=3$; $f'''(3)\neq 0 \Rightarrow f$ presenta un ponto de inflexión en $Q\left(3,\dfrac{32}{9}\right)$.

Para a monotonia estudaremos os intervalos $(-\infty,0)$, $(0,2)$ e $(2,+\infty)$, e resulta:

$f'(-1)<0 \Rightarrow f'(x)<0\ \forall\ x\in(-\infty,0)$, $f'(1)>0 \Rightarrow f'(x)>0\ \forall\ x\in(0,2)$ e

$f'(3)<0 \Rightarrow f'(x)<0\ \forall\ x\in(2,+\infty)$.

Asi que f é monótona decrecente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ e monótona crecente en $(0,2)$.

Para a curvatura estudaremos os intervalos $(-\infty,0)$, $(0,3)$ e $(3,+\infty)$, e temos:

$f'(-1)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \ \forall\ x\in(-\infty,0)$, $f''(1)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \ \forall\ x\in(0,3)$ e

$f'(4)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \ \forall\ x\in(3,+\infty)$.

Asi que f é cóncava en $(-\infty,0)\cup(0,3)$ e convexa en $(3,+\infty)$.

2 5. Un solar rectangular ubicado ao pé da estrada ten que pagar en impostos $10€$ por cada metro de fronte e $6€$ por cada metro de fondo. Calcular as dimensións que há de ter un solar de $100\ m^2$ para que o importe do imposto sexa mínimo.

Se chamamos x á fronte e y ao fondo do solar, a sua área é $xy=100$.

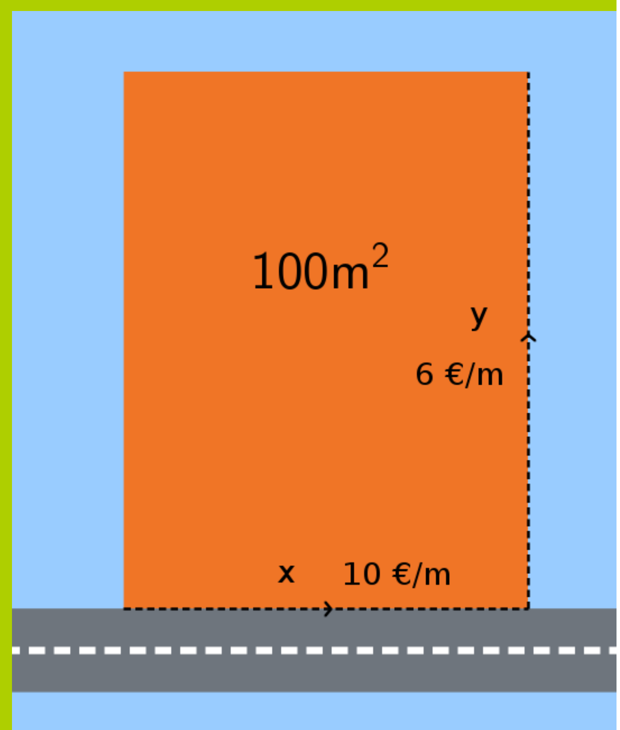
O imposto a pagar é $T=10x+6y$.

Da condición $xy=100$, obtemos $y=\dfrac{100}{x}$, e polo tanto o imposto pode-se expresar como $T(x)=10x+6\cdot\dfrac{100}{x}=10x+\dfrac{600}{x}$, que será a función a optimizar.

Derivando resulta $T'(x)=10-\dfrac{600}{x^2}$, e igualando a 0 temos:

$$T'(x)=0 \Leftrightarrow 10-\frac{600}{x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x^2=600 \Leftrightarrow x^2=60 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{60}$$



Rexeitamos a solución $x=-\sqrt{60}$ por carecer de sentido xeométrico e estudamos a condición de extremo:

$T''(x)=\dfrac{1.200}{x^3}>0 \ \forall\ x>0$; logo en particular $T''(\sqrt{60})>0$, co que se confirma que $x=\sqrt{60}$ é un mínimo relativo da función obxectivo $T(x)$.

O importe do imposto é:

$$T(\sqrt{60})=10\sqrt{60}+\frac{600}{\sqrt{60}}=\frac{10\cdot 60+600}{\sqrt{60}}=\frac{1.200}{\sqrt{60}}=\frac{1.200\sqrt{60}}{60}=20\sqrt{60}\approx 154{,}92€$$

As dimensións do solar serán $\sqrt{60}\approx 7{,}75\ m$ de fronte e $\dfrac{100}{\sqrt{60}}=\dfrac{100\sqrt{60}}{60}=\dfrac{5\sqrt{60}}{3}\approx 12{,}91\ m$ de fondo.