MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 21/04/2015

TEMA 4 DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

REC 3 MATRICES E SISTEMAS LINEARES

TOTAL	SUMA	EE/EM	NOTA
9/12			

NOME	GRUPO

REC ☐ CON RECUPERACIÓN ....EXS 1-8 (12 PTOS.)

☐ SEN RECUPERACIÓN ....EXS 2-8 (9 PTOS.)

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 1. i. Dar a definición de independéncia linear dun conxunto e aportar un exemplo de conxunto linearmente dependente e outro de conxunto linearmente independente dentro do espazo vectorial das matrices $M_{1,3}(\mathbb{R})$.

1 ii. Estudar o rango do conxunto $W=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}\subset M_{3,1}(\mathbb{R})$.

1 iii. Suprimir de forma razoada un dos elementos de W de xeito que non varie o seu rango.

i. Nun espazo vectorial V, di-se que un subconxunto W é linearmente independente $:\Leftrightarrow$ a única combinación linear dos vectores de W que dá como resultado o vector nulo (elemento neutro da suma) é aquela que ten nulos todos os seus escalares.

O conxunto $W=\{(2\ \ -1\ \ 2),(0\ \ 3\ \ 1),(2\ \ 2\ \ 3)\}\subset M_{1,3}(\mathbb{R})$ é linearmente dependente xá que $(2\ \ 2\ \ 3)=(2\ \ -1\ \ 2)+(0\ \ 3\ \ 1)\Rightarrow(2\ \ -1\ \ 2)+(0\ \ 3\ \ 1)-(2\ \ 2\ \ 3)=(0\ \ 0\ \ 0)$, logo existe unha combinación linear non trivial dos elementos de W que dá o vector nulo.

O conxunto $W'=\{(1\ \ 0\ \ 0),(0\ \ 1\ \ 0),(0\ \ 0\ \ 1)\}\subset M_{1,3}(\mathbb{R})$ é linearmente independente xá que $\alpha\cdot(1\ \ 0\ \ 0)+\beta\cdot(0\ \ 1\ \ 0)+\gamma\cdot(0\ \ 0\ \ 1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$, logo a única combinación linear dos vectores de W' que dá o vector nulo é a trivial.

ii. Sexa $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1&-2\\2&0&-3&3\\-1&-1&4&-1\end{pmatrix}$ a matriz formada polas matrices coluna de W; asi $rang\ W=rang\ A$, e utilizando o método de Gauss temos:

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1&-2\\2&0&-3&3\\-1&-1&4&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}F_2+2F_1\\F_3-F_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&-1&-2\\0&2&-5&-1\\0&-2&5&1\end{pmatrix}F_3+F_2\sim\begin{pmatrix}-1&1&-1&-2\\0&2&-5&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Logo $rang\ W=rang\ A=2$.

iii. Suprimindo o último dos elementos, por exemplo, obtemos o subconxunto $W'=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}\right\}\subset W$, que se corresponde coa matriz $A'=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&0&-3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$.

As transformacións elementares usadas para obter o rango de A permiten transformar a matriz A' na matriz $\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$, logo $rang\ W'=rang\ A'=2$.

1	

2. Resolver a ecuación matricial $2X+XA=I_3$, onde I_3 é a matriz unitária de orden 3 e $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\5&1&3\\2&0&-2\end{pmatrix}$.

[Nota: a inversa deberá calcular-se por determinantes]

$$2X+XA=I_3 \Leftrightarrow X\cdot(2I_3+A)=I_3 \Leftrightarrow X=I_3\cdot(2I_3+A)^{-1}=(2I_3+A)^{-1}$$

$$2I_3+A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\5&1&3\\2&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\5&3&3\\2&0&0\end{pmatrix}$$

$det(2I_3+A)=6\neq 0 \Rightarrow \exists\ (2I_3+A)^{-1}$; logo $X=(2I_3+A)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&3\\6&0&-9\\-6&2&4\end{pmatrix}$.

2	

3. Estudar a compatibilidade do sistema $\begin{cases}x-2y-2z=0\\x+ky+z=-3\\kx+4y-z=5\end{cases}$ en función do valor de k e resolvé-lo nos casos en que sexa posíbel, utilizando a regra de Cramer.

As matrices son $M=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&k&1\\k&4&-1\end{pmatrix}$ e $M^*=\begin{pmatrix}1&-2&-2&0\\1&k&1&-3\\k&4&-1&5\end{pmatrix}$.

$det\ M=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&k&1\\k&4&-1\end{vmatrix}=2k^2-3k-14=2\cdot(k+2)\cdot\left(k-\frac{7}{2}\right)$; logo $det\ M=0$ se $k=-2$ ou $k=\frac{7}{2}$.

No caso xeral, $k\neq -2$ e $k\neq\frac{7}{2}$, temos que $rang\ M=rang\ M^*=3$, logo é un sistema compatíbel determinado e ademais é un sistema de Cramer, por ser $det\ M\neq 0$.

No caso $k=-2$ a matriz ampliada é $M^*=\begin{pmatrix}1&-2&-2&0\\1&-2&1&-3\\-2&4&-1&5\end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&1\end{vmatrix}=-6\neq 0$, logo $\{F_1,F_2\}$ e $\{C_2,C_3\}$ son conxuntos linearmente independentes e polo tanto $rang\ M=2$ e $rang\ M^*\geqslant 2$.

$\begin{vmatrix}-2&-2&0\\-2&1&-3\\4&-1&5\end{vmatrix}=0$; asi que $rang\ M^*=2$, logo o sistema é compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade.

E no caso $k=\frac{7}{2}$ a matriz ampliada é $M^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & \frac{7}{2} & 1 & -3 \\ \frac{7}{2} & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$, logo $\{F_1,F_2\}$ e $\{C_1,C_3\}$ son conxuntos linearmente independentes e polo tanto $rang\ M=2$ e $rang\ M^*\geqslant 2$.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ \frac{7}{2} & -1 & 5 \end{vmatrix}=33\neq 0$; asi que $rang\ M^*=3$, logo o sistema é incompatíbel.

A solución no caso xeral, $k\neq -2$ e $k\neq\frac{7}{2}$ é:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -3 & k & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ k & 4 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{10k+20}{2\cdot(k+2)\cdot\left(k-\frac{7}{2}\right)}=\frac{10}{2k-7}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ k & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ k & 4 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-6k-12}{2\cdot(k+2)\cdot\left(k-\frac{7}{2}\right)}=-\frac{6}{2k-7},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & k & -3 \\ k & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ k & 4 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{11k+22}{2\cdot(k+2)\cdot\left(k-\frac{7}{2}\right)}=\frac{11}{2k-7}.$$

Logo a solución é $\left(\frac{10}{2k-7},-\frac{6}{2k-7},\frac{11}{2k-7}\right)\ \forall\ k\neq -2,\ k\neq\frac{7}{2}$ **.**

No caso particular $k=-2$, o sistema pode transformar-se en $\begin{cases} -2y-2z=-x \\ -2y+z=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+2z=x \\ 2y-z=x+3 \end{cases}$

Por Cramer resulta: $y=\frac{\begin{vmatrix} x & 2 \\ x+3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-3x-6}{-6}=\frac{x+2}{2}$ e $z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & x \\ 2 & x+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{6}{-6}=-1$

A solución por tanto, neste caso, é $\left(x,\frac{x+2}{2},-1\right)\ x\in\mathbb{R}$.

1	

4. Sexa a matriz $M=(F_1,F_2,F_3)\in M_3(\mathbb{R})$, tal que $det\ M=-2$. Obter o determinante da matriz $B=(3F_2,F_1+F_3,5F_3)$ indicando as propriedades do cálculo de determinantes que se utilicen.

$det\ B=det\ (3F_2,F_1+F_3,5F_3)=det\ (3F_2,F_1,5F_3)+det\ (3F_2,F_3,5F_3)$ [1], pola propridade da suma de filas ou colunas (neste caso aplicada ás filas).

Ademais $det\ (3F_2,F_3,5F_3)=0$ por ser a terceira fila múltiplo da segunda; logo da expresión [1] obtemos $det\ B=det\ (3F_2,F_1,5F_3)$.

Utilizando a propriedade relativa á permuta de filas ou colunas, obtemos:

$$det\ B=det\ (3F_2,F_1,5F_3)=-det\ (F_1,3F_2,5F_3)$$

E finalmente, extraendo factores das filas deste determinante, resulta:

$$det\ B=-det\ (F_1,3F_2,5F_3)=-3\cdot 5\cdot det\ (F_1,F_2,F_3)=-15\cdot det\ M=-15\cdot(-2)=30$$

Outra forma de obter $det\ B$ é utilizando o método de Gauss para o cálculo de determinantes:

$$det\ B=(3F_2,F_1+F_3,5F_3)\overset{[1]}{=}3\cdot 5\cdot(F_2,F_1+F_3,F_3)\overset{[2]}{=}15\cdot det\ (F_2,F_1,F_3)\overset{[3]}{=}$$

$$\overset{[3]}{=}-15\cdot det\ (F_1,F_2,F_3)=-15\cdot det\ M=-15\cdot(-2)=30$$

[1] Extraen-se factores das filas primiera e terceira.
[2] Á segunda coluna resta-se-lle a terceira.
[3] Permutan-se as duas primeiras filas.

1 5. Estudar o rango da matriz $A=\begin{pmatrix} 2t & t & 2t \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ segundo o valor do parámetro t e indicar en cada caso un conxunto máximo de filas ou colunas que sexa linearmente independente.

Podemos tomar por comodidade as trés últimas filas, co que resulta o determinante:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2t-1$; e $-2t-1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$; temos polo tanto o caso xeral $t \neq -\frac{1}{2}$ e un caso particular $t=-\frac{1}{2}$.

No primeiro deles resulta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \{F_2, F_3, F_4\}$ é un conxunto linearmente independente, polo que $rang\ A=3$, xá que maior non pode ser; F_1 será neste caso combinación linear desas trés filas.

No caso $t=-\frac{1}{2}$ a matriz é $A=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e como as filas F_2 e F_4 forman un conxunto linearmente independente, a única combinación que resta por estudar é a formada polas filas F_1 , F_2 e F_4 , é dicer o determinante $\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Este determinante é nulo, asi que neste caso $rang\ A=2$, e o conxunto $\{F_2, F_4\}$ é linearmente independente, mentres que calquer das outras duas filas é combinación linear destas duas.

1 6. i. Enunciado do Teorema de Rouché-Fröbenius.

1 ii. Dado o sistema homoxéneo $S \equiv \begin{cases} x-3z=0 \\ 2y+5z=0 \end{cases}$, engadir, de xeito razoado, unha nova ecuación, de maneira que o sistema resultante siga a ser homoxéneo e ademais:

a. incompatíbel; b. compatíbel indeterminado (resolvé-lo neste caso); c. compatíbel determinado (resolvé-lo).

i. Sexa S un sistema linear e sexan M e M^* as matrices de coeficientes e ampliada do sistema; entón o sistema é compatíbel $\Leftrightarrow rang\ M = rang\ M^*$. Ademais, neste caso, o sistema é determinado $\Leftrightarrow rang\ M = n$ e será indeterminado $\Leftrightarrow rang\ M < n$, onde n é o número de incógnitas de S. A diferenza entre o número de incógnitas e o rango de M chama-se grau de liberdade do sistema.

ii. Se M e M^* son as matrices de coeficientes e ampliada, o sistema $\begin{cases} x-3z=0 \\ 2y+5z=0 \end{cases}$ ten $rang\ M = rang\ M^* = 2$, inferior ao número de incógnitas, asi que é un sistema compatíbel indeterminado.

Resulta de entrada imposíbel engadir unha nova de ecuación de xeito que obteñamos un sistema homoxéneo incompatíbel, xá que todos os sistemas homoxéneos teñen polo menos unha solución, que é a trivial. De outro xeito, como a coluna de termos independentes nun sistema homoxéneo é nula, as matrices de coeficientes e ampliada terán sempre o mesmo rango, polo que o sistema há de ser forzosamente compatíbel.

Para engadir unha ecuación de xeito que resulte compatíbel indeterminado deberá ser $rang\ M = 2$ e $rang\ M^* = 2$, logo temos que engadir unha ecuación que sexa combinación linear das duas primeiras. Por exemplo, pode ser a ecuación resultante de sumar ambas. Asi, o sistema $S' \equiv \begin{cases} x-3z=0 \\ 2y+5z=0 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$ ten $rang\ M = rang\ M^* = 2$, inferiores ao número de incógnitas, e polo tanto segue a ser compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade.

Para resolvé-lo abonda con resolver o sistema inicial, xá que a terceira ecuación é combinación linear das duas primeiras. Traspoñendo previamente os termos en z ao segundo membro resulta $\begin{cases} x=3z \\ 2y=-5z \end{cases}$, e de forma trivial obtemos a solución en función de z:

$$\left(\frac{5-z}{2}, \frac{2+z}{2}, z\right) \quad z \in \mathbb{R}$$

Para engadir unha ecuación de xeito que resulte compatíbel determinado deberá ser $rang\ M = 3$ e $rang\ M^* = 3$, logo temos que engadir unha ecuación cuxo primeiro membro non sexa combinación linear das duas primeiras.

Asi, o sistema $S'' \equiv \begin{cases} x-3z=0 \\ 2y+5z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ten $rang\ M = 3$ e $rang\ M^* = 3$, igual ao número de incógnitas.

É polo tanto un sistema compatíbel determinado que, ao ser homoxéneo, terá por única solución a trivial $(0, 0, 0)$.

1	

7. Calcular o valor do determinante $\begin{vmatrix} k & 2t & 3r & 4s \\ 5k & 6t & 7r & 8s \\ 9k & 10t & 11r & 12s \\ 13k & 14t & 15r & 16s \end{vmatrix}$.

Utilizando as propriedades dos determinantes e o método de Gauss, podemos transformar o determinante inicial:

$$\begin{vmatrix} k & 2t & 3r & 4s \\ 5k & 6t & 7r & 8s \\ 9k & 10t & 11r & 12s \\ 13k & 14t & 15r & 16s \end{vmatrix} = k\cdot t\cdot r\cdot s\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}^{\substack{C_4-C_3 \\ C_3-C_2}} = k\cdot t\cdot r\cdot s\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \\ 9 & 10 & 1 & 1 \\ 13 & 14 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k\cdot t\cdot r\cdot s\cdot 0 = 0$$

8. Razoar se son certas ou falsas as seguintes afirmacións:

0.5	

i. En todo sistema linear compatíbel, a coluna de termos independentes há de ser combinación linear das colunas de coeficientes.

0.5	

ii. Un sistema linear con mais ecuacións que incógnitas non pode ter solución.

i. É certo: nun sistema compatíbel as matrices de coeficientes M e ampliada M^* teñen o mesmo rango, e polo tanto a coluna B dos termos independentes ten que ser combinación linear das colunas de coeficientes, xá que en caso contrário seria $rang\ M < rang\ M^*$.

ii. É falso: o sistema $S \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ ten mais ecuacións que incógnitas e, ao ser homoxéneo, ten polo menos unha solución que é a trivial.