MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 23/03/2015

TEMA 3 MATRICES E SISTEMAS LINEARES

TOTAL	SUMA	EE/EM	NOTA
9			

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 — 1. i.Definición de combinación linear e de dependéncia linear dun conxunto de vectores.

1 — ii.Estudar a dependéncia linear do conxunto $W=\left\{\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\right\}\subset M_2(\mathbb{R})$

i.Sexa V un espazo vectorial calquer, e $W=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\subset V$ un subconxunto de elementos (vectores) de V. Di-se que un vector v é combinación linear dos elementos do conxunto W $\Leftrightarrow:\ \exists\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}\ /\ v=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\ldots+\alpha_n\cdot v_n$, é dicer, se é posíbel obter o vector v a partir dos vectores do conxunto W utilizando as operacións próprias do espazo vectorial V.

Di-se que o conxunto W é linearmente dependente $\Leftrightarrow:\ \exists\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, $\exists\ i\in\{1,2,\ldots,n\}\ /\ \alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\ldots+\alpha_n\cdot v_n=O$, $\alpha_i\neq 0$, onde O representa o elemento neutro da suma no espazo vectorial V, é dicer, se existe algunha combinación linear non trivial dos vectores de W igual ao vector nulo.

ii.A dependéncia de W consiste en procurar α, β e γ de xeito que:

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\gamma=0\\ -\alpha+2\beta+\gamma=0\\ \alpha+2\beta+2\gamma=0\\ 3\alpha-2\beta=0\end{cases}$$

W será linearmente dependente se o sistema é compatíbel indeterminado, é dicer, se existen mais solucións que a trivial; resolvendo polo método de Gauss temos:

$$M=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\scriptstyle 2F_2+F_1\\ \scriptstyle 2F_3-F_1\\ \scriptstyle 2F_4-3F_1\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & -4 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\scriptstyle F_3-F_2\\ \scriptstyle F_4+F_2\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\scriptstyle F_3+F_1\\ \scriptstyle 2F_4-F_1\\ \\ \\ \end{matrix}$$

Logo o sistema reduce-se a $\begin{cases}2\alpha+\gamma=0\\ 4\beta+3\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{1}{2}\gamma\\ \beta=-\dfrac{3}{4}\gamma\end{cases}$, asi que o sistema é compatíbel indeterminado con solución $\left(-\dfrac{\gamma}{2},-\dfrac{3\gamma}{4},\gamma\right)$ $\gamma\in\mathbb{R}$ e polo tanto, ao existiren solucións distintas da trivial o conxunto W é linearmente dependente.

1 2. Sexan A e B duas matrices cuadradas da mesma orden; demostrar que se a identidade $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ é certa, entón A e B comutan.

Sexan A e B duas matrices cuadradas da mesma orden e supoñamos que é certa a identidade $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ [1].

Da propriedade distributiva do produto a respeito da suma de matrices deducimos que:

$(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=(A+B)\cdot A+(A+B)\cdot B=A^2+BA+AB+B^2$ [2]

Igualando as expresións [1] e [2] obtemos: $A^2+2AB+B^2=A^2+BA+AB+B^2$.

Traspoñendo e reducindo termos obtemos: $2AB=BA+AB \Leftrightarrow 2AB-AB=BA \Leftrightarrow AB=BA$.

Logo fica probada a igualdade $AB=BA$, que equivale a afirmar que as matrices A e B comutan.

1 3. i. Estudar o rango da matriz $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1 ii. Estudar a compatibilidade e resolver, no caso de que sexa posíbel, o sistema homoxéneo que ten por matriz de coeficientes a matriz M .

i. $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \frac{1}{2}F_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} F_2-F_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4-F_1 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} 2F_4+F_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Logo $rang\ M=2$.

ii. O sistema homoxéneo obtido a partir da matriz M terá por matriz ampliada:

$$M^*=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Identificando como x , y e z as incógnitas, as duas últimas resultan ecuacións dexeneradas (tipo $0=0$) e polo tanto a solución será:

F_2: $-2y-2z=0 \Leftrightarrow y=-z$, onde z pasa a tratar-se como libre.

F_1: $x-z=0 \Leftrightarrow x=z$.

Logo a solución é $(z,-z,z)\ z\in\mathbb{R}$, co que resulta un sistema compatíbel (por ser homoxéneo) e ademais indeterminado (solución múltiple).

2	

4. Resolver a ecuación matricial $AX+2X=BX+I_2$, con $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ e $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

i. $AX+2X=BX+I_2 \Leftrightarrow AX+2X-BX=I_2 \Leftrightarrow (A+2I_2-B)X=I_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X=(A+2I_2-B)^{-1}\cdot I_2=(A+2I_2-B)^{-1}$

$$A+2I_2-B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$$

A inversa de $A+2I_2-B$ é:

$$(A+2I_2-B \mid I_2)=\begin{pmatrix}3 & -3 & | & 1 & 0\\ 4 & -5 & | & 0 & 1\end{pmatrix}^{3F_2-4F_1} \sim \begin{pmatrix}3 & -3 & | & 1 & 0\\ 0 & -3 & | & -4 & 3\end{pmatrix}^{F_1-F_2} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}3 & 0 & | & 5 & -3\\ 0 & -3 & | & -4 & 3\end{pmatrix}^{\substack{\frac{1}{3}F_1\\ -\frac{1}{3}F_2}} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & | & \frac{5}{3} & -1\\ 0 & 1 & | & \frac{4}{3} & -1\end{pmatrix}$$

Logo $(A+2I_2-B)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -1\\ \frac{4}{3} & -1\end{pmatrix}$ e $X=(A+2I_2-B)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -1\\ \frac{4}{3} & -1\end{pmatrix}$

1	

5. Estudar a compatibilidade do sistema $S \equiv \begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x+2y+8z=-3 \\ x-4y-5z=0 \end{cases}$ e resolvé-lo, no caso de que sexa posíbel.

A matriz ampliada do sistema é $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 \\ 1 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolvendo por Gauss obtemos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 \\ 1 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo interpretando as filas:

$$F_3:\ 10z=1 \ \Leftrightarrow\ z=\frac{1}{10}$$

$$F_2:\ -5y-4z=2 \ \Leftrightarrow\ y=\frac{-4z-2}{5}=\frac{-4\cdot\frac{1}{10}-2}{5}=\frac{-4-20}{50}=-\frac{24}{50}=-\frac{12}{25}$$

$$F_1:\ x+y-z=-2 \ \Leftrightarrow\ x=-y+z-2=\frac{12}{25}+\frac{1}{10}-2=\frac{24+5-100}{50}=-\frac{71}{50}$$

Polo tanto temos un sistema compatíbel determinado e a sua solución é $\left(-\frac{71}{50}, -\frac{12}{25}, \frac{1}{10}\right)$.

Nota: A permuta das filas F_2 e F_3 non é en absoluto necesária e fai-se exclusivamente para respeitar o obxectivo de triangularizar a matriz M^*.

1	

6. Dada a matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obter de xeito razoado a poténcia B^{250}.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pode-se formular como hipótese de indución a propriedade P : $B^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 4n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtendo B^{n+1} a partir da hipótese resulta:

$$B^{n+1}=B^n\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 4n & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n+2 & 1 & 0 \\ 4n+4 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n+1) & 1 & 0 \\ 4(n+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto a poténcia B^{n+1} tamén cumpre a nosa hipótese, asi que:

[1] P é certa para $n=1$ e [2] se P é certa para n entón tamén o é para $n+1$; como consecuéncia P é certa $\forall \ n \in \mathbb{N}$ e fica probada a hipótese de indución.

Finalmente aplicando a propriedade obtemos $B^{250}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 500 & 1 & 0 \\ 1.000 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.