MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 03/03/2015

REC 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

2 CÁLCULO INTEGRAL

TOTAL	SUMA	EE/EM	NOTA

NOME	GRUPO

REC
- □ 1 CÁLCULO DIFERENCIAL..........................EXS 1-6 (12 PTOS.)
- □ 2 CÁLCULO INTEGRAL..............................EXS 7-12 (11 PTOS.)
- □ TODO..EXS 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11 (8+7.5 PTOS.)

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 1. i. Estudar a continuidade da función $f(x)=\dfrac{kx-2}{x^2-1}$ dependendo do valor que tome o parámetro k, e indicando os tipos de discontinuidade que presenta, se é o caso.

1 ii. Estudar en que casos é posíbel estender o domínio de f con continuidade.

i. $Dom\ f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$, e ao ser un cociente de dous polinómios, pode presentar discontinuidades no caso de que se anule o denominador: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Para $x=1$ resulta $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{kx-2}{x^2-1}=\dfrac{k-2}{0}=\begin{cases}\dfrac{0}{0} \Leftrightarrow k=2\\ \infty \Leftrightarrow k\neq 2\end{cases}$; no caso $k=2$, simplificando a fración temos $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x+1}=1$.

E para $x=-1$ temos $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{kx-2}{x^2-1}=\dfrac{-k-2}{0}=\begin{cases}\dfrac{0}{0} \Leftrightarrow k=-2\\ \infty \Leftrightarrow k\neq -2\end{cases}$; no caso $k=-2$, resulta $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x+1}=1$.

Asi que, se $k\neq\pm 2$, f é unha función contínua en todo o seu domínio e presenta discontinuidades de salto infinito en ± 1.

Se $k=2$, f presenta unha discontinuidade evitábel en $x=1$ e de salto infinito en $x=-1$, e se $k=-2$, f presenta unha discontinuidade evitábel en $x=-1$ e de salto infinito en $x=1$.

ii. Á vista do anterior, para $k=2$ a función pode estender-se con continuidade no caso $x=1$, definindo $\hat{f}(1):=1$, e se $k=-2$ a función pode estender-se con continuidade no caso $x=-1$, definindo $\hat{f}(-1):=1$.

A función estendida, no caso $k=2$ é $\hat{f}(x)=\dfrac{2}{x+1}$, con domínio $Dom\ \hat{f}=\mathbb{R}-\{-1\}$ e no caso $k=-2$ é $\hat{f}(x)=\dfrac{-2}{x-1}$, con domínio $Dom\ \hat{f}=\mathbb{R}-\{1\}$.

1		2. i. Estudar a derivabilidade de $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & se\ x\leqslant 3 \\ m(3-x) & se\ x>3 \end{cases}$ en $x=3$ utilizando a definición de derivada.

1		ii. Obter a ecuación da recta tanxente á curva $f(x)$ en $x=2$.

i. f é unha función contínua en $x=3$, xá que $f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=0$; logo:

$$f'(3^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(3+h)^2-3(3+h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{9+6h+h^2-9-3h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}3+h=3$$

$$f'(3^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{m(3-(3+h))}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-mh}{h}=-m$$

f será derivábel en $x=3$ se coinciden ambas derivadas laterais, asi que:

$$f'(3^-)=f'(3^+)\ \Leftrightarrow\ m=-3$$

ii. A derivada de f en $(-\infty,3)$ é $f'(x)=2x-3$; logo a pendente da tanxente á curva en $x=2$ é $f'(2)=2\cdot 2-3=1$. Ademais $f(2)=-2$, logo a ecuación da recta tanxente será:

$$y-(-2)=1\cdot(x-2)\ \Leftrightarrow\ y+2=x-2\ \Leftrightarrow\ y=x-4$$

2		3. Calcular os límites:

i. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

ii. $\lim_{x\to 1}\frac{x+\cos\pi x}{sen^2\pi x}$

i. É unha indeterminación do tipo $\infty-\infty$, e restando ambas fracións temos $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-x}{x\sqrt{x}}$, que corresponde de novo a unha indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ e pode resolver-se racionalizando e simplificando:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\sqrt{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x}}{x}=\infty$$

ii. É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que se pode resolver utilizando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+\cos\pi x}{sen^2\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\pi\, sen\,\pi x}{2\pi\, sen\,\pi x\cos\pi x}=\infty$$

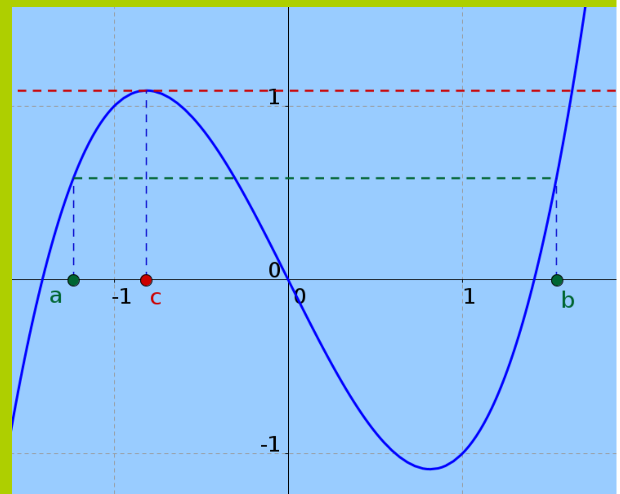
1	
1	

4. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema de Rolle.

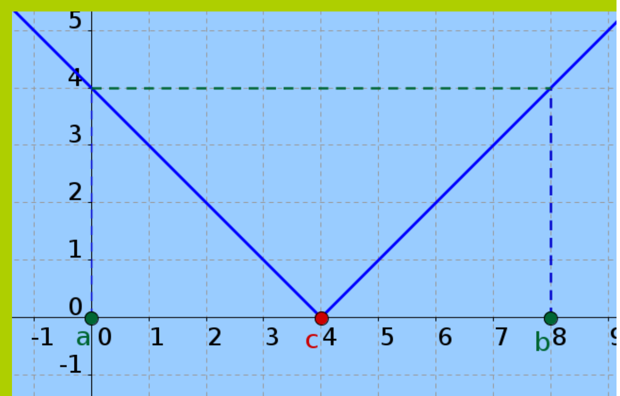
   ii. Estudar se a función $f(x)=|x-4|$ cumpre as hipóteses no intervalo $[0,8]$ e obter nese caso o ponto c ao que fai referéncia o teorema.

i. Sexa f unha función contínua no intervalo $[a,b]$, derivábel no intervalo (a,b) e tal que $f(a)=f(b)$; entón $\exists\, c\in(a,b)\ /\ f'(c)=0$.

Este teorema asegura que toda función derivábel nun intervalo no que toma o mesmo valor en ambos extremos, contén algún ponto no que a tanxente á gráfica é paralela ao eixo OX, é dicer, no que a pendente é nula.



ii. A función $f(x)=|x-4|$ é contínua en todo o seu domínio e, en particular en $[0,8]$. Ademais $f(0)=f(8)=4$. Polo tanto cumpre duas das hipóteses do teorema, mas non cumpre a hipótese relativa á derivabilidade, xá que en $x=4$ resulta $f'(4^-)=-1$ e $f'(4^+)=1$, polo que ao non coincidiren as derivadas laterais f no é derivábel en $x=4$.



2 5. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$, indicando de forma explícita, como mínimo, os seguintes elementos:

i. pontos de corte cos eixos

ii. asíntotas

iii. extremos relativos

iv. pontos de inflexión

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{1\}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, logo presenta un corte co eixo OX en $O=(0,0)$ que é tamén o corte co eixo OY.

A función é contínua e derivábel en todo o seu domínio.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x}=\dfrac{1}{0}=\infty$; os límites laterais son: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1-x}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{1-x}=-\infty$, asi que presenta unha asíntota vertical en $x=1$.

Ademais, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1-x}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{1-x}=-\infty$, polo que non presenta asíntotas horizontais.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x}-(-1)\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=-1$$

Logo a recta $y=-x-1$ é unha asíntota oblícua en $\pm\infty$.

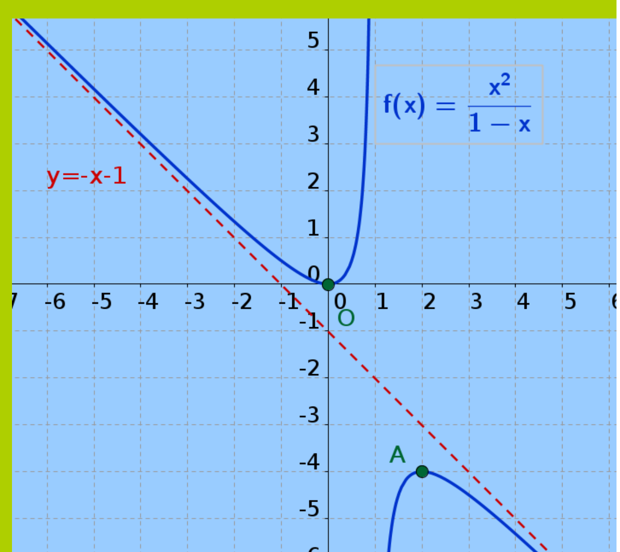
$f'(x)=\dfrac{2x\cdot(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$, logo temos dous posíbeis extremos relativos en $x=0$ e $x=2$.

$$f''(x)=\frac{(2-2x)\cdot(1-x)^2-(2x-x^2)\cdot(2x-2)}{(1-x)^4}=\frac{(2-2x)\cdot(1-x)+2(2x-x^2)}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$f''(x)\neq 0 \ \forall\ x\in Dom\ f$, logo non existen pontos de inflexión.

$f''(0)=2>0$ e $f''(2)=-2<0$; polo tanto temos un mínimo relativo en $x=0$ e un máximo relativo en $x=2$.

Os extremos están en $O(0,0)$ (mínimo) e $A(2,-4)$ (máximo).



2

6. Un solar rectangular ubicado ao pé da estrada ten que pagar en impostos $10€$ por cada metro de fronte e $6€$ por cada metro de fondo. Calcular as dimensións que há de ter un solar de $100\ m^2$ para que o importe do imposto sexa mínimo.

Se chamamos x á fronte e y ao fondo do solar, a sua área é $xy=100$.

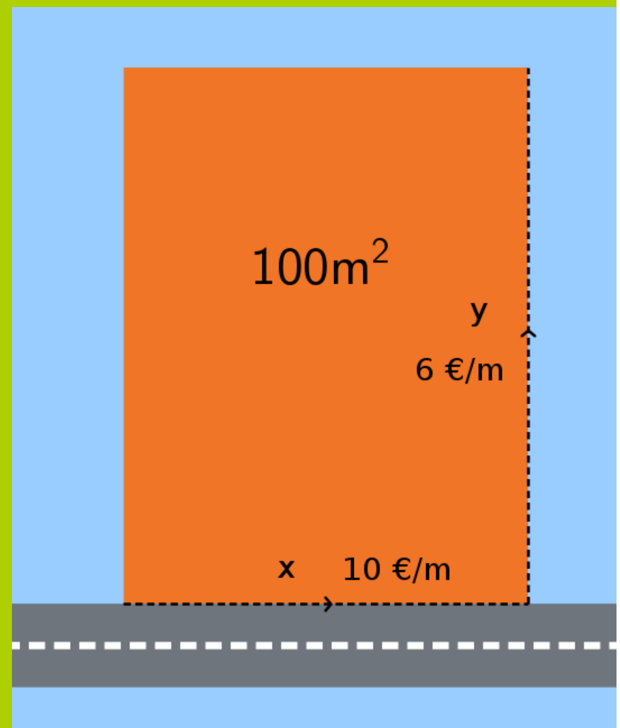
O imposto a pagar é $T=10x+6y$.

Da condición $xy=100$, obtemos $y=\frac{100}{x}$, e polo tanto o imposto pode-se expresar como $T(x)=10x+6\cdot\frac{100}{x}=10x+\frac{600}{x}$, que será a función a optimizar.

Derivando resulta $T'(x)=10-\frac{600}{x^2}$, e igualando a 0 temos:

$$T'(x)=0 \Leftrightarrow 10-\frac{600}{x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x^2=600 \Leftrightarrow x^2=60 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{60}$$



Rexeitamos a solución $x=-\sqrt{60}$ por carecer de sentido xeométrico e estudamos a condición de extremo:

$T''(x)=\frac{1.200}{x^3}>0\ \forall\ x>0$; logo en particular $T''(\sqrt{60})>0$, co que se confirma que $x=\sqrt{60}$ é un mínimo relativo da función obxectivo $T(x)$.

O importe do imposto é:

$$T(\sqrt{60})=10\sqrt{60}+\frac{600}{\sqrt{60}}=\frac{10\cdot 60+600}{\sqrt{60}}=\frac{1.200}{\sqrt{60}}=\frac{1.200\sqrt{60}}{60}=20\sqrt{60}\approx 154{,}92€$$

As dimensións do solar serán $\sqrt{60}\approx 7{,}75\ m$ de fronte e $\frac{100}{\sqrt{60}}=\frac{100\sqrt{60}}{60}=\frac{5\sqrt{60}}{3}\approx 12{,}91\ m$ de fondo.

2	

7. Definir os seguintes conceitos e aportar algun exemplo de cada un deles:
   i. primitiva dunha función
   ii. integral indefinida
   iii. integral definida dunha función nun intervalo
   iv. función integral

i. Chama-se primitiva dunha función $f(x)$ a outra función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Dom f$.

Exemplo

A función $F(x)=x^3+4$ é unha primitiva de $f(x)=3x^2$ porque $F'(x)=3x^2$ en todo o domínio de $f(x)$, que neste caso é $\mathbb{R}$.

ii. Chama-se integral indefinida dunha función $f(x)$, e representa-se pola expresión $\int f(x)dx$, ao conxunto formado por todas as primitivas de $f(x)$:

$\int f(x)dx=\{F(x)\ /\ F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Dom f\}$, que tamén se expresa da forma $\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$, onde $F(x)$ é unha primitiva calquer de $f(x)$.

Exemplo

A integral indefinida da función $f(x)=3x^2$ representa-se da forma $\int 3x^2dx$ e é o conxunto $\{F(x)=x^3+4+C\ /\ C\in\mathbb{R}\}$, ou de xeito reducido, o conxunto das funcións tais que $F(x)=x^3+4+C$, $C\in\mathbb{R}$.

iii. Chama-se integral definida dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $\int_a^b f(x)dx$, á area da rexión determinada pola curva $f(x)$ e o eixo OX no intervalo $[a,b]$. Esta área considera-se positiva se a función é positiva no intervalo $[a,b]$ e negativa se a función é negativa nese intervalo. No caso de que a función tome valores de signo positivo e negativo, a integral definida é a diferenza entre a suma das rexións positivas e as negativas.

Exemplo

A integral definida da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é:
$\int_2^5 3x^2dx=[x^3]_2^5=5^3-2^3=125-8=117u^2$.

Nota: Para obter esta área utiliza-se a Regra de Barrow.

iv. Chama-se función integral dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, á función que a cada $x\in[a,b]$ asócia-lle a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a,x]$.

Exemplo

A función integral da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é a función $F(x)=\int_2^x 3t^2dt=[t^3]_2^x=x^3-2^3=x^3-8$.

Nota: Para obter esta función utiliza-se tamén a Regra de Barrow

1 8. i.Obter unha primitiva $F(x)$ da función $f(x)=\frac{1}{x^4}$ tal que $F(2)=-1$.

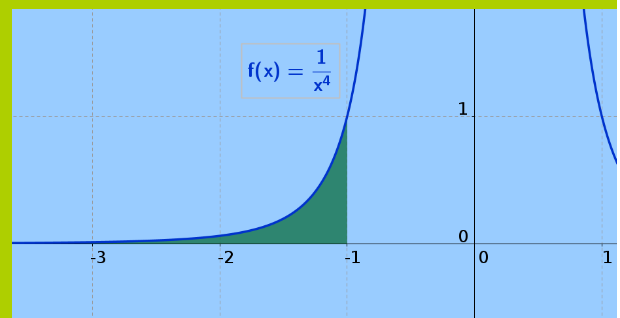
1 ii.Calcular a área delimitada pola curva $f(x)$ no intervalo $(-\infty,-1]$.

i. $\int \frac{1}{x^4}\,dx=-\frac{1}{3x^3}+C$, logo as primitivas de f son da forma $F(x)=-\frac{1}{3x^3}+C$.

$F(2)=-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3\cdot 2^3}+C=-1 \Leftrightarrow C=\frac{1}{3\cdot 2^3}+1=\frac{25}{24}$, polo que a primitiva pedida é $F(x)=-\frac{1}{3x^3}+\frac{25}{24}$.

ii.Como $f(x)=\frac{1}{x^4}>0 \;\;\forall\;\; x\in Dom\, f$, logo a área coincide coa integral:

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^4}\,dx=\left[\frac{-1}{3x^3}\right]_{-\infty}^{-1}=\frac{1}{3}-\lim_{\lambda\to-\infty}\left(-\frac{1}{3\lambda^3}\right)=\frac{1}{3}$$



2 9. Calcular as integrais indefinidas:

i. $\int \frac{3\,dx}{x^2-3x}$ ii. $\int x^2 e^x\,dx$

i. $\int \frac{3\,dx}{x^2-3x}$

$x^2-3x=x(x-3) \Rightarrow \frac{3}{x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)}$

Logo $A(x-3)+Bx\equiv 3 \Leftrightarrow (A+B)x-3A\equiv 3 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A=3 \end{cases} \Leftrightarrow A=-1,\;\; B=1$, e polo tanto:

$$\int\frac{3\,dx}{x^2-3x}=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-3}=-\ln|x|+\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|+C$$

ii. $\int x^2 e^x\,dx$; identificando $u=x^2$ e $dv=e^x$ temos $du=2x\,dx$ e $v=\int e^x\,dx=e^x$ e asi:

$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx$ [1]

Repetindo o proceso, con $u=x$ e $dv=e^x$ resulta $du=dx$ e $v=\int e^x\,dx=e^x$, e volvendo a [1] obtemos:

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx=x^2e^x-2\left[xe^x-\int e^x\,dx\right]=$$

$$=x^2e^x-2\left[xe^x-e^x\right]=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=(x^2-2x+2)\cdot e^x+C$$

1	
1	

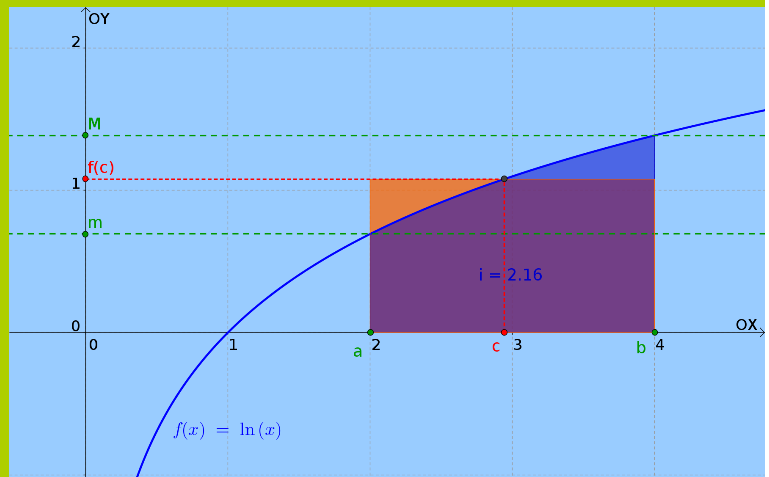
10. i.Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Calculo Integral.

ii.Calcular o valor ao que se refire o teorema para a función $y=1-x^3$ no intervalo $[-2,1]$.

i.Sexa f unha función contínua en $[a,b]$, entón $\exists\, c\in(a,b)\ /\ \int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\cdot f(c)$.

Interpretación xeométrica

A integral definida no intervalo fechado $[a,b]$ é a área delimitada pola curva e o eixo OX nese intervalo. É posíbel determinar un rectángulo que teña como base o mesmo intervalo $[a,b]$ e área igual ao valor da integral definida. É evidente que tal rectángulo deberá ter unha altura comprendida entre os valores mínimo e máximo que alcanza a función nese intervalo.



ii. $\int_{-2}^{1}(1-x^3)\,dx=\left[x-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1}=\left(1-\frac{1}{4}\right)-(-2-4)=7-\frac{1}{4}=\frac{27}{4}$; logo $\exists\, c\in(-2,1)\ /\ \frac{27}{4}=3\cdot f(c)$

Resolvendo obtemos:

$$3\cdot f(c)=\frac{27}{4}\ \Leftrightarrow\ f(c)=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}\ \Leftrightarrow\ 1-c^3=\frac{9}{4}\ \Leftrightarrow\ c^3=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}\ \Leftrightarrow\ c=\sqrt[3]{-\frac{7}{3}}\approx 1{,}33\in(-2,1)$$

1.5	

11. Calcular a área da rexión delimitada polas gráficas das funcións $f(x)=x^2-6$ e $g(x)=-x$ e o semieixo negativo OY .

$$f(x)=g(x)\ \Leftrightarrow\ x^2-6=-x\ \Leftrightarrow\ x^2+x-6=0\ \Leftrightarrow\ (x-2)(x+3)=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=2\\x=-3\end{cases}$$

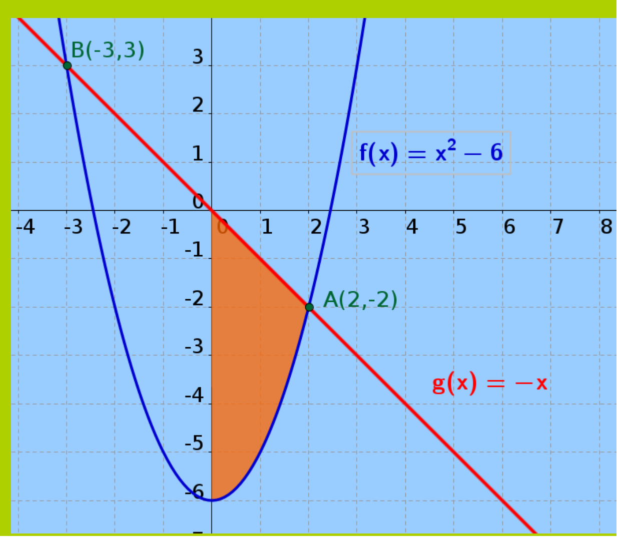
Logo as funcións cortan-se en $A(2,-2)$ e $B(-3,3)$. A rexión a medir é polo tanto a que corresponde ao intervalo $[0,2]$.

Tomando $x=1\in[0,2]$ temos que:

$f(1)-g(1)=-5-(-1)=-4<0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f(x)<g(x)\ \ \forall\ \ x\in(0,2)$

Logo integraremos a función $g(x)-f(x)=-x-x^2+6=-x^2-x+6$, e a área é:



1.5	

12. Determinar un intervalo centrado en $x=0$ tal que a área do recinto delimitado pola gráfica da función $y=x^2$ e o eixo OX sexa de $20\ u^2$.

O intervalo centrado en $x=0$ será da forma $[-a,a]$, con $a>0$, e polo tanto a condición é que $A=\int_{-a}^{a} x^2\,dx=20$.

Como a función presenta simetria par, xá que $f(x)=f(-x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, a rexión tamén é simétrica e podemos reducir a integral:

$A=\int_{-a}^{a} x^2\,dx=2\int_0^a x^2\,dx=20$, e polo tanto a condición reduce-se a:

$$\int_0^a x^2\,dx=10$$

$$\int_0^a x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{3}=10 \Leftrightarrow a^3=30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{30}\approx 3{,}11$$