MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO — 20/01/2015

TEMA 2 CÁLCULO INTEGRAL

| TOTAL | SUMA | EE/EM | NOTA |
|---|---|---|---|
| 11 | | | |

| NOME | GRUPO |
|---|---|
| | |

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 — 1. i. Definir os conceitos de primitiva e de integral indefinida dunha función, aportando algun exemplo de cada un deles.

1 — ii. Obter unha primitiva $F(x)$ da función $f(x)=cos\ x-sen\ 2x$ tal que $F(\pi)=-1$.

i. Chama-se primitiva dunha función $f(x)$ a outra función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Dom f$.

*Exemplo*

A función $F(x)=x^3+4$ é unha primitiva de $f(x)=3x^2$ porque $F'(x)=3x^2$ en todo o domínio de $f(x)$, que neste caso é $\mathbb{R}$.

Chama-se integral indefinida dunha función $f(x)$, e representa-se pola expresión $\int f(x)dx$, ao conxunto formado por todas as primitivas de $f(x)$:

$\int f(x)dx=\{F(x)\ /\ F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Dom f\}$, que tamén se expresa da forma $\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$, onde $F(x)$ é unha primitiva calquer de $f(x)$.

*Exemplo*

A integral indefinida da función $f(x)=3x^2$ representa-se da forma $\int 3x^2dx$ e é o conxunto $\{F(x)=x^3+4+C\ /\ C\in\mathbb{R}\}$, ou de xeito reducido, o conxunto das funcións tais que $F(x)=x^3+4+C$, $C\in\mathbb{R}$.

ii. As primitivas de $f(x)$ son da forma $F(x)=\int(cos\ x-sen\ 2x)\ dx=sen\ x+\frac{1}{2}cos\ 2x+C$.

Como $F(\pi)=-1$ temos: $F(\pi)=sen\ \pi+\frac{1}{2}cos\ 2\pi+C=\frac{1}{2}+C=-1 \Leftrightarrow C=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$.

A primitiva pedida é $F(\pi)=sen\ \pi+\frac{1}{2}cos\ 2\pi-\frac{3}{2}$.

| 2 | |
|---|---|

2. Calcular as integrais indefinidas:

i. $\int x^3 \cos x^4 dx$

ii. $\int \frac{x^2+2}{x^2+x} dx$

i. $\int x^3 \cos x^4 dx$ é unha integral imediata do tipo trigonométrico composto, xá que a derivada de $x^4$ é $4x^3$, logo:

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4} sen\, x^4 + C$$

Nota: tamén se pode resolver utilizando o cámbio de variábel $t = x^4$ e $dt = 4x^3\, dx$:

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4}\int \cos t\, dt = \frac{1}{4} sen\, t + C = \frac{1}{4} sen\, x^4 + C$$

ii. $\int \frac{x^2+2}{x^2+x} dx$ é unha integral racional na que o numerador ten igual grau que o denominador, polo que haberá que descompór en primeiro lugar a expresión nunha suma dun polinómio mais unha fración própria (grau do munerador inferior ao do denominador), facendo a división inteira de polinómios, e resulta $x^2+2 = 1\cdot(x^2+x) - x + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x^2+x} = 1 - \frac{x-2}{x^2+x}$ .

Logo a integral é: $\int \frac{x^2+2}{x^2+x} dx = \int \left(1 - \frac{x-2}{x^2+x}\right) dx = x - \int \frac{x-2}{x^2+x} dx$ [1]

A integral resultante é de tipo racional, na que o denominador é $x^2+x = (x+1)\cdot x$ , logo:

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(x+1)}{(x+1)x} \Leftrightarrow x - 2 = Ax + B(x+1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Para $x = -1$ : $-3 = -A \Leftrightarrow A = 3$ e para $x = 0$ : $-2 = B$ , polo tanto:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x} dx = \int \frac{3}{x+1} dx - \int \frac{2}{x} dx = 3 \ln|x+1| - 2 \ln|x| + C = \ln \frac{|x+1|^3}{x^2} + C$$

Finalmente, volvendo á expresión [1] obtemos: $\int \frac{x^2+2}{x^2+x} dx = x - \ln \frac{|x+1|^3}{x^2} + C$

| 1 | |
|---|---|

3. i. Definición de función integral de $f$ no intervalo $[a,b]$ e enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

| 1 | |
|---|---|

ii. Obter de forma razoada $G(\pi)$ e $G'(\pi)$, onde $G(x)=\int_x^{\pi} e^{\cos t}\,dt$ .

i. Chama-se función integral dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ , á función que a cada $x\in[a,b]$ asócia-lle a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a,x]$ .

*Exemplo*

A función integral da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é a función $F$ tal que $\forall\ x\in[2,5]$, $F(x)=\int_2^x 3t^2\,dt$ .

Como $\int_2^x 3t^2\,dt=\left[t^3\right]_2^x=x^3-2^3=x^3-8$ , a función integral neste caso é $F(x)=x^3-8\ \forall\ x\in[2,5]$ .

ii. Polas propriedades da integral definida, a función $G(x)$ pode-se expresar da forma $G(x)=\int_x^{\pi} e^{\cos t}\,dt=-\int_{\pi}^{x} e^{\cos t}\,dt=\int_{\pi}^{x} -e^{\cos t}\,dt$ .

Logo $G(x)$ é a función integral de $f(x)=-e^{\cos x}$ , e polo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)=-e^{\cos x}$ .

Isto implica que a derivada de $G(x)$ é a función $f(x)$: $G'(x)=f(x)=-e^{\cos x}$ .

Asi que $G(\pi)=\int_{\pi}^{\pi} e^{\cos t}\,dt=0$ , por coincidiren os extremos de integración, e $G'(\pi)=f(\pi)=-e^{\cos\pi}=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$ por ser $G(x)$ é a función integral de $f(x)$ .

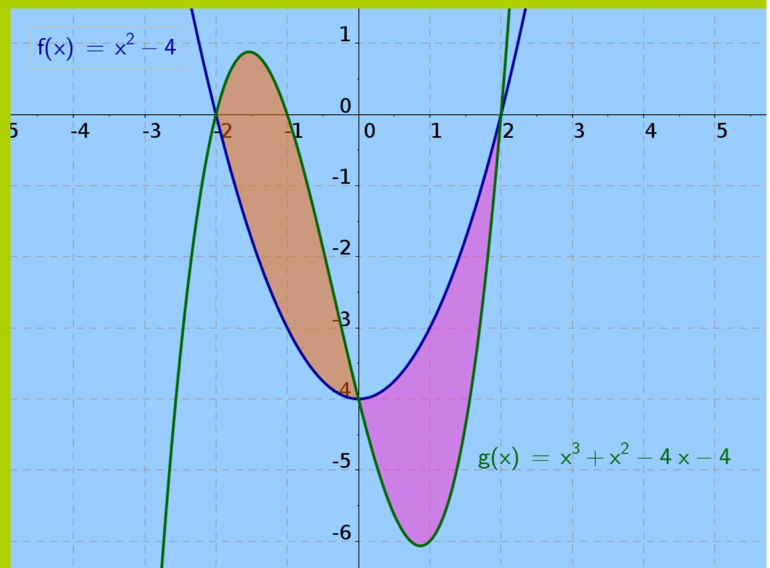
| 2 | |
|---|---|

4. Calcular a área do recinto plano delimitado polas gráficas das funcións $f(x)=x^2-4$ e $g(x)=x^3+x^2-4x-4$.

Igualando as duas expresións obteñen-se os pontos de corte de ambas gráficas:

$$x^2-4=x^3+x^2-4x-4 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-2)\cdot x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Asi que haberá que integrar nos intervalos $[-2,0]$ e $[0,2]$.




No intervalo $[-2,0]$: $-1\in(-2,0)$, $f(-1)=-3$ e $g(-1)=0$, asi que pola continuidade das funcións: $f(-1)<g(-1) \Rightarrow f(x)<g(x) \ \forall\ x\in(-2,0)$

E en $[0,2]$: $1\in(0,2)$, $f(1)=-3$ e $g(1)=-6$, logo: $f(1)>g(1) \Rightarrow f(x)>g(x) \ \forall\ x\in(0,2)$

Polo tanto calcularemos no intervalo $[-2,0]$ $A_1=\int_{-2}^{0}[g(x)-f(x)]\,dx$ e no intervalo $[0,2]$ $A_2=\int_{0}^{2}[f(x)-g(x)]\,dx$.

A área será entón: $A=A_1+A_2=\int_{-2}^{0}[g(x)-f(x)]\,dx+\int_{0}^{2}[f(x)-g(x)]\,dx=$

$$=\int_{-2}^{0}[(x^3+x^2-4x-4)-(x^2-4)]\,dx+\int_{0}^{2}[(x^2-4)-(x^3+x^2-4x-4)]\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_{0}^{2}=(-4+8)+(-4+8)=8\ u^2$$

| 2 | |
|---|---|

5. Obter o valor de $k>0$ tal que a área da rexión delimitada pola curva $f(x)=\frac{k}{(x+1)^2}$ cos semieixos positivos sexa $5\ u^2$.

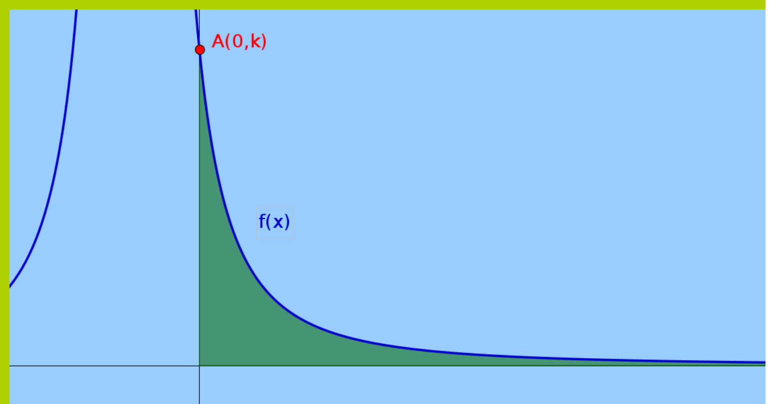
*Nota: Debe-se facer un bosquexo da gráfica para delimitar corretamente o recinto a integrar.*

Os pontos de corte da curva cos semieixos positivos serán:

semieixo $OY$ : $x=0 \Rightarrow f(0)=k$ , logo corta en $A(0,k)$ ;

semieixo $OX$ : $y=0 \Rightarrow 0=\frac{k}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{k}{0}$ , logo non corta ao eixo $OX$ .

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{(x+1)^2}=0$ , polo tanto o semieixo positivo $OX$ é unha asíntota horizontal, asi que o recinto a integrar corresponde-se co intervalo $[0,+\infty)$ .




A área será $S=\int_0^{+\infty} \frac{k}{(x+1)^2}\,dx=k\cdot\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx=-\frac{1}{x+1}+C$ ; polo tanto, escollendo $C=0$ temos:

$$S=k\cdot\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx=k\cdot\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{+\infty}=k\cdot\left[\frac{1}{x+1}\right]_{+\infty}^{0}=k\cdot\left(1-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda+1}\right)=k$$

Como a área há de ser $5$ , resulta entón $k=5$ e polo tanto a función é $f(x)=\frac{5}{(x+1)^2}$ .

| 1 | |
|---|---|

6. Calcular a integral $\int_{-3}^{3}[4\cdot f(x)+2]\,dx$ , sabendo que $f(x)$ é unha función continua en $\mathbb{R}$ , que presenta simetria par, e que $\int_{0}^{3} f(x)dx=5$ .

Polas propriedades da integral definida (integral da suma e integral do produto por un escalar) sabe-se que:

$$\int_{-3}^{3}[4\cdot f(x)+2]\,dx=\int_{-3}^{3}4\cdot f(x)\,dx+\int_{-3}^{3}2\,dx=4\cdot\int_{-3}^{3}f(x)\,dx++\int_{-3}^{3}2\,dx \quad [1]$$

Como $f$ presenta simetria par, resulta que $\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\cdot\int_{0}^{3}f(x)dx=2\cdot 5=10$ .

E ao ser $2$ unha constante $\int_{-3}^{3}2\,dx=2\cdot 6=12$ , asi que volvendo a [1] obtemos:

$$\int_{-3}^{3}[4\cdot f(x)+2]\,dx=4\cdot\int_{-3}^{3}f(x)\,dx+\int_{-3}^{3}2\,dx=4\cdot 10+12=52$$