MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 15/12/2014

RECUP 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

TOTAL	SUMA	EE/EM	NOTA
11			

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 — 1. i. Estudar a continuidade da función $f(x)=\dfrac{mx-1}{x^2-3x+2}$, dependendo do valor de m.

0.5 — ii. Estudar se é posíbel en algun caso estender o domínio de f con continuidade.

i. Ao ser un cociente de dous polinómios, pode presentar discontinuidades no caso de que se anule o denominador: $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}$; logo $Dom\, f=\mathbb{R}-\{1,\ 2\}$ e a función presenta discontinuidades en $x=1$ e $x=2$.

Para $x=1$ temos: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{mx-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{m-1}{0}$. Este límite será ∞ se $m\neq 1$ e será unha indeterminación do tipo $\dfrac{0}{0}$ se $m=1$, que se pode resolver simplificando a fración alxébrica:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-2}=-1$$

Para $x=2$ temos: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{mx-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{2m-1}{0}$. O límite é, analogamente ao anterior, ∞ se $m\neq\dfrac{1}{2}$ e será unha indeterminación do tipo $\dfrac{0}{0}$ se $m=\dfrac{1}{2}$, que se pode resolver simplificando a fración alxébrica:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{2}-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$$

Resumindo:

* se $m\neq\dfrac{1}{2}$ e $m\neq 1$, a función é contínua en todo o seu domínio e presenta discontinuidades de salto infinito en $x=1$ e $x=2$;
* se $m=1$, f presenta unha discontinuidade evitábel en $x=1$ e de salto infinito en $x=2$;
* se $m=\dfrac{1}{2}$, f ten unha discontinuidade de salto infinito en $x=1$ e evitábel en $x=2$.

ii. Á vista do anterior resulta que, se $m=1$ a función pode estender-se con continuidade en $x=1$ definindo $f(1):=-1$, co que a función estendida seria $\hat{f}(x)=\dfrac{1}{x-2}$; e se $m=\dfrac{1}{2}$, a función pode estender-se a $x=2$ definindo $f(2):=\dfrac{1}{2}$ e a función estendida será neste caso $\hat{f}(x)=\dfrac{1}{2x-2}$.

1 2. i. Utilizando a definición de derivada, obter o valor de k para que a función $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & se \;\; x<0 \\ kx-x^2 & se \;\; x\geqslant 0 \end{cases}$ sexa derivábel en $x=0$ e calcular nese caso a derivada $f'(0)$.

0.5 ii. Obter no caso anterior a ecuación da recta normal á curva $f(x)$ en $x=0$.

i. A función está definida e é contínua en $x=0$, xá que:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 3x^2=0$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} kx-x^2=0$, logo $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$.

As derivadas laterais son:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-} 3h=0$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{kh-h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}(k-h)=k$$

Logo f é derivábel en $x=0 \Leftrightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Leftrightarrow k=0$, e nese caso $f'(0)=0$.

A función deberá ser polo tanto $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & se \;\; x<0 \\ -x^2 & se \;\; x\geqslant 0 \end{cases}$.

ii. En $x=0$ temos $f(0)=0$ e $f'(0)=0$, polo tanto a recta tanxente será o eixo de abscisas, de ecuación $y=0$, e a normal é o eixo de ordenadas, de ecuación $x=0$.

2 3. Calcular os límites:

i. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\ln x}{1-x^2}$

ii. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

i. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\ln x}{1-x^2}=\frac{1}{0}=\infty$; os límites laterais son $\lim_{x\to 1^-}\frac{1-\ln x}{1-x^2}=+\infty$ e $\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\ln x}{1-x^2}=-\infty$.

ii. É unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se pode resolver multiplicando polo conxugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}-x}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(1-x)}{x(x-1)}=$$

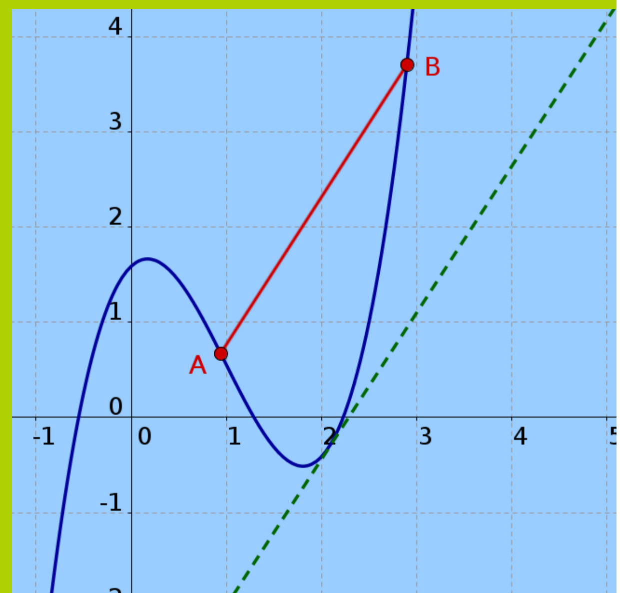
$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

1 4. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial.

1 ii. Obter se a función $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ está nas hipóteses no intervalo $[0,4]$ e obter nese caso o ponto ao que se refire o teorema anterior.

i. Enunciado

Dada unha función f contínua en $[a,b]$ e derivábel en (a,b), $\exists\, c\in(a,b)\ /\ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Interpretación xeométrica

O teorema expresa a idea de que unha función contínua e derivábel nun intervalo, forzosamente presenta algun ponto no interior do intervalo no que a derivada, é dicer, a variación instantánea da función nese ponto, coincide coa taxa de variación média no intervalo. En termos físicos, se un fenómeno é contínuo e derivábel, en algun momento a sua variación instantánea há de ser igual á média.

ii. A función $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ é contínua e derivábel en $\mathbb{R}-\{-3\}$ e polo tanto está nas hipóteses do teorema no intervalo $[1,4]$; asi que a ecuación $f'(x)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$ debe ter algunha solución no intervalo $(1,4)$:

$$f'(x)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{4}}{4-1}=\frac{4-7}{84}=-\frac{3}{84}=-\frac{1}{28}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{(x+3)^2}=\frac{1}{28}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (x+3)^2=28\ \Leftrightarrow\ x+3=\pm\sqrt{28}\ \Leftrightarrow\ x=-3\pm\sqrt{28}=-3\pm2\sqrt{7}$$

Das duas solución admitimos a que está no intervalo de referéncia, que é $x=-3+2\sqrt{7}\simeq2{,}29$.

2	

5. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\frac{(x+2)^2}{e^x}$, indicando de forma explícita, como mínimo, o domínio, pontos de corte cos eixos, asíntotas, monotonia, extremos e curvatura.

$Dom\ f=\mathbb{R}$ e a función é contínua e derivábel en todo o seu domínio.

Cortes cos eixos: $f(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ e $f(0)=4$, polo que corta ao eixo OX en $A(-2,0)$ e ao eixo OY en $B(0,4)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^2}{e^x}$ é un caso $\frac{\infty}{\infty}$, e por L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2(x+2)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)^2\cdot e^{-x}=+\infty$, logo existe unha asíntota horizontal $y=0$ para $x\to+\infty$.

Poderia existir unha asintota oblícua para $x\to-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^2}{xe^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^2\cdot e^{-x}}{x}$ é unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e por L'Hôpital:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^2\cdot e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2(x+2)\cdot e^{-x}-(x+2)^2\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}[2(x+2)-(x+2)^2]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}(-x^2-2x)=-\infty$, polo que non presenta asíntota oblícua.

$$f'(x)=\frac{2(x+2)e^x-(x+2)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{-x^2-2x}{e^x}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=-2\end{cases}$, logo temos dous posíbeis extremos relativos en $x=-2$ e $x=0$.

Como o seu denominador é positivo, o signo da derivada depende do numerador, logo $f'(x)<0\ \forall\ x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ e $f'(x)>0\ \forall\ x\in(-2,0)$, asi que a función será estritamente crecente en $(-2,0)$ e estritamente decrecente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)e^x-(-x^2-2x)e^x}{e^{2x}}=\frac{x^2-2}{e^x}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$; hai polo tanto dous posíbeis pontos de inflexión.

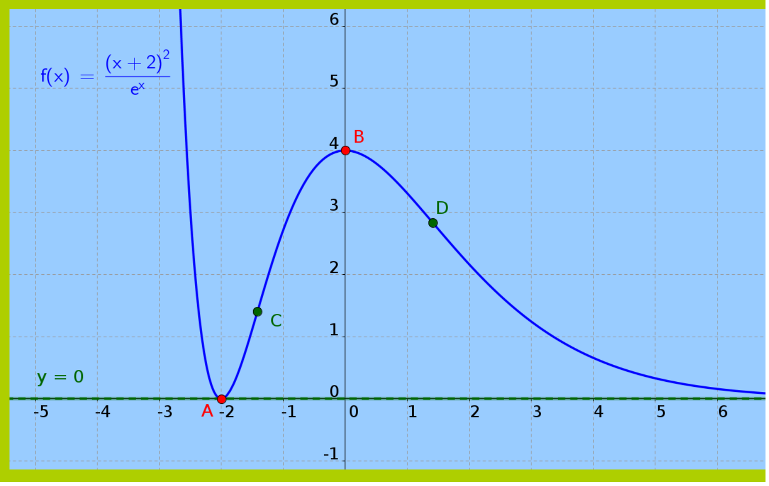
O signo da segunda derivada depende de novo do numerador:

$f''(x)>0\ \ \forall\ \ x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ e $f'(x)<0\ \ \forall\ \ x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, asi que a función será convexa en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ e cóncava en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, o que confirma ademais os dous pontos de inflexión:

$C(-\sqrt{2},f(-\sqrt{2}))$ e $D(\sqrt{2},f(\sqrt{2}))$

$f''(-2)=2e^2>0$ e $f''(0)=-2<0$, polo que f presentará un mínimo relativo en $A(-2,0)$ e un máximo relativo en $B(0,4)$.

A gráfica é:



2

6. Calcular as dimensións dun bidón cilíndrico tal que a sua capacidade sexa de $160\ l$, de xeito que a sua superfície total sexa mínima.

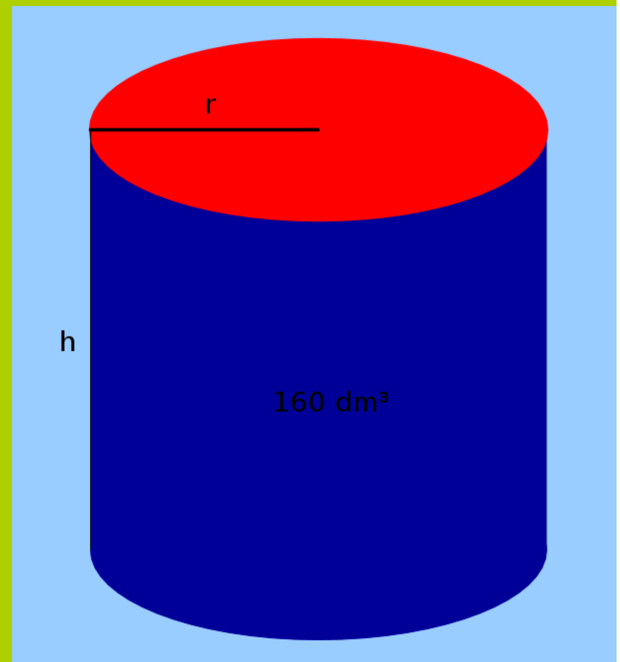
Se designamos por r o raio da base e por h a altura do bidón, expresados ambos en dm, o volume é $V = \pi r^2 h$.

A área total é a suma da área lateral $A_L = 2\pi rh$ e a área das bases $A_B = 2\pi r^2$:

$$A = A_L + A_B = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+h)$$

Como o volume há de ser fixo resulta: $V = \pi r^2 h = 160 \Leftrightarrow h = \dfrac{160}{\pi r^2}$; e polo tanto a área pode expresar-se en función do raio da forma:

$A = 2\pi rh = 2\pi r \cdot \dfrac{160}{\pi r^2} = \dfrac{320}{r}$, asi que a función a optimizar é $A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{320}{r}$.



$$A'(r) = 4\pi r - \frac{320}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{320}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{320}{4\pi} = \frac{80}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{80}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

$A''(r) = 4\pi + \dfrac{640}{r^3}$; $A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{80}{\pi}}\right) = 4\pi + \dfrac{640}{\frac{80}{\pi}} = 12\pi > 0$, logo a función área ten un mínimo relativo en $r = \sqrt[3]{\dfrac{80}{\pi}}$.

Para este valor do raio, a altura do bidón será $h = \dfrac{160}{\pi r^2} = \dfrac{160}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{80}{\pi}\right)^2}} = \dfrac{40}{\sqrt[3]{100\pi}}$ e a área total:

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\right) = 2\pi \sqrt[3]{\left(\frac{80}{\pi}\right)^2} + \frac{320}{\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}} = 8\sqrt[3]{100\pi} + \frac{160}{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}} = 8\sqrt[3]{100\pi} + \frac{160\sqrt[3]{\frac{100}{\pi^2}}}{\frac{10}{\pi}} = 8\sqrt[3]{100\pi} + 16\sqrt[3]{100\pi} =$$

$$= 24\sqrt[3]{100\pi}\ dm^2$$