MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 13/11/2014

TEMA 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

TOTAL	SUMA	EE/EM	NOTA
11			

NOME	GRUPO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 — 1. i. Estudar o domínio e continuidade da función $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$, estudando as posíbeis discontinuidades que presente.

0.5 — ii. Estudar se é posíbel estender a continuidade de f a toda a recta real.

i. Ao ser un cociente de dous polinómios, pode presentar discontinuidades no caso de que se anule o denominador: $x^2-9=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

A función é polo tanto contínua en todo o seu domínio, que é $Dom\ f=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$

Para $x=-3$ temos unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que se resolve simplificando a fración alxébrica: $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{6}$

Para $x=3$ temos: $\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{6}{0}=\infty$

Logo a función presenta unha discontinuidade evitábel en $x=-3$ e outra discontinuidade de salto infinito en $x=3$.

ii. Á vista do anterior, a función pode estender-se con continuidade no caso $x=-3$, definindo $f(-3):=-\frac{1}{6}$, e non se pode estender para $x=3$.

A función estendida é $\hat{f}(x)=\frac{1}{x-3}$, con domínio $Dom\ \hat{f}=\mathbb{R}-\{3\}$.

1	

2. i. Utilizando a definición de derivada, obter o valor de k para que a función $f(x)=\begin{cases} k(x-2) & se\ x\leqslant 2 \\ x^2-3x+2 & se\ x>2 \end{cases}$ sexa derivábel en $x=2$ e calcular nese caso a derivada $f'(2)$.

0.5	

ii. Obter a ecuación da recta tanxente á curva $f(x)$ en $x=4$.

i. A función está definida e é contínua en $x=2$, xá que:

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} k(x-2)=0$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} k(x-2)=0$, logo $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=0$.

As derivadas laterais son:

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{k(2+h-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{kh}{h}=\lim_{h\to 0^-} k=k$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)^2-3(2+h)+2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4+4h+h^2-6-3h+2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+} 1+h=1$$

Logo f é derivábel en $x=2 \Leftrightarrow f'(2^-)=f'(2^+) \Leftrightarrow k=1$.

Neste caso a función é $f(x)=\begin{cases} x-2 & se\ x\leqslant 2 \\ x^2-3x+2 & se\ x>2 \end{cases}$.

ii. A tanxente á curva en $x=4$ será unha recta de ecuación $y-y_0=m(x-x_0)$, onde $x_0=4$, $y_0=f(4)=6$ e $m=f'(4)=5$, logo:

$$y-6=5\cdot(x-4) \Leftrightarrow y-6=5x-20 \Leftrightarrow y=5x-14$$

2 3. Calcular os límites:

i. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x+\sqrt{6+x}}$ ii. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

i. É unha indeterminación do tipo $\dfrac{0}{0}$, e multiplicando polo conxugado resulta:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x+\sqrt{6+x}} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\cdot(x-\sqrt{6+x})}{(x+\sqrt{6+x})\cdot(x-\sqrt{6+x})} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\cdot(x-\sqrt{6+x})}{x^2-(6+x)} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\cdot(x-\sqrt{6+x})}{x^2-x-6} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\cdot(x-\sqrt{6+x})}{(x+2)\cdot(x-3)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-\sqrt{6+x}}{x-3} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

ii. É unha indeterminación do tipo $\dfrac{0}{0}$, que se pode resolver utilizando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Este novo límite segue a ser unha indeterminación do mesmo tipo, logo aplicamos de novo a Regra de L'Hôpital e obtemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

1 4. i. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema de Bolzano.

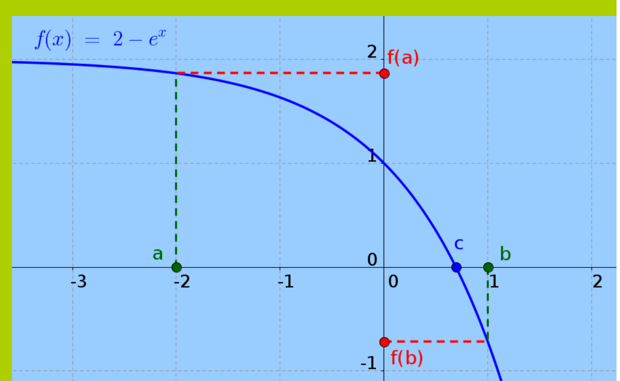
1 ii. Estudar se a ecuación $1+\operatorname{sen} x = x-\cos x$ ten algunha raíz real e, no seu caso, dar un intervalo no que se poda localizar esa raíz.

i. *Enunciado*

Dada unha función f contínua en $[a,b]$ que tome valores de signo oposto nos extremos do intervalo, $\exists\ c \in (a,b)\ /\ f(c)=0$.

Interpretación xeométrica

O teorema reflicte un fenómeno evidente, como é que se a función toma valores de signo oposto nos extremos entón mudará de signo no interior do intervalo $[a,b]$, asi que ao ser contínua necesariamente há de ter un ponto de corte co eixo OX no intervalo (a,b) .



ii. $1+\operatorname{sen} x = x-\cos x \iff \operatorname{sen} x+\cos x - x+1=0$, e definindo $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x-x+1$, resulta que f é unha función contínua en $\mathbb{R}$ e ademais $f(0)=\operatorname{sen} 0+\cos 0-0+1=2>0$ e $f(\pi)=\operatorname{sen}\pi+\cos\pi-\pi+1=-1-\pi+1=-\pi>0$.

Polo tanto f está nas hipóteses do Teorema de Bolzano, asi que $\exists\ c \in (0,\pi)\ /\ f(c)=0$, que equivale a que $\operatorname{sen} c+\cos c-c+1=0 \iff 1+\operatorname{sen} c=c-\cos c$, logo c é unha solución da ecuación.

2 5. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\frac{x^2}{4x+2}$, indicando de forma explícita, como mínimo, o domínio, pontos de corte cos eixos, asíntotas, monotonia, extremos e curvatura.

$4x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$, logo $Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}$ e a función é contínua e derivábel en todo o seu domínio.

Cortes cos eixos: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, polo que corta a ambos eixos en $O(0,0)$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{x^2}{4x+2}=\infty$; os límites laterais son: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-} \frac{x^2}{4x+2}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{x^2}{4x+2}=+\infty$, asi que presenta unha asíntota vertical en $x=-\frac{1}{2}$.

Ademais $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4x+2}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4x+2}=+\infty$, polo que non presenta asíntotas horizontais.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{4x+2}=\frac{1}{4}$, que será a pendente da asíntota ablícua, no caso de que exista.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-\frac{1}{4}x=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x+2}-\frac{x}{4}=\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2x^2-x}{8x+4}=\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{8x+4}=-\frac{1}{8}$$

Polo tanto presenta unha asíntota oblícua en $\pm\infty$ de ecuación $y=\frac{x}{4}-\frac{1}{8}=\frac{2x-1}{8}$.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(4x+2)-4x^2}{(4x+2)^2}=\frac{4x^2+4x}{(4x+2)^2}=\frac{x^2+x}{(2x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$, logo temos dous posíbeis extremos relativos en $x=-1$ e $x=0$.

Como o seu denominador é positivo, o signo da derivada depende do numerador, logo $f'(x)>0\ \forall\ x\in(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$ e $f'(x)<0\ \forall\ x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$, asi que a función será estritamente crecente en $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$ e estritamente decrecente en $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$.

$$f''(x)=\frac{(2x+1)\cdot(2x+1)^2-(x^2+x)\cdot 4(2x+1)}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)^2-4(x^2+x)}{(2x+1)^3}=\frac{1}{(2x+1)^3}\neq 0\ \ \forall\ x \text{ ìn } Dom\ f$$

Asi que non existen pontos de inflexión.

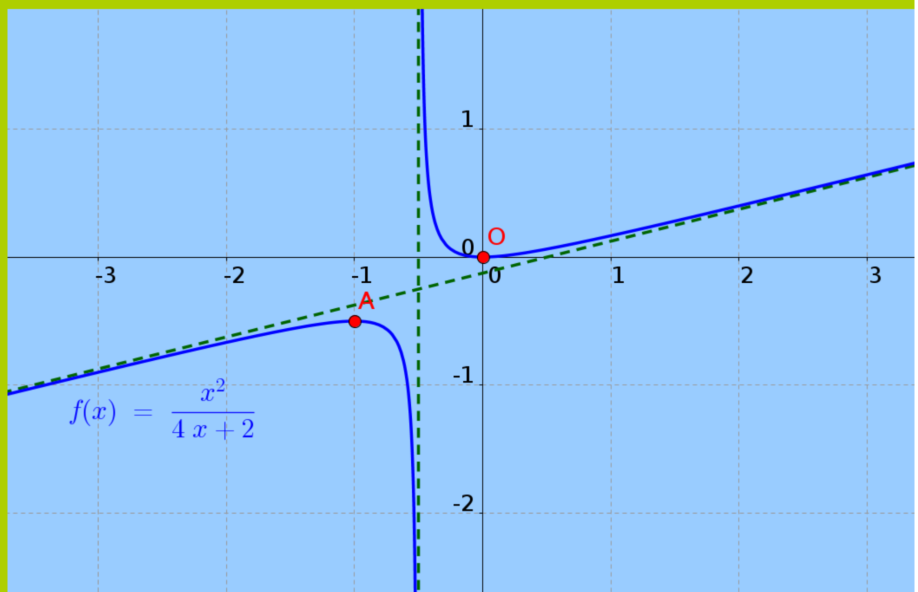
Ademais:

$$f''(-1)=-1<0 \Rightarrow f''(x)<0 \quad \forall \quad x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$$

$$f''(0)=1>0 \Rightarrow f''(x)>0 \quad \forall \quad x \in \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

Polo tanto a función é cóncava en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, convexa en $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ e presenta extremos relativos en $A\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ (máximo relativo) e $O(0,0)$ (mínimo relativo).

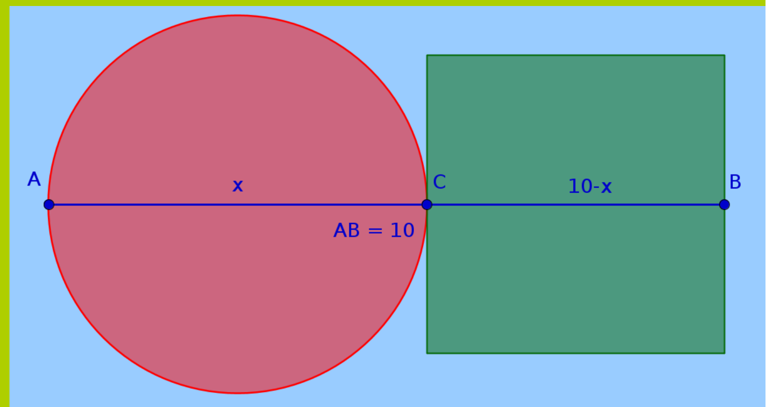
A gráfica é:



2

6. Un segmento AB de $10\ m$ de lonxitude divide-se en dous anacos AC e CB. Con diámetro AC construe-se un círculo e con lado CB construe-se un cuadrado. Determinar a posición do ponto C de xeito que a suma das áreas das duas figuras sexa mínima.

Se definimos x como a lonxitude do segmento AC, resulta que o círculo terá raio $\frac{x}{2}$ e o cuadrado terá lado $10-x$.



Nestas circunstáncias, a área do círculo é $A_1=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{\pi x^2}{4}$ e a do cuadrado será $A_2=(10-x)^2=x^2-20x+100$.

A suma das áreas é:

$$A=A_1+A_2=\frac{\pi x^2}{4}+x^2-20x+100=\left(\frac{\pi}{4}+1\right)x^2-20x+100=\frac{(\pi+4)x^2-80x+400}{4}.$$

Asi que a función a minimizar é $A(x)=\frac{(\pi+4)x^2-80x+400}{4}$.

Derivando obtemos $A'(x)=\frac{2(\pi+4)x-80}{4}=\frac{(\pi+4)x-40}{2}$, e igualando a 0 resulta:

$(\pi+4)x-40=0 \Leftrightarrow x=\frac{40}{\pi+4}$, que é un posíbel extremo relativo.

$A''(x)=\frac{\pi+4}{2}>0 \quad \forall \ x\in[0,10]$; en particular $A''\left(\frac{40}{\pi+4}\right)>0$, asi que a función presenta un mínimo relativo en $x=\frac{40}{\pi+4}$.

Logo o segmento deberá dividir-se en dous anacos, o primeiro de lonxitude $\frac{40}{\pi+4}\approx 5{,}60\ m$ e o segundo de lonxitude $10-\frac{40}{\pi+4}=\frac{10\pi}{\pi+4}\approx 4{,}40\ m$, de xeito que a suma das áreas é:

$$A\left(\frac{40}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\left(\frac{40}{\pi+4}\right)^2-80\left(\frac{40}{\pi+4}\right)+400}{4}=\frac{\frac{1.600}{\pi+4}-\frac{3.200}{\pi+4}+400}{4}=\frac{400\pi}{4(\pi+4)}=\frac{100\pi}{\pi+4}\ m^2$$