MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 22/05/2014

EXAME TEMA 5

REC TEMAS 1-4

TOTAL	SUMA	NOTA

NOME	GRUPO

REC
- □ Só XEOMETRIA....................................EXS 11-14 (7 PTOS.)
- □ XEOM & CDIF.......................................EXS 1-4 & 11-14 (7.5+7 PTOS.)
- □ XEOM & CDIF & CINT.............................EXS 1, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13 (6+5.5+6 PTOS.)
- □ XEOM & CDIF & MDSL..........................EXS 1, 2, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13 (6+4+6 PTOS.)
- □ XEOM & CINT & MDSL...........................EXS 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (5.5+4+7 PTOS.)
- □ TODO..EXS 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13 (6+4+4+4 PTOS.)

1 | 1. i. Calcular o valor de k para que a función $f(x)=\dfrac{kx^2-12}{x-2}$ poda estender-se con continuidade a toda a recta real.

1 | ii. Para o valor de k obtido no caso anterior, estudar a derivabilidade da función estendida en $x=2$ utilizando a definición de derivada.

i. Ao ser un cociente de dous polinómios, pode presentar discontinuidades no caso de que se anule o denominador: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Para $x=2$ temos: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{kx^2-12}{x-2}=\dfrac{4k-12}{0}=\infty$ sempre que $k\neq 3$.

No caso de que $k=3$ temos: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-12}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}3(x+2)=12$.

Polo tanto a función é contínua en $\mathbb{R}-\{2\}$ e presenta unha discontinuidade en $x=2$, que é de tipo infinito se $k\neq 3$ e evitábel se $k=3$. Neste último caso pode-se estender o domínio da función a toda a recta real con continuidade.

A función estendida é $\hat{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-12}{x-2} & se \quad x\neq 2\\ 12 \quad se \quad x=2\end{cases}$ ou tamén, simplificando, $\hat{f}(x)=3(x+2)$.

ii. Para $k=3$ a función estendida é derivábel en $\mathbb{R}$ por ser unha recta, e a sua derivada é:

$$\hat{f}'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{3[(x+h)+2]-3(x+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x+3h+6-3x-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3 \quad \forall \quad x\in\mathbb{R}$$

En particular: $\hat{f}'(2)=3$

2	

2. Obter unha función polinómica de 3º grau que teña un ponto de inflexión en $P(2,-10)$ con tanxente en P paralela á recta $y=-9x$ e que pase pola orixen de coordenadas.

Toda función polinómica de 3º grau é da forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Por pertencer o ponto $P(2,-10)$ á gráfica da función, $f(2)=-10$. Ademais a pendente en $x=2$ há de ser a mesma que a da recta $y=-9x$, logo $f'(2)=-9$ e por ser P un ponto de inflexión, ten que ser $f''(2)=0$. Finalmente, por conter á orixen de coordenadas, $f(0)=0$. Logo as condicións son as seguintes:

$f(2)=-10 \Leftrightarrow 8a+4b+2c+d=-10$

$f'(2)=-9 \Leftrightarrow 12a+4b+c=-9$

$f''(2)=0 \Leftrightarrow 12a+2b=0$

$f(0)=0 \Leftrightarrow d=0$

Por ser $d=0$, o problema reduce-se a resolver o sistema $\begin{cases} 8a+4b+2c=-10 \\ 12a+4b+c=-9 \\ 12a+2b=0 \end{cases}$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & -10 \\ 12 & 4 & 1 & -9 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}\cdot F_1 \\ \frac{1}{2}F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -5 \\ 12 & 4 & 1 & -9 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{2F_3-F_2 \\ F_2-3F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvendo por filas obtemos:

$c=3$; $-2b-2\cdot 3=6 \Leftrightarrow -2b=12 \Leftrightarrow b=-6$ e $4a+2\cdot(-6)+3=-5 \Leftrightarrow 4a=4 \Leftrightarrow a=1$

Logo a función é $f(x)=x^3-6x^2+3x$.

0.5	
1	

3. i. Enunciado do Teorema de Bolzano.
   ii. Estudar se a ecuación $sen\ x=x^2$ ten algunha solución real e, en caso afirmativo, procurar un intervalo no que se poda atopar tal solución.

i. Dada unha función f contínua en $[a,b]$, e que tome valores de signo contrário nos extremos dese intervalo, $\exists\ c\in(a,b)\ /\ f(c)=0$.

ii. $sen\ x=x^2 \Leftrightarrow sen\ x-x^2=0$, logo tomando a función $f(x)=sen\ x-x^2$, que é contínua en $\mathbb{R}$, temos que:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi^2}{4}<0$ e $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{36}=\frac{18-\pi^2}{36}>0$, polo tanto $\exists\ c\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\ /\ f(c)=0$.

2	

4. Representar graficamente a función $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$, indicando de forma explícita, como mínimo, os seguintes elementos:
i. pontos de corte cos eixos
ii. asíntotas
iii. extremos relativos
iv. pontos de inflexión

Ao ser un cociente de duas funcións contínuas e derivábeis en $\mathbb{R}$, a función é contínua e derivábel en todo o seu domínio, que é $Dom\ f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Corte OX: $e^x\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0 \ \forall \ x\in Dom\ f$, logo non presenta cortes co eixo OX.

Corte OY: $f(0)=\frac{e^0}{-1}=-1$, logo hai un corte co eixo OY en $A(0,-1)$.

$\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x-1}=\infty$; e estudando os límites laterais resulta: $\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x}{x-1}=-\infty$ e $\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x}{x-1}=+\infty$, asi que presenta unha asíntota vertical en $x=1$.

Ademais, usando a Regra de L'Hôpital, obtemos $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=0$, polo que presenta unha asíntotas horizontal en $y=0$ para $x\to-\infty$.

De existir asíntotas oblícuas, seria so no caso $x\to+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x\cdot(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$, logo non hai asíntotas oblícuas.

$f'(x)=\frac{e^x\cdot(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, logo temos un posíbel extremo relativo en $x=2$, onde a función toma valor $f(2)=\frac{e^2}{1}=e^2$.

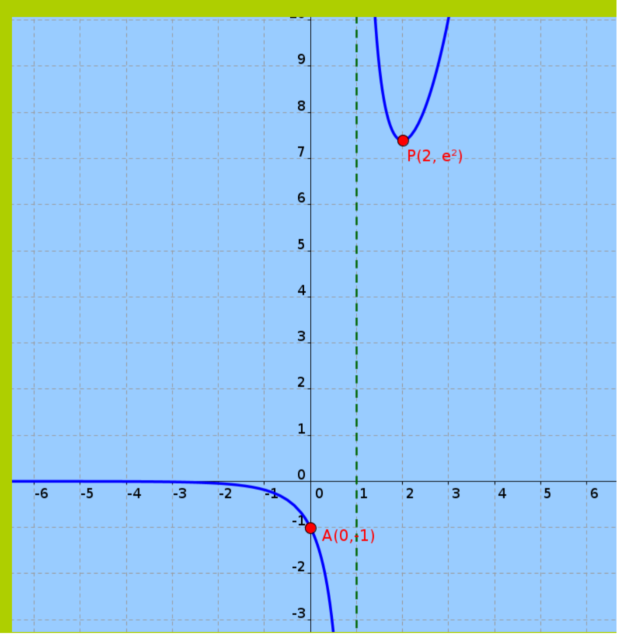
$$f''(x)=\frac{[e^x\cdot(x-2)+e^x]\cdot(x-1)^2-e^x\cdot(x-2)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{[e^x\cdot(x-2)+e^x]\cdot(x-1)-2e^x\cdot(x-2)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{e^x\cdot[(x-1)^2-2(x-2)]}{(x-1)^3}=\frac{e^x\cdot(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}\notin\mathbb{R}$, asi que non existen pontos de inflexión.

Ademais $f''(2)=e^2\cdot(2^2+4\cdot 2+5)=17e^2>0$, polo que temos un mínimo relativo en $P(2,e^2)$.



1	
1	

5. i. Definir os conceitos de primitiva dunha función e de integral indefinida e aportar algún exemplo de cada un deles.
   ii. Obter unha primitiva $F(x)$ da función $f(x)=x\cdot\cos x$ tal que $F(\pi)=-1$.

i. Dada unha función f, chama-se primitiva de f a toda función F tal que $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Dom\ f$.

Chama-se integral indefinida de f ao conxunto formado por todas as suas primitivas. Se duas funcións son primitivas dunha mesma función f, ambas as duas distinguen-se nunha constante; polo tanto o conxunto de todas as primitivas de f pode expresar-se da forma $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ onde F é unha primitiva calquer de f e C é a constante de integración. De xeito mais preciso, a integral indefinida de f é o conxunto $\{F(x)\ /\ F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Dom\ f\}$.

Exemplos

Dada a función $f(x)=3x^2$, con domínio $Dom\ f=\mathbb{R}$, a función $F(x)=x^3$ é unha primitiva de f, xá que $F'(x)=f(x)=3x^2\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

O conxunto $\{x^3+C\ /\ C\in\mathbb{R}\}$, é a integral indefinida de f; ou doutro xeito $\int 3x^2\,dx=x^3+C,\ C\in\mathbb{R}$.

ii. A integral $\int x\cdot\cos x\,dx$ pode-se obter por partes, facendo $u=x$ e $dv=\cos x\,dx$; e de aí $du=dx$ e $v=\int\cos x\,dx=\operatorname{sen} x$, logo:

$$F(x)=\int x\cdot\cos x\,dx=x\cdot\operatorname{sen} x-\int\operatorname{sen} x\,dx=x\cdot\operatorname{sen} x+\cos x+C$$

$F(\pi)=0\ \Leftrightarrow\ \pi\cdot\operatorname{sen}\pi+\cos\pi+C=-1+C=-1\ \Leftrightarrow\ C=0$, e polo tanto a función pedida é:

$$F(x)=x\cdot\operatorname{sen} x+\cos x$$

0.5	
1	

6. i. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral.
   ii. Calcular $f(2)$ sabendo que f é unha función contínua en $\mathbb{R}$ e que $\int_0^x f(t)\,dt=x^2\cdot(1+x)$.

i. Dada unha función f contínua no intervalo $[a,b]$, a función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é unha función derivábel en $[a,b]$, e a sua derivada é a función f: $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in[a,b]$.

ii. Polo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, a función $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ é unha primitiva de $f(x)$; polo tanto $F'(x)=f(x)$.

Como $\int_0^x f(t)\,dt=x^2\cdot(1+x)$, resulta que $F(x)=x^2\cdot(1+x)=x^3+x^2$ e polo tanto $f(x)=F'(x)=3x^2+2x$.

Asi que $f(2)=3\cdot 2^2+2\cdot 2=16$.

2	

7. Calcular a área da rexión delimitada polas gráficas das funcións $f(x)=x^3+x^2-4x$ e $g(x)=x^2$.

Os pontos de corte de ambas as gráficas son: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3+x^2-4x=x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Os intervalos de integración serán polo tanto $[-2,0]$ e $[0,2]$.

En $[-2,0]$ temos:

$-1\in[-2,0]$, $f(-1)=4$ e $g(-1)=1$, logo $f(-1)>g(-1) \Rightarrow f(x)>g(x) \ \forall \ x\in[-2,0]$

En $[0,2]$ temos:

$1\in[0,2]$, $f(1)=-2$ e $g(1)=1$, logo $f(1)<g(1) \Rightarrow f(x)<g(x) \ \forall \ x\in[0,2]$

A área pedida será:

$$A=\int_{-2}^{0}[f(x)-g(x)]\,dx+\int_{0}^{2}[g(x)-f(x)]\,dx=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}=-(4-8)+8-4=8\ u^2$$

2	

8. Estudar a compatibilidade do sistema $S\equiv\begin{cases}x+y+z=2\\kx+y=1\\x+kz=1\end{cases}$, dependendo do valor de k e resolvé-lo nos casos en que sexa posíbel.

[Nota: deben-se utilizar o Teorema de Rouché e a Regra de Cramer.]

As matrices son respectivamente $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\k&1&0\\1&0&k\end{pmatrix}$ e $M^*=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\k&1&0&1\\1&0&k&1\end{pmatrix}$.

$$det\ M=\begin{vmatrix}1&1&1\\k&1&0\\1&0&k\end{vmatrix}=-k^2+k-1\ ;\ -k^2+k-1=0\ \Leftrightarrow\ k^2-k+1=0\ \Leftrightarrow\ k=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}\notin\mathbb{R}$$

$det\ M\neq 0\ \Rightarrow\ rang\ M=3\ \ \forall\ \ k\in\mathbb{R}$ e polo tanto $rang\ M=rang\ M^*=3\ \ \forall\ \ k\in\mathbb{R}$, asi que estamos ante un sistema compatíbel determinado independentemente do valor de k.

A solución será entón:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\k&1&0\\1&0&k\end{vmatrix}}=\frac{k-1}{-k^2+k-1}\ ,\ y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\k&1&0\\1&1&k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\k&1&0\\1&0&k\end{vmatrix}}=\frac{-2k^2+2k-1}{-k^2+k-1}\ \text{ e }\ z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\k&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\k&1&0\\1&0&k\end{vmatrix}}=\frac{-k}{-k^2+k-1}$$

Simplificando, podemos expresar a solución da forma:

$$\left(\frac{1-k}{k^2-k+1},\frac{2k^2-2k+1}{k^2-k+1},\frac{k}{k^2-k+1}\right)\quad k\in\mathbb{R}$$

1	

9. Resolver a ecuación matricial $XA=I_3-X$, onde I_3 é a matriz unitária de orden 3 e $A=\begin{pmatrix}1&5&2\\1&1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}$.

$$XA=I_3-X\ \Leftrightarrow\ XA+X=I_3\ \Leftrightarrow\ X(A+I_3)=I_3\ \Leftrightarrow\ X=I_3\cdot(A+I_3)^{-1}=(A+I_3)^{-1}$$

$$A+I_3=\begin{pmatrix}1&5&2\\1&1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&2\\1&2&0\\0&4&-2\end{pmatrix}$$

$det(A+I_3)=10\neq 0\ \Rightarrow\ A+I_3$ é regular, é dicer, ten inversa; logo:

$$X=(A+I_3)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4&18&-4\\2&-4&2\\4&-8&-1\end{pmatrix}$$

1	

10. Resolver a ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -15$.

Desenrolando polos elementos da primeira coluna temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 1 - x^4$$

Logo $1 - x^4 = -15 \iff x^4 = 16 \iff x = \pm 2$.

1	

11. i.Calcular o ángulo formado polos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sabendo que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 10$ e $|\vec{u} + \vec{v}| = 14$

1	

ii.Calcular a proxeción ortogonal do vector $\vec{u} = (2, -3, 1)$ sobre $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e a área do paralelogramo determinado por ambos.

i.Da definición de produto escalar sabe-se que $\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$, logo:

$|\vec{u}| = 6 \iff \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = 36$, e do mesmo xeito obtemos $\vec{v}^2 = 100$ e $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 196$.

Como ademais, polas propriedades do produto escalar, temos que $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$; resulta:

$$196 = \vec{u}^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = 36 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + 100 = 136 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} \iff 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = 196 - 136 = 60 \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 30$$

Logo o ángulo formado polos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{30}{6 \cdot 10} = \dfrac{1}{2}$, asi que o ángulo será $\operatorname{acos} 0{,}5 = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$.

ii.A proxeción de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é $p = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

A área é o módulo do produto vectorial de ambos os vectores: $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, asi que a área do paralelogramo é:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = |(-6, -3, 3)| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

1	

12. i.Dado o plano $\pi \equiv x+y-z-1=0$ e a recta $r \equiv \begin{cases} 3x+y+z=6 \\ 2x+y=2 \end{cases}$, estudar a posición relativa de ambas as figuras e obter a sua interseción, no caso de que exista.

1	

ii.Obter a ecuación xeral do plano α que contén á recta r e é perpendicular a π.

i.Para estudar a posición relativa, estudaremos o rango do sistema formado polas ecuacións do plano e da recta, con matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, resulta que $rang\ M=2$ e $rang\ M^*=3$, logo é un sistema incompatíbel, polo que $\pi \| r$ e $\pi \cap r = \emptyset$.

ii.O plano α ven determinado por calquer ponto de r e, como vectores direcionais, o vector director de r e o vector normal de π: $\alpha(P, \vec{u}_r, \vec{n}_\pi)$.

$P \in r$: dando valor 0 a x, nas ecuacións da recta r obtemos $y=2$ e $z=4$, logo $P(0,2,4) \in r \subset \alpha$

Outro ponto de r é: $x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=3$, logo $Q(1,0,3) \in r$, e asi o vector $\vec{u}_r = \vec{PQ} = (1,-2,-1)$ é un vector director de r, e polo tanto tamén do plano α.

Como segundo vector direcional de α tomamos o vector normal de π, formado polos coeficientes das trés variábeis na sua ecuación xeral: $\vec{n}_\pi = (1,1,-1)$.

Logo a ecuación do plano α é:

$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x+3(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x+3z=12$, que simplificada é $\alpha \equiv x+z=4$.

1 13. i.Estudar a posición relativa dos planos $\alpha \equiv -x+ky+z=2$ e $\beta \equiv kx-4y+2z=0$ dependendo do valor de k.

1 ii.Para $k=0$ obter a ecuación do plano que contén á recta interseción de α e β e ao ponto $A(3,0,-1)$.

i. $\alpha \equiv x-y+kz=2 \Leftrightarrow x-y+kz-2=0$, logo as matrices do sistema son $M=\begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ k & -4 & 2 \end{pmatrix}$ e $M^*=\begin{pmatrix} -1 & k & 1 & -2 \\ k & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k & 2 \end{vmatrix} = -2-k$; $-2-k=0 \Leftrightarrow k=-2$.

Logo se $k \neq -2$, $rang\ M = rang\ M^* = 2$ e o sistema é compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade, asi que os planos neste caso son secantes e determinan unha recta.

Se $k=-2$ a matriz ampliada é $M^*=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, polo que temos $rang\ M=1$ e $rang\ M^*=2$, asi que o sistema é incompatíbel e os planos son paralelos.

ii.Para $k=0$ o sistema é $\begin{cases} \alpha \equiv -x+z-2=0 \\ \beta \equiv -4y+2z=0 \end{cases}$, que son as ecuacións implícitas da recta interseción de ambos planos. Calquer outro plano que conteña a esta recta é combinación linear dos dous planos α e β (feixe de planos secantes); polo tanto, o plano pedido terá ecuación $\gamma \equiv \lambda \cdot (-x+z-2) + \mu \cdot (-4y+2z) = 0$.

Como $A(3,0,-1) \in \gamma$, substituíndo obtemos: $-6\lambda - 2\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -3\lambda$.

Escollendo por exemplo $\lambda=-1$ resulta, asi que $\mu=3$:

$$\gamma \equiv -1 \cdot (-x+z-2) + 3 \cdot (-4y+2z) = 0 \Leftrightarrow x-12y+5z+2=0$$

1 14. Calcular o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, onde A e B son os pontos interseción do plano $\alpha \equiv x+2y+3z=4$ cos eixos OX e OZ respectivamente.

Sexa $A(x,0,0) \in OX$ e $B(0,0,z) \in OZ$; substituíndo en $\alpha \equiv x+2y+3z=4$ resulta:

$$A \in \alpha \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow A(4,0,0) \text{ e } B \in \alpha \Leftrightarrow 3z=4 \Leftrightarrow z=\frac{4}{3} \Rightarrow B\left(0,0,\frac{4}{3}\right).$$

Polo tanto o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ será: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = (4,0,0) + \frac{1}{2} \cdot \left(-4,0,\frac{4}{3}\right) = (4,0,0) + \left(-2,0,\frac{2}{3}\right) = \left(2,0,\frac{2}{3}\right)$, logo o ponto pedido será $M\left(-2,1,\frac{2}{3}\right)$.