MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 08/04/2014

TEMA 4 DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

REC 3 MATRICES E SISTEMAS LINEARES

TOTAL	SUMA	NOTA
9/12		

NOME	GRUPO

REC ☐ CON RECUPERACIÓN ....EXS 1-7 (12 PTOS.)

☐ SEN RECUPERACIÓN ....EXS 2-7 (9 PTOS.)

1	

1. i. Dar a definición de independéncia linear dun conxunto e aportar un exemplo de conxunto linearmente dependente e outro de conxunto linearmente independente dentro do espazo vectorial das matrices $M_{1,3}(\mathbb{R})$.

1	

ii. Estudar o rango do conxunto $W=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}\subset M_{3,1}(\mathbb{R})$.

1	

iii. Suprimir de forma razoada un dos elementos de W de xeito que non varie o seu rango.

i. Nun espazo vectorial V, di-se que un subconxunto W é linearmente independente $:\Leftrightarrow$ a única combinación linear dos vectores de W que dá como resultado o vector nulo (elemento neutro da suma) é aquela que ten nulos todos os seus escalares.

O conxunto $W=\{(2\ \ -1\ \ 2),(0\ \ 3\ \ 1),(2\ \ 2\ \ 3)\}\subset M_{1,3}(\mathbb{R})$ é linearmente dependente xá que $(2\ \ 2\ \ 3)=(2\ \ -1\ \ 2)+(0\ \ 3\ \ 1)\Rightarrow(2\ \ -1\ \ 2)+(0\ \ 3\ \ 1)-(2\ \ 2\ \ 3)=(0\ \ 0\ \ 0)$, logo existe unha combinación linear non trivial dos elementos de W que dá o vector nulo.

O conxunto $W'=\{(1\ \ 0\ \ 0),(0\ \ 1\ \ 0),(0\ \ 0\ \ 1)\}\subset M_{1,3}(\mathbb{R})$ é linearmente independente xá que $\alpha\cdot(1\ \ 0\ \ 0)+\beta\cdot(0\ \ 1\ \ 0)+\gamma\cdot(0\ \ 0\ \ 1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$, logo a única combinación linear dos vectores de W' que dá o vector nulo é a trivial.

ii. Sexa $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1&-2\\2&0&-3&3\\-1&-1&4&-1\end{pmatrix}$ a matriz formada polas matrices coluna de W; asi $rang\ W=rang\ A$, e utilizando o método de Gauss temos:

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1&-2\\2&0&-3&3\\-1&-1&4&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}{\scriptstyle F_2+2F_1}\\{\scriptstyle F_3-F_1}\\ \\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&-1&-2\\0&2&-5&-1\\0&-2&5&1\end{pmatrix}\begin{matrix}{\scriptstyle F_3+F_2}\\ \\ \\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&-1&-2\\0&2&-5&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Logo $rang\ W=rang\ A=2$.

iii. Suprimindo o último dos elementos, por exemplo, obtemos o subconxunto $W'=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}\right\}\subset W$, que se corresponde coa matriz $A'=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&0&-3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$.

As transformacións elementares usadas para obter o rango de A permiten transformar a matriz A' en outra de xeito que $A'\sim\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$, logo $rang\ W'=rang\ A'=2$.

1	

2. i. Estudar a compatibilidade do seguinte sistema en función do valor de k, indicando en que casos é un sistema de Cramer: $\begin{cases} kx+y-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+z=k \end{cases}$.

1	

ii. Resolver o sistema anterior nos casos en que sexa posíbel, utilizando a regra de Cramer.

i. As matrices son $M=\begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M^*=\begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

$\det M=\begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2k+4$, logo $\det M=0 \Leftrightarrow k=-2$.

No caso xeral, $k\neq -2$, temos que $\operatorname{rang} M=\operatorname{rang} M^*=3$, logo é un sistema compatíbel determinado e ademais é un sistema de Cramer, por ser $\det M\neq 0$.

No caso $k=-2$ a matriz ampliada é $M^*=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$, logo $\{F_1,F_2\}$ e $\{C_1,C_2\}$ son conxuntos linearmente independentes e polo tanto $\operatorname{rang} M=2$ e $\operatorname{rang} M^*\geqslant 2$.

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=6\neq 0$, asi que $\operatorname{rang} M^*=3$, logo o sistema é incompatíbel.

ii. A solución no caso xeral $k\neq -2$ é:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3k}{2k+4}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} k & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-k^2-2k}{2k+4}=-\frac{k}{2}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{k^2-k}{2k+4}.$$

Logo a solución é $\left(\frac{3k}{2k+4}, -\frac{k}{2}, \frac{k^2-k}{2k+4}\right) \ \forall \ k\neq -2$.

1	

3. Dada a matriz $M=(C_1, C_2, C_3) \in M_3(\mathbb{R})$, tal que $det\ M=4$, obter o determinante da matriz $B=(-C_2, 2C_1-C_3, C_2+C_3)$ indicando as propriedades do cálculo de determinantes que se utilicen.

$det\ B=det\ (-C_2, 2C_1-C_3, C_2+C_3)=det\ (-C_2, 2C_1-C_3, C_2)+det\ (-C_2, 2C_1-C_3, C_3)$ [1], pola propridade da suma de filas ou colunas (neste caso referido ás colunas).

Ademais $det\ (-C_2, 2C_1-C_3, C_2)=0$ por ser a primeira e terceira colunas opostas. Logo da expresión [1] obtemos $det\ B=det\ (-C_2, 2C_1-C_3, C_3)$. Utilizando de novo a propriedade da suma de colunas obtemos $det\ B=det\ (-C_2, 2C_1, C_3)+det\ (-C_2, -C_3, C_3)$, onde resulta que $det\ (-C_2, -C_3, C_3)=0$ polo mesmo motivo anterior, asi que $det\ B=det\ (-C_2, 2C_1, C_3)$.

Extraendo factores das colunas primeira e segunda obtemos $det\ B=-2\cdot det\ (C_2, C_1, C_3)$ e, finalmente, permutando as duas primeiras colunas resulta:

$$det\ B=-2\cdot det\ (C_2, C_1, C_3)=2\cdot det\ (C_1, C_2, C_3)=2\cdot det\ M=2\cdot 4=8$$

Outra forma de obter $det\ B$ é utilizando o método de Gauss para o cálculo de determinantes:

$$det\ B=det\ (-C_2, 2C_1-C_3, C_2+C_3)\overset{[1]}{=}det\ (-C_2, 2C_1-C_3, C_3)\overset{[2]}{=}det\ (-C_2, 2C_1, C_3)\overset{[3]}{=}$$

$$\overset{[3]}{=}-det\ (2C_1, -C_2, C_3)\overset{[4]}{=}2\cdot det\ (C_1, C_2, C_3)=2\cdot det\ M=2\cdot 4=8$$

[1] Á terceira coluna suma-se-lle a primeira.
[2] Á segunda coluna suma-se-lle a terceira.
[3] Permutan-se as duas primeiras colunas.
[4] Extraen-se factores da primeira e segunda colunas.

1	

4. i.Calcular o rango da matriz $A=\begin{pmatrix} t & 0 & t \\ t+1 & t & 0 \\ 0 & t+1 & t+1 \end{pmatrix}$ segundo o valor do parámetro t.

1	

ii.Resolver a ecuación matricial $XA-2A=B$, onde A é a matriz do apartado anterior, con $t=1$, e $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *[Nota: obter a inversa por determinantes.]*

i. $\det A=\begin{vmatrix} t & 0 & t \\ t+1 & t & 0 \\ 0 & t+1 & t+1 \end{vmatrix} \overset{C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} t & -t & t \\ t+1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\cdot\left(t^2+t(t+1)\right)=(t+1)\cdot t\cdot(2t+1)$

$$\det A=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=0 \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Para $t=0$ temos $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, no caso $t=-1$ é $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e no caso $t=-\frac{1}{2}$ resulta $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; nos trés casos o rango de A é claramente 2.

$$\text{rang } A=3 \quad \forall t\neq 0,\ t\neq -1,\ t\neq -\frac{1}{2}$$

ii.Para $t=1$ a matriz é $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, matriz regular xá que $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=6$.

Logo temos: $XA-2A=B \Leftrightarrow XA=B+2A \Leftrightarrow X=(B+2A)\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}+2I_3$.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot Adj^t\ A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Polo tanto $X=B\cdot A^{-1}+2I_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 10 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 10 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 18 & 0 & -3 \\ 10 & 10 & 1 \\ -4 & -4 & 17 \end{pmatrix}$$

1	

5. i.Enunciado do Teorema de Rouché-Fröbenius.

1	

ii.Dado o sistema $\begin{cases}2x+z=5\\2y-z=2\end{cases}$, engadir, de xeito razoado, unha nova ecuación, de maneira que o sistema resultante sexa:

a.incompatíbel; b.compatíbel indeterminado (resolvé-lo neste caso); c.compatíbel determinado (resolvé-lo).

i.Sexa S un sistema linear e sexan M e M^* as matrices de coeficientes e ampliada do sistema; entón o sistema é compatíbel $\Leftrightarrow$ $rang\ M = rang\ M^*$. Ademais, neste caso, o sistema é determinado $\Leftrightarrow$ $rang\ M = n$ e será indeterminado $\Leftrightarrow$ $rang\ M < n$, onde n é o número de incógnitas de S. A diferenza entre o número de incógnitas e o rango de M chama-se grau de liberdade do sistema.

ii.O sistema $\begin{cases}2x+z=5\\2y-z=2\end{cases}$ ten $rang\ M = rang\ M^* = 2$, asi que é un sistema compatíbel indeterminado.

Para engadir unha ecuación de xeito que resulte incompatíbel deberá ser $rang\ M=2$ e $rang\ M^*=3$, logo temos que engadir unha ecuación que sexa combinación linear das duas primeiras, agás os termos independentes. Por exemplo, pode ser a ecuación resultante de sumar ambas e mudar o valor do termo independente. Asi, o sistema $\begin{cases}2x+z=5\\2y-z=2\\2x+2y=0\end{cases}$ ten $rang\ M=2$ e $rang\ M^*=3$ e é polo tanto incompatíbel.

Para engadir unha ecuación de xeito que resulte compatíbel indeterminado deberá ser $rang\ M=2$ e $rang\ M^*=2$, logo temos que engadir unha ecuación que sexa combinación linear das duas primeiras, incluídos os termos independentes. Por exemplo, pode ser a ecuación resultante de sumar ambas. Asi, o sistema $\begin{cases}2x+z=5\\2y-z=2\\2x+2y=7\end{cases}$ ten $rang\ M=2$ e $rang\ M^*=2$, inferiores ao número de incógnitas, e polo tanto é compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade.

Para resolvé-lo abonda con resolver o sistema inicial, xá que a terceira ecuación é combinación linear das duas primeiras. Traspoñendo previamente os termos en z ao segundo membro resulta $\begin{cases}2x=5-z\\2y=2+z\end{cases}$, e de forma trivial $x=\dfrac{5-z}{2}$ e $y=\dfrac{2+z}{2}$.

A solución é $\left(\dfrac{5-z}{2}, \dfrac{2+z}{2}, z\right)$ $z \in \mathbb{R}$.

Para engadir unha ecuación de xeito que resulte compatíbel determinado deberá ser $rang\ M=3$ e $rang\ M^*=3$, logo temos que engadir unha ecuación cuxo primeiro membro non sexa combinación linear das duas primeiras. Asi, o sistema $\begin{cases}2x+z=5\\2y-z=2\\x+y+z=0\end{cases}$ ten $rang\ M=3$ e $rang\ M^*=3$, igual ao número de incógnitas. É polo tanto un sistema compatíbel determinado e pode resolver-se polo método de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&0&1\\2&2&-1\\0&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{17}{4}\,,\; y=\frac{\begin{vmatrix}2&5&1\\0&2&-1\\1&0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{vmatrix}}=-\frac{3}{4}\;\text{e}\; z=\frac{\begin{vmatrix}2&0&5\\0&2&2\\1&1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&1&1\end{vmatrix}}=-\frac{14}{4}=-\frac{7}{2}\,.$$

A solución é polo tanto $\left(\frac{17}{4},-\frac{3}{4},-\frac{7}{2}\right)$.

1

6. Calcular o valor do determinante de orden n $\begin{vmatrix}1&-1&-1&\dots&-1\\2&0&-2&\dots&-2\\3&3&0&\dots&-3\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\n&n&n&\dots&0\end{vmatrix}$.

Utilizando o método de Gauss para o cálculo de determinantes, podemos transformar o determinante inicial en outro igual sumando a todas as colunas a primeira, do que resulta unha matriz triangular; finalmente o determinante será o produto dos elementos da diagonal principal:

$$\begin{vmatrix}1&-1&-1&\dots&-1\\2&0&-2&\dots&-2\\3&3&0&\dots&-3\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\n&n&n&\dots&0\end{vmatrix}\overset{\substack{C_2+C_1\\C_3+C_1\\\dots\\C_n+C_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\2&2&0&\dots&0\\3&6&3&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\n&2n&2n&\dots&n\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot n=n!$$

1

7. Razoar a seguinte afirmación:
Sexa S un sistema linear de 4 ecuacións e 3 incógnitas; se S ten algunha solución, entón algunha das ecuacions do sistema é combinación linear das outras.

Se S ten algunha solución é un sistema compatíbel, logo as matrices de coeficientes M e ampliada M^* teñen o mesmo rango.

Mas $rang\ M\leqslant 3$, xá que $M\in M_{4,3}(\mathbb{R})$ e polo tanto $rang\ M^*\leqslant 3$. Asi que, como a matriz ampliada ten rango inferior a 4, polo menos unha das catro ecuacións há de ser combinación linear das demais.