MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 12/03/2014

REC 1 CÁLCULO DIFERENCIAL

2 CÁLCULO INTEGRAL

TOTAL	SUMA	NOTA

NOME	GRUPO

REC
- □ 1 CÁLCULO DIFERENCIAL..........................EXS 1-6 (12 PTOS.)
- □ 2 CÁLCULO INTEGRAL..............................EXS 7-12 (11 PTOS.)
- □ TODO..EXS 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11 (8+7.5 PTOS.)

1 | 1. i. Estudar a continuidade da función $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ indicando os tipos de discontinuidade que presenta, se é o caso.

1 | ii. Estudar se é posíbel estender a continuidade de f a toda a recta real.

i. Ao ser un cociente de dous polinómios, pode presentar discontinuidades no caso de que se anule o denominador: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Para $x=1$ temos unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que se resolve simplificando a fración alxébrica: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$

Para $x=-1$ temos: $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{-2}{0}=\infty$

Logo a función presenta unha discontinuidade evitábel en $x=1$ e outra discontinuidade de salto infinito en $x=-1$.

ii. Á vista do anterior, a función pode estender-se con continuidade no caso $x=1$, definindo $f(1):=\frac{3}{2}$, e non se pode estender para $x=-1$.

A función estendida é $\hat{f}(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$, con domínio $Dom\,\hat{f}=\mathbb{R}-\{-1\}$.

1 | 2. i. Estudar a derivabilidade de $f(x)=x^2-3x$ en $x=2$ utilizando a definición de derivada.

1 | ii. Obter a ecuación da recta tanxente á curva $f(x)$ en $x=2$.

i. $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-3(2+h)-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-6-3h+2}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}1+h=1$

ii. A pendente da tanxente á curva en $x=2$ é $f'(2)=1$. Ademais $f(2)=-2$, logo a ecuación da recta tanxente será:

$y-(-2)=1\cdot(x-2) \Leftrightarrow y+2=x-2 \Leftrightarrow y=x-4$

2	

3. Calcular os límites:

i. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{sen^2 x}$

i.É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, e multiplicando polo conxugado resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})\cdot(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{1-(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{-x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}-(1+\sqrt{x+1})=-2$$

ii.É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, e utilizando a Regra de L'Hôpital obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{sen^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\cdot sen\, x}{2sen\, x\cos x}=\frac{1}{0}=\infty$$

1	
1	

4. i.Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial.
ii.Calcular o ponto ao que se refire este teorema para a función $f(x)=x^3-4x$ no intervalo $[-4,3]$.

i.Dada unha función f contínua en $[a,b]$ e derivábel en (a,b), $\exists\ c\in(a,b)\ /\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Este teorema asegura que toda función derivábel nun intervalo contén algún ponto no que a tanxente á gráfica é paralela á recta secante que une os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$, é dicer, que a taxa de variación média coincide en algún ponto coa taxa de variación instantánea.

ii.A taxa de variación média no intervalo $[-4,3]$ é: $\frac{f(3)-f(-4)}{3-(-4)}=\frac{15-(-48)}{7}=\frac{63}{7}=9$.

Logo polo teorema há de existir $c\in(-4,3)\ /\ f'(c)=9$.

$$f'(x)=3x^2-4=9\ \Leftrightarrow\ 3x^2=13\ \Leftrightarrow\ x^2=\frac{13}{3}\ \Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

Admitimos ambas solucións xá que $\pm\sqrt{\frac{13}{3}}\in(-4,3)$; logo $c_1=\sqrt{\frac{13}{3}}$ e $c_2=-\sqrt{\frac{13}{3}}$.

2	

5. Facer o estudo e a representación gráfica da función $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, indicando de forma explícita, como mínimo, os seguintes elementos:
   i. pontos de corte cos eixos
   ii. asíntotas
   iii. extremos relativos
   iv. pontos de inflexión

$Dom\ f=\mathbb{R}-\{0\}$

Corte OX : $\forall\ x\in Dom\ f\ \ f(x)\neq 0$, logo non presenta cortes co eixo OX .

Corte OY : $0\notin Dom\ f$, logo tampouco presenta corte co eixo OY .

A función é contínua e derivábel en todo o seu domínio.

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$; os límites laterais son: $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=-\infty$ e $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$, asi que presenta unha asíntota vertical en $x=0$.

Ademais, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x}=-\infty$, polo que non presenta asíntotas horizontais.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$ e $\lim_{x\to\infty}f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, logo a recta $y=x$ é unha asíntota oblícua en $\pm\infty$.

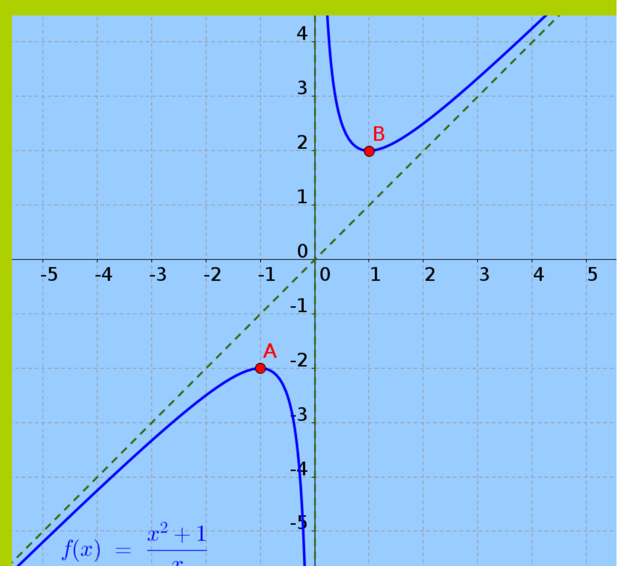
$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, logo temos dous posíbeis extremos relativos en $x=-1$ e $x=1$.

$f''(x)=\frac{2}{x^3}\neq 0\ \ \forall\ x\in Dom\ f$, asi que non existen pontos de inflexión.

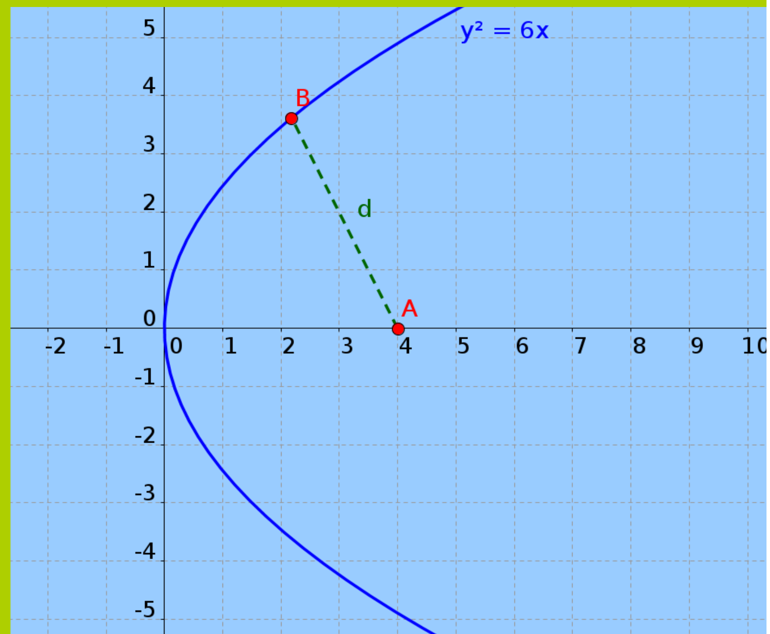
$f''(-1)=-2<0$ e $f''(1)=2>0$; polo tanto temos un máximo relativo en $x=-1$ e un mínimo relativo en $x=1$.

Os extremos están en $A(-1,-2)$ (máximo) e $B(1,2)$ (mínimo).



2 | 6. Obter os pontos da gráfica da función $y^2=6x$ mais próximos ao ponto $A(4,0)$.

Os pontos da gráfica, expresados en función de y, son da forma $B\left(\frac{y^2}{6},y\right)$ e a distáncia ao ponto A é $d(A,B)=\sqrt{\left(\frac{y^2}{6}-4\right)^2+y^2}$.



Logo a función a minimizar é $d(y)=\sqrt{\left(\frac{y^2}{6}-4\right)^2+y^2}=\sqrt{\frac{y^4}{36}-\frac{4y^2}{3}+16+y^2}=\frac{1}{6}\sqrt{y^4-12y^2+576}$.

$$d'(y)=\frac{4y^3-24y}{12\sqrt{y^4-12y^2+576}}=\frac{y^3-6y}{3\sqrt{y^4-12y^2+576}}$$

Igualando a 0 resulta: $d'(y)=0 \Leftrightarrow y^3-6y=0 \Leftrightarrow y\cdot(y^2-6)=0$, asi que as posíbeis solucións son $y=0$ e $y=\pm\sqrt{6}$.

Calculando a derivada segunda obtemos:

$$d''(y)=\frac{(3y^2-6)\cdot 3\sqrt{y^4-12y^2+576}-(y^3-6y)\cdot\frac{6y^3-36y}{\sqrt{y^4-12y^2+576}}}{9(y^4-12y^2+576)}=$$

$$=\frac{(3y^2-6)\cdot 3(y^4-12y^2+576)-(y^3-6y)\cdot(6y^3-36y)}{9(y^4-12y^2+576)\sqrt{y^4-12y^2+576}}=\frac{y^6-18y^4+1728y^2-3456}{3(y^4-12y^2+576)^{\frac{3}{2}}}$$

O signo desta segunda derivada depende exclusivamente do numerador, polo tanto, $d''(0)<0$ e $d''(\pm\sqrt{6})>0$; logo temos dous mínimos relativos en $y=\sqrt{6}$ e $y=-\sqrt{6}$.

Como $y^2=6x \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{6}$, para $y=\sqrt{6}$, $x=1$ e para $y=-\sqrt{6}$, $x=1$; logo os pontos de mínima distáncia ao ponto $A(4,0)$ son $B_1(1,\sqrt{6})$ e $B_2(1,-\sqrt{6})$.

2	

7. Definir os seguintes conceitos e aportar algun exemplo de cada un deles:
   i. primitiva dunha función
   ii. integral indefinida
   iii. integral definida dunha función nun intervalo
   iv. función integral

i. Chama-se primitiva dunha función $f(x)$ a outra función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Domf$.

Exemplo

A función $F(x)=x^3+4$ é unha primitiva de $f(x)=3x^2$ porque $F'(x)=3x^2$ en todo o domínio de $f(x)$, que neste caso é $\mathbb{R}$.

ii. Chama-se integral indefinida dunha función $f(x)$, e representa-se pola expresión $\int f(x)dx$, ao conxunto formado por todas as primitivas de $f(x)$:

$\int f(x)dx=\{F(x)\ /\ F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in Domf\}$, que tamén se expresa da forma $\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$, onde $F(x)$ é unha primitiva calquer de $f(x)$.

Exemplo

A integral indefinida da función $f(x)=3x^2$ representa-se da forma $\int 3x^2dx$ e é o conxunto $\{F(x)=x^3+4+C\ /\ C\in\mathbb{R}\}$, ou de xeito reducido, o conxunto das funcións tais que $F(x)=x^3+4+C$, $C\in\mathbb{R}$.

iii. Chama-se integral definida dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $\int_a^b f(x)dx$, á area da rexión determinada pola curva $f(x)$ e o eixo OX no intervalo $[a,b]$. Esta área considera-se positiva se a función é positiva no intervalo $[a,b]$ e negativa se a función é negativa nese intervalo. No caso de que a función tome valores de signo positivo e negativo, a integral definida é a diferenza entre a suma das rexións positivas e as negativas.

Exemplo

A integral definida da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é:
$\int_2^5 3x^2dx=[x^3]_2^5=5^3-2^3=125-8=117\,u^2$.

Nota: Para obter esta área utiliza-se a Regra de Barrow.

iv. Chama-se función integral dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, á función que a cada $x\in[a,b]$ asócia-lle a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a,x]$.

Exemplo

A función integral da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é a función $F(x)=\int_2^x 3t^2dt=[t^3]_2^x=x^3-2^3=x^3-8$.

Nota: Para obter esta función utiliza-se tamén a Regra de Barrow

1		8. i.Obter unha primitiva $F(x)$ da funcion $f(x)=-\frac{2}{x^3}$ tal que $F(1)=1$.
1		ii.Calcular a área delimitada pola curva $F(x)$ no intervalo $[1,+\infty)$.

i. $\int -\frac{2}{x^3}\,dx=\frac{1}{x^2}+C$, logo as primitvas de f son da forma $F(x)=\frac{1}{x^2}+C$.

$F(1)=1 \Leftrightarrow 1+C=1 \Leftrightarrow C=0$, polo que a primitiva pedida é $F(x)=\frac{1}{x^2}$.

ii.Como $F(x)=\frac{1}{x^2}>0 \quad \forall \quad x\in[1,+\infty)$ a área é a integral:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty}=\lim_{\lambda\to+\infty}-\frac{1}{\lambda}-(-1)=1$$

2		9. Calcular as integrais indefinidas:

i. $\int\frac{5\,dx}{x^2-3x+2}$ ii. $\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx$

i. $\int\frac{5\,dx}{x^2-3x+2}$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2) \Rightarrow \frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Logo $A(x-2)+B(x-1)\equiv 5 \Leftrightarrow (A+B)x+(-2A-B)\equiv 5 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=5 \end{cases} \Leftrightarrow A=-5,\ B=5$, e polo tanto:

$$\int\frac{5\,dx}{x^2-3x+2}=\int\left(-\frac{5}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx=-5\int\frac{dx}{x-1}+5\int\frac{dx}{x-2}=-5\ln|x-1|+5\ln|x-2|+C=$$

$$=5\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$$

ii. $\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx=\frac{1}{6}\int 6x\sqrt{1+3x^2}\,dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}(1+3x^2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1+3x^2}{9}\cdot\sqrt{1+3x^2}+C$

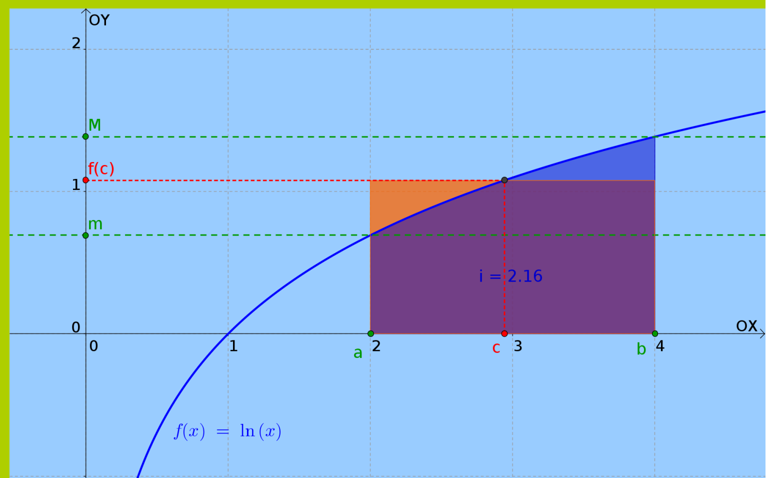
1	
1	

10. i.Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema do Valor Médio do Calculo Integral.
ii.Calcular o valor ao que se refire o teorema para a función $y=x^2+1$ no intervalo $[-2,3]$.

i.Sexa f unha función contínua en $[a,b]$, entón $\exists\, c\in[a,b]\ /\ \int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\cdot f(c)$.

Interpretación xeométrica

A integral definida no intervalo fechado $[a,b]$ é a área delimitada pola curva nese intervalo. É posíbel determinar un rectángulo que teña como base o mesmo intervalo $[a,b]$ e área igual ao valor da integral definida. É evidente que tal rectángulo deberá ter unha altura comprendida entre os valores mínimo e máximo que alcanza a función nese intervalo.



ii. $\int_{-2}^{3}(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{3}=12-\left(-\frac{8}{3}-2\right)=\frac{50}{3}$; logo $\exists\, c\in[-2,3]\ /\ \frac{50}{3}=5\cdot f(c)$

Resolvendo obtemos: $5\cdot f(c)=\frac{50}{3} \Leftrightarrow f(c)=\frac{10}{3} \Leftrightarrow c^2+1=\frac{10}{3} \Leftrightarrow c^2=7 \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

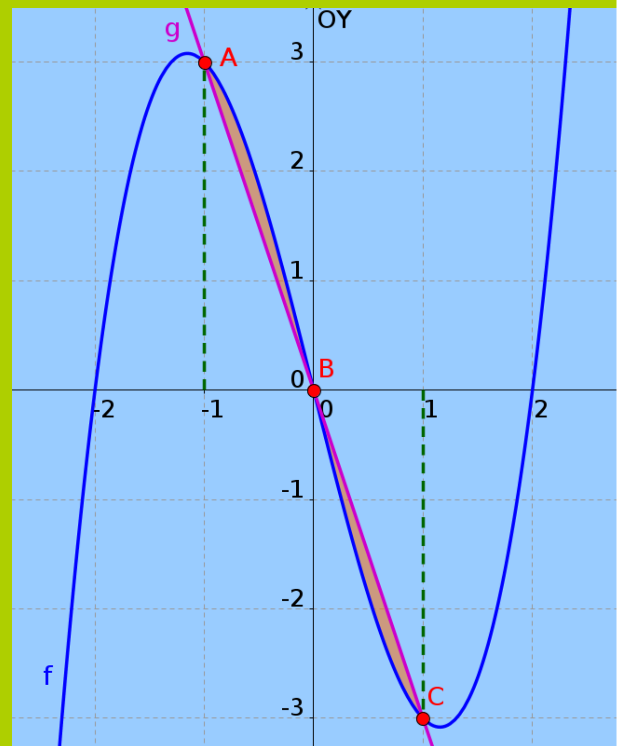
Ambas solucións son admisíbeis por pertenceren ao intervalo $[-2,3]$.

1.5	

11. Calcular a área da rexión delimitada polas gráficas das funcións $f(x)=x^3-4x$ e $g(x)=-3x$.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-4x=-3x \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

Logo os intervalos de integración serán $[-1,0]$ e $[0,1]$.



$$f\left(-\frac{1}{2}\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}>0 \Rightarrow f(x)>g(x) \quad \forall \quad x\in(-1,0)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}<0 \Rightarrow f(x)<g(x) \quad \forall \quad x\in(0,1)$$

Polo tanto a área é:

$$A=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,u^2$$

1.5

12. Calcular o valor de $m>0$ tal que a área da rexión delimitada polas curvas $y=x^2$ e $y=mx$ sexa de $9\ u^2$.

$$x^2=mx \Leftrightarrow x^2-mx=0 \Leftrightarrow x(x-m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=m>0 \end{cases}$$

Logo o intervalo de integración será $[0,m]$.

Tomando o valor $x=\frac{m}{2}\in(0,m)$ temos: $\left(\frac{m}{2}\right)^2<m\cdot\frac{m}{2} \Rightarrow x^2<mx \quad \forall \quad x\in(0,m)$.

Polo tanto a área é $A=\int_0^m (mx-x^2)dx=\left[\frac{mx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^m=\frac{m^3}{2}-\frac{m^3}{3}=\frac{m^3}{6}$, e resulta:

$$A=9 \Leftrightarrow \frac{m^3}{6}=9 \Leftrightarrow m^3=54 \Leftrightarrow m=\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{2}$$