MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 06/03/2014

TEMA 3 MATRICES E SISTEMAS LINEARES

TOTAL	SUMA	NOTA
12		

NOME	GRUPO

2 | 1. Definir, no marco dun espazo vectorial V, os conceitos de *combinación linear* dun conxunto, *independéncia linear* dun conxunto, *dependéncia linear* dun conxunto e *rango* dun conxunto, e aportar exemplos de cada un deles.

[Nota: non se pontuará nada no caso de que non se poñan os exemplos pedidos.]

Sexa V un espazo vectorial calquer, e $W=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\subset V$ un subconxunto de elementos (vectores) de V.

Di-se que un vector v é combinación linear dos elementos do conxunto W $\Leftrightarrow: \exists\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}\ /\ v=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\ldots+\alpha_n\cdot v_n$, é dicer, se é posíbel obter o vector v a partir dos vectores do conxunto W utilizando as operacións próprias do espazo vectorial V.

Di-se que o conxunto W é linearmente independente $\Leftrightarrow: \forall\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\ldots+\alpha_n\cdot v_n=O\ \Rightarrow\ \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, onde O representa o elemento neutro da suma no espazo vectorial V, é dicer, se a única combinación linear dos vectores de W igual ao vector nulo é a trivial.

Di-se que o conxunto W é linearmente dependente $\Leftrightarrow: \exists\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}\ ,\ \exists\ i\in\{1,2,\ldots,n\}\ /\ \alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\ldots+\alpha_n\cdot v_n=O\ ,\ \alpha_i\neq 0$, onde O representa o elemento neutro da suma no espazo vectorial V, é dicer, se existe algunha combinación linear non trivial dos vectores de W igual ao vector nulo.

Chama-se rango do conxunto W ao cardinal do maior subconxunto de W que é linearmente independente, é dicer, ao maior número de elementos do conxunto W que forman un subconxunto linearmente independente.

$\Leftrightarrow: \exists\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}\ ,\ \exists\ i\in\{1,2,\ldots,n\}\ /\ \alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\ldots+\alpha_n\cdot v_n=O\ ,\ \alpha_i\neq 0$, onde O representa o elemento neutro da suma no espazo vectorial V, é dicer, se existe algunha combinación linear non trivial dos vectores de W igual ao vector nulo.

<u>*Exemplos*</u>

En $\mathbb{R}^3$, o vector $(1,2,3)$ é combinación linear dos vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, xá que $(1,2,3)=1\cdot(1,0,0)+2\cdot(0,1,0)+3\cdot(0,0,1)$.

O conxunto $W=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ é linearmente independente, xá que a única combinación linear dos seus elementos igual ao vector nulo é a trivial: $\alpha\cdot(1,0,0)+\beta\cdot(0,1,0)+\gamma\cdot(0,0,1)=(0,0,0)\ \Rightarrow\ \alpha=\beta=\gamma=0$.

O conxunto $W'=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente, xá que existen combinacións lineares non triviais dos elementos de W' iguais ao vector nulo: $1\cdot(1,0,0)-1\cdot(0,1,0)+1\cdot(0,0,1)=(0,0,0)$.

O conxunto $W'=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$ ten rango 2, xá que é un conxunto linearmente dependente e contén un subconxunto $\{(1,1,0),(0,1,1)\}\subset W'$ que é linearmente independente, logo $rang\ W'=2$.

2. Dado o conxunto $T=\{(2\ \ -3\ \ 1),(0\ \ -2\ \ 1),(-2\ \ -1\ \ 1),(1\ \ 0\ \ 1)\}\ \subset\ M_{1,3}(\mathbb{R})$:

1	
0.5	

i. estudar a dependéncia linear e o rango de T;

ii. suprimir de maneira razoada un elemento do conxunto T de xeito que o seu rango non varie;

0.5	

iii. suprimir de maneira razoada un elemento do conxunto T de xeito que o seu rango diminua unha unidade.

i.
Para estudar o rango de T podemos formar unha matriz A que teña por filas os elementos de T, de xeito que $rang\ T=rang\ A$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\begin{smallmatrix} F_3+F_1 \\ 2F_4-F_1 \end{smallmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{\begin{smallmatrix} F_3-2F_2 \\ 2F_4+3F_2 \end{smallmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{F_3\leftrightarrow F_4} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $rang\ T=rang\ A=3$, asi que o conxunto T é linearmente dependente.

ii.
Polas transformacións elementares realizadas na matriz resultou anulada a fila que inicialmente ocupaba a terceira posición, logo o terceiro elemento é combinación linear dos outros trés elemento de T, asi que suprimindo a matriz $(-2\ \ -1\ \ 1)$ obtemos un conxunto de igual rango que o próprio T:

$$T'=\{(2\ \ -3\ \ 1),(0\ \ -2\ \ 1),(1\ \ 0\ \ 1)\}\ \subset\ T\ ,\ rang\ T'=rang\ T=3\ .$$

iii.
A matriz $(-2\ \ -1\ \ 1)$ é combinación linear das duas primeiras:

$$(-2\ \ -1\ \ 1)=-(2\ \ -3\ \ 1)+2\cdot(0\ \ -2\ \ 1)$$

Logo as trés primeiras matrices forman un conxunto de rango 2, asi que suprimindo en T o último dos seus elementos obtemos un subconxunto de rango unha unidade inferior ao rango de T:

$$T'=\{(2\ \ -3\ \ 1),(0\ \ -2\ \ 1),(1\ \ 0\ \ 1)\}\ \subset\ T\ ,\ rang\ T''=2\ .$$

1	

3. i. Estudar o rango da matriz $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1	

ii. Estudar a compatibilidade e resolver, no caso de que sexa posíbel, o sistema homoxéneo que ten por matriz de coeficientes a matriz M.

i.

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} F_3-3F_1 \\ F_4+F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} F_3-F_2 \\ F_4-F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $rang\ M=2$.

ii.
O sistema homoxéneo que ten M como matriz de coeficientes pode resolver-se utilizando o método de Gauss (restrinxido ás filas), co que obtemos a matriz ampliada $M^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Identificando como x, y, z e t as incógnitas, as duas últimas resultan ecuacións dexeneradas (tipo $0=0$) e polo tanto a solución será:

F_2: $-2y+t=0 \Leftrightarrow t=2y$, onde y se convirte en variábel libre.

F_1: $2x+y-z+t=0 \Leftrightarrow z=2x+y+t=2x+y+2y=2x+3y$, co que x tamén adquire a cualidade de libre.

Logo a solución é $(x, y, 2x+3y, 2y)$ $x, y \in \mathbb{R}$, co que resulta un sistema compatíbel (por ser homoxéneo) e ademais indeterminado (solución múltiple).

2	

4. Estudar a compatibilidade do sistema $S \equiv \begin{cases} -2x+3y-4z=1 \\ 3x-2y+3z=-3 \\ x-4y-5z=0 \end{cases}$ e resolvé-lo, no caso de que sexa posíbel.

A matriz ampliada do sistema é $M^*=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolvendo por Gauss obtemos:

$$M^*=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}^{\substack{2F_2+3F_1 \\ 2F_3+F_1}} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -14 & 1 \end{pmatrix}^{F_3+F_2} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -20 & -2 \end{pmatrix}$$

Logo interpretando as filas:

$$F_3:\ -20z=-2 \iff z=\frac{1}{10}$$

$$F_2:\ 5y-6z=-3 \iff y=\frac{6z-3}{5}=\frac{6\cdot\frac{1}{10}-3}{5}=\frac{6-30}{50}=-\frac{24}{50}=-\frac{12}{25}$$

$$F_1:\ -2x+3y-4z=1 \iff x=\frac{3y-4z-1}{2}=\frac{-3\cdot\frac{12}{25}-4\cdot\frac{1}{10}-1}{2}=\frac{-36-10-25}{50}=-\frac{71}{50}$$

Finalmente, resulta un sistema compatíbel determinado e a sua solución é $\left(-\frac{71}{50}, -\frac{12}{25}, \frac{1}{10}\right)$.

2	

5. Resolver a ecuación matricial $XA+A^t=2X$, para $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$XA+A^t=2X \;\Leftrightarrow\; XA-2X=-A^t \;\Leftrightarrow\; XA-X\cdot 2I_3=-A^t \;\Leftrightarrow\; X\cdot(A-2I_3)=-A^t \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; X=-A^t\cdot(A-2I_3)^{-1}$$

A matriz $A-2I_3$ é:

$A-2I_3=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; e polo tanto a sua inversa é:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{F_3+F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)^{F_1+F_2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)^{\substack{-\frac{1}{3}\cdot F_1 \\ -1\cdot F_2 \\ -\frac{1}{3}\cdot F_3}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Polo tanto $(A-2I_3)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalmente:

$$X=-A^t\cdot(A-2I_3)^{-1}=-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2	

6. Sexa B unha matriz cuadrada de orden k tal que $B^2=2B$ e sexa $A=\frac{1}{2}B+I_k$, onde I_k é a matriz unitária de orden k. Obter de xeito razoado a matriz A^n, para calquer $n \in \mathbb{N}$.

Calculando as primeiras poténcias de A resulta:

$$A^2=\left(\frac{1}{2}B+I_k\right)^2=\left(\frac{1}{2}B+I_k\right)\cdot\left(\frac{1}{2}B+I_k\right)=\frac{1}{4}B^2+\frac{1}{2}B\cdot I_k+I_k\cdot\frac{1}{2}B+I_k=\frac{1}{4}B^2+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}B+I_k=\frac{1}{4}B^2+B+I_k$$

E como $B^2=2B$, resulta: $A^2=\frac{1}{4}B^2+B+I_k=\frac{1}{4}\cdot 2B+B+I_k=\frac{3}{2}\cdot B+I_k$

De igual xeito:

$$A^3=A^2\cdot A=\left(\frac{3}{2}B+I_k\right)\cdot\left(\frac{1}{2}B+I_k\right)=\frac{3}{4}B^2+\frac{3}{2}B+\frac{1}{2}B+I_k=\frac{3}{4}B^2+2B+I_k=\frac{3}{2}B+2B+I_k=\frac{7}{2}B+I_k$$

$$A^4=A^3\cdot A=\left(\frac{7}{2}B+I_k\right)\cdot\left(\frac{1}{2}B+I_k\right)=\frac{7}{4}B^2+\frac{7}{2}B+\frac{1}{2}B+I_k=\frac{7}{4}B^2+4B+I_k=\frac{7}{2}B+4B+I_k=\frac{15}{2}B+I_k$$

Como os numeradores dos coeficientes de B son sempre unha unidade inferiores ás poténcias de 2, pode-se formular a hipótese de indución: $A^n=\frac{2^n-1}{2}B+I_k$.

Supoñendo certa esta hipótese imos calcular a poténcia $n+1$ de A:

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\left(\frac{2^n-1}{2}B+I_k\right)\cdot\left(\frac{1}{2}B+I_k\right)=\frac{2^n-1}{4}B^2+\frac{2^n-1}{2}B+\frac{1}{2}B+I_k=\frac{2^n-1}{4}B^2+\frac{2^n}{2}B+I_k=$$

$$=\frac{2^n-1}{2}B+\frac{2^n}{2}B+I_k=\frac{2^n-1+2^n}{2}B+I_k=\frac{2\cdot 2^n-1}{2}B+I_k=\frac{2^{n+1}-1}{2}B+I_k.$$

Polo tanto $A^{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{2}B+I_k$, co que se demostra a hipótese de indución; asi que as poténcias de A son da forma $A^n=\frac{2^n-1}{2}B+I_k \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}$.