TOTAL	SUMA	NOTA
11		

MATEMÁTICA II / 2º BACHARELATO 23/01/2014

TEMA 2 CÁLCULO INTEGRAL

NOME	GRUPO

1 | 1. i. Definir os conceitos de primitiva e de integral indefinida dunha función, aportando algún exemplo de cada un deles.

1 | ii. Obter unha primitiva $F(x)$ da función $f(x)=\frac{1}{x}-sen\,\pi x$ tal que $F(1)=-3$.

i. Chama-se primitiva dunha función $f(x)$ a outra función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in Dom f$.

Exemplo

A función $F(x)=x^3+4$ é unha primitiva de $f(x)=3x^2$ porque $F'(x)=3x^2$ en todo o domínio de $f(x)$, que neste caso é $\mathbb{R}$.

Chama-se integral indefinida dunha función $f(x)$, e representa-se pola expresión $\int f(x)dx$, ao conxunto formado por todas as primitivas de $f(x)$:

$\int f(x)dx=\{F(x)\ /\ F'(x)=f(x)\ \forall\ x \in Dom f\}$, que tamén se expresa da forma $\int f(x)dx=F(x)+C,\ C \in \mathbb{R}$, onde $F(x)$ é unha primitiva calquer de $f(x)$.

Exemplo

A integral indefinida da función $f(x)=3x^2$ representa-se da forma $\int 3x^2\,dx$ e é o conxunto $\{F(x)=x^3+4+C\ /\ C \in \mathbb{R}\}$, ou de xeito reducido, o conxunto das funcións tais que $F(x)=x^3+4+C$, $C \in \mathbb{R}$.

ii. As primitivas de $f(x)$ son da forma $F(x)=\int\left(\frac{1}{x}-sen\,\pi x\right)dx=ln|x|+\frac{1}{\pi}cos\,\pi x+C$.

Como $F(1)=-3$ temos: $F(1)=ln\,1+\frac{1}{\pi}cos\,\pi+C=-\frac{1}{\pi}+C=-3 \Leftrightarrow C=\frac{1}{\pi}-3$.

A primitiva pedida é $F(x)=ln|x|+\frac{1}{\pi}cos\,\pi x+\frac{1}{\pi}-3$.

2	

2. Calcular as integrais indefinidas:
   i. $\int x^2 e^x dx$ ii. $\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx$

i.Integrando por partes, fai-se $u=x^2$ e $dv=e^x dx$, de onde resulta $du=2x\,dx$ e $v=\int e^x dx=e^x$; e substituíndo temos:

$$\int x^2 e^x dx=x^2 e^x-\int 2x\,e^x dx=x^2 e^x-2\int x\,e^x dx \quad [1]$$

Repetindo o proceso para $\int x\,e^x dx$ resulta:

$u=x$ e $dv=e^x dx$, de onde $du=dx$ e $v=\int e^x dx=e^x$; e substituíndo de novo obtemos:

$$\int x\,e^x dx=x\,e^x-\int e^x dx=x\,e^x-e^x$$

Incorporando esta integral en [1] obtemos finalmente:

$$\int x^2 e^x dx=x^2 e^x-2\int x\,e^x dx=x^2 e^x-2\left[x\,e^x-e^x\right]+C=\left(x^2-2x+2\right)\cdot e^x+C$$

ii.Ao termos maior grau no numerador, fará-se en primeiro lugar a división, de onde obtemos cociente $x+1$ e resto $x+3$, polo tanto $\frac{x^3+3}{x^2-x}=x+1+\frac{x+3}{x^2-x}=x+1+\frac{x+3}{(x-1)\cdot x}$.

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx=\int (x+1)\,dx+\int \frac{x+3}{(x-1)\cdot x} dx \quad [1]$$

$$\frac{x+3}{(x-1)\cdot x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}=\frac{Ax+B(x-1)}{(x-1)\cdot x}\Leftrightarrow x+3=Ax+B(x-1)$$

Obtemos os valores de A e B:

$x=0 \;\Rightarrow\; 3=-B \;\Rightarrow\; B=-3$ e $x=1 \;\Rightarrow\; A=4$.

Asi que:

$$\int \frac{x+3}{(x-1)\cdot x} dx=\int \frac{4}{x-1} dx-\int \frac{3}{x} dx=4\cdot \ln|x-1|-3\cdot \ln|x|=\ln\left|\frac{(x-1)^4}{x^3}\right|$$

Logo a integral será: $\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx=\int (x+1)\,dx+\int \frac{x+3}{(x-1)\cdot x} dx=\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|\frac{(x-1)^4}{x^3}\right|+C$

1		3. i.Definición do conceito de integral definida e de función integral nun intervalo $[a,b]$, aportando algun exemplo de cada un deles.
1		ii.Obter de forma razonada $G(0)$ e $G'(0)$, onde $G(x)=\int_x^0 t\cdot e^t\,dt$.

i.Chama-se integral definida dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $\int_a^b f(x)dx$, á area da rexión determinada pola curva $f(x)$ e o eixo OX no intervalo $[a,b]$. Esta área considera-se positiva se a función é positiva no intervalo $[a,b]$ e negativa se a función é negativa nese intervalo. No caso de que a función tome valores de signo positivo e negativo, a integral definida é a diferenza entre a suma das rexións positivas e as negativas.

Exemplo

A integral definida da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é: $\int_2^5 3x^2\,dx=[x^3]_2^5=5^3-2^3=125-8=117\,u^2$.

Nota: Para obter esta área utiliza-se a Regra de Barrow.

Chama-se función integral dunha función $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e representa-se pola expresión $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, á función que a cada $x\in[a,b]$ asócia-lle a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a,x]$.

Exemplo

A función integral da función $f(x)=3x^2$ no intervalo $[2,5]$ é a función $F(x)=\int_2^x 3t^2\,dt=[t^3]_2^x=x^3-2^3=x^3-8$.

Nota: Para obter esta función utiliza-se tamén a Regra de Barrow.

ii.Polas propriedades da integral definida, a función $G(x)$ pode-se expresar da forma $G(x)=\int_x^0 t\cdot e^t\,dt=-\int_0^x t\cdot e^t dt=\int_0^x -t\cdot e^t\,dt$.

Logo $G(x)$ é a función integral de $f(x)=-x\cdot e^x$, e polo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)=-x\cdot e^x$.

Isto implica que a derivada de $G(x)$ é $G'(x)=f(x)=-x\cdot e^x$.

Asi que $G(0)=\int_0^0 t\cdot e^t dt=0$, por coincidiren os extremos de integración, e $G'(0)=f(0)=0$.

2	

4. Calcular a área do recinto plano delimitado polas gráficas das funcións $f(x)=4-x$ e $g(x)=4x^2-x^3$.

Igualando as duas expresións obteñen-se os pontos de corte de ambas gráficas:

$$4x^2-x^3=4-x \iff x^3-4x^2-x+4=0 \iff (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0 \iff \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

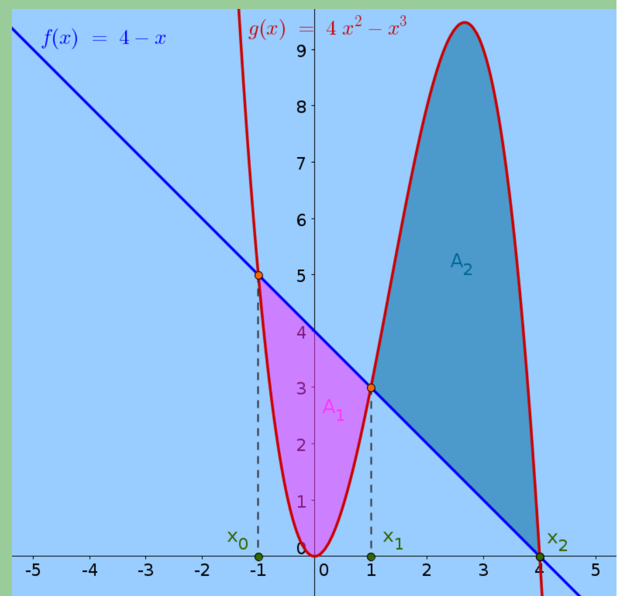
Asi que haberá que integrar nos intervalos $[-1,1]$ e $[1,4]$.

No intervalo $[-1,1]$: $0\in(-1,1)$, $f(0)=4$ e $g(0)=0$, logo pola continuidade das funcións:

$$f(0)>g(0) \Rightarrow f(x)>g(x) \quad \forall\ x\in[-1,1]$$

E no intervalo $[1,4]$: $2\in(1,4)$, $f(2)=2$ e $g(2)=8$, asi que:

$$f(2)<g(2) \Rightarrow f(x)<g(x) \quad \forall\ x\in[1,4]$$



Polo tanto calcularemos no intervalo $[-1,1]$ $A_1=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))\,dx$ e no intervalo $[1,4]$ $A_2=\int_{1}^{4}(g(x)-f(x))\,dx$.

A área será entón: $A=A_1+A_2=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]\,dx+\int_{1}^{4}[g(x)-f(x)]\,dx=$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-4x^2-x+4)\,dx+\int_{1}^{4}(-x^3+4x^2+x-4)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4x\right]_{1}^{4}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(\left[3x^4-16x^3-6x^2+48x\right]_{-1}^{1}+\left[-3x^4+16x^3+6x^2-48x\right]_{1}^{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\left[(3-16-6+48)-(3+16-6-48)+(-768+1.024+96-192)-(-3+16+6-48)\right]=$$

$$=\frac{1}{12}\left[29-(-35)+160-(-29)\right]=\frac{1}{12}(29+35+160+29)=\frac{253}{12}\ u^2$$

2	

5. Calcular o valor de $k>1$ tal que a área do recinto delimitado pola gráfica da función $f(x)=k-\frac{4}{(x-2)^2}$ cos semieixos positivos OX e OY sexa de 2 unidades.

Nota: para delimitar correctamente o recinto é necesário facer o estudo do domínio, cortes cos eixos e asíntotas, e facer un bosquexo da gráfica con eses elementos.

A función ten domínio $Dom f=\mathbb{R}-\{2\}$ e os pontos de corte co eixo OX son:

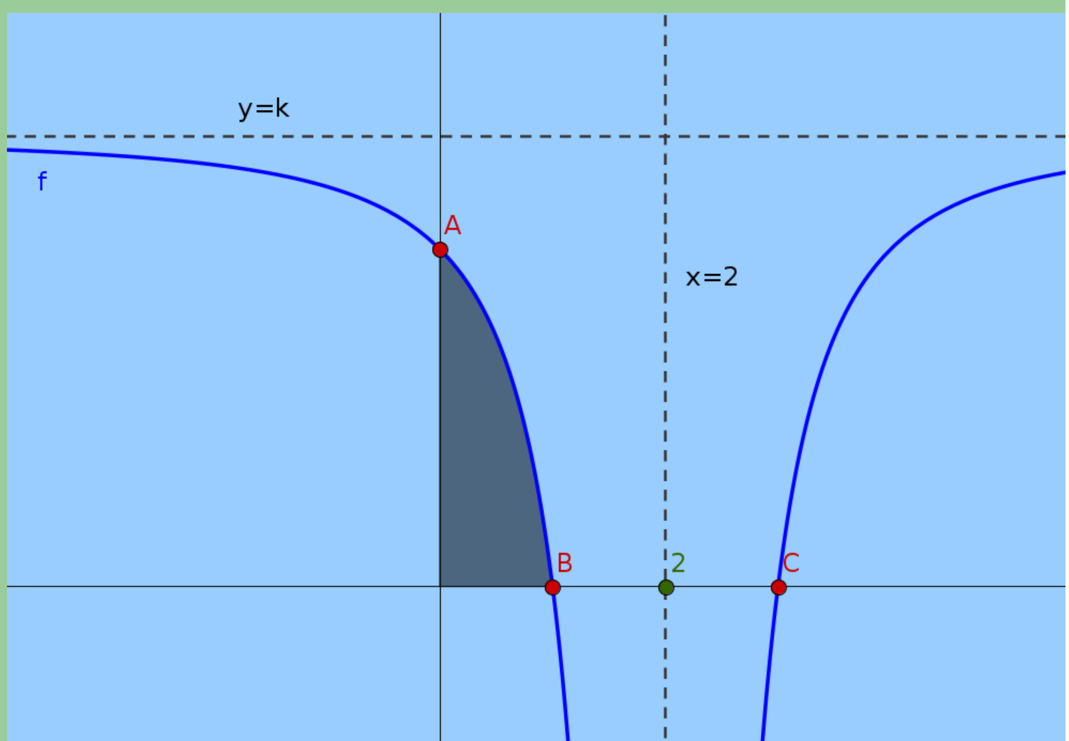
$$f(x)=0 \Leftrightarrow k-\frac{4}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow k=\frac{4}{(x-2)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2=\frac{4}{k} \Leftrightarrow (x-2)^2=\frac{4}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=\pm\sqrt{\frac{4}{k}} \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{\frac{4}{k}}=2\pm\frac{2}{\sqrt{k}}$$

O corte co eixo OY é: $f(0)=k-1>0$.

Existe unha asíntota vertical en $x=2$, con $\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty$, e unha horizontal en $y=k>0$.

Logo o recinto é o correspondente ao intervalo $\left[0, 2-\frac{2}{\sqrt{k}}\right]$.



Chamando S á área pedida, a condición é: $S=\int_0^{2-\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(k-\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx=2$

A integral indefinida é $\int\left(k-\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx=kx+\frac{4}{x-2}+C$.

Logo a integral definida é:

$$\int_0^{2-\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(k-\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx=\left[kx+\frac{4}{x-2}\right]_0^{2-\frac{2}{\sqrt{k}}}=\left[k\cdot\left(2-\frac{2}{\sqrt{k}}\right)+\frac{4}{2-\frac{2}{\sqrt{k}}-2}\right]-(-2)=$$

$$=2k-2\sqrt{k}-2\sqrt{k}+2=2k-4\sqrt{k}+2$$

Polo tanto $S=2k-4\sqrt{k}+2=2 \;\Leftrightarrow\; 2k=4\sqrt{k} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{k}=2 \;\Rightarrow\; k=4$

Asi que finalmente a función é $f(x)=4-\dfrac{4}{(x-2)^2}$.

1	

6. Calcular a integral $\int_3^9 20\cdot f(x)\,dx$, utilizando as propriedades da integral definida e sabendo que $f(x)$ é unha función contínua en $[1,9]$, $\int_1^3 f(x)\,dx=2$ e $\int_1^9 f(x)\,dx=8$.

Polas propriedades da integral definida sabe-se que $\int_1^9 f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^9 f(x)\,dx$.

Logo $\int_3^9 f(x)\,dx=\int_1^9 f(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx=8-2=6$.

Asi que $\int_3^9 20\cdot f(x)\,dx=20\cdot\int_3^9 f(x)\,dx=20\cdot 6=120$.